

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



**CONHECIMENTO PARA ENSINAR ESTATÍSTICA EM
CONTEXTO DE MODELAÇÃO: UM ESTUDO COM
PROFESSORAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO PROFISSIONAL**

Nélida Martins Filipe

**Orientadores: Prof.^a Doutora Ana Paula Canavarro
Prof.^a Doutora Leonor Santos**

**Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de
Doutor em Educação na especialidade da Didática da Matemática**

2017

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



**CONHECIMENTO PARA ENSINAR ESTATÍSTICA EM
CONTEXTO DE MODELAÇÃO: UM ESTUDO COM
PROFESSORAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO PROFISSIONAL**

Nélida Martins Filipe

Orientadores: Prof.^a Doutora Ana Paula Canavarro
Prof.^a Doutora Leonor Santos

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade da Didática da Matemática

Júri:

Presidente: Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães, Professor Associado e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Vogais:

- Doutor José António da Silva Fernandes, Professor Associado, Instituto de Educação da Universidade do Minho;
- Doutora Ana Paula Canavarro Teixeira, Professora Auxiliar da Escola de Ciências Sociais da Universidade de Évora, orientadora;
- Doutora Susana Paula Graça Carreira, Professora Associada, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve;
- Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães, Professor Associado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques, Professora Auxiliar, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Agradecimentos

Às minhas orientadoras, Professora Doutora Ana Paula Canavarro e Professora Doutora Leonor Santos, pelo incentivo, críticas, sugestões, palavras de apoio e ânimo durante algumas crises que tive e que sem a sua ajuda jamais teria chegado ao fim. Obrigada por me terem encaminhado nesta viagem cheia de encruzilhadas e terem conseguido com que eu escolhesse o caminho mais certo.

Às professoras que tão gentilmente aceitaram participar neste estudo e sempre trabalharam de forma entusiasta e profissional e que de colegas depressa passaram a grandes amigas.

À diretora do agrupamento de escolas, onde tenho estado estes últimos anos e que tão prontamente abriu as portas da escola. Obrigada por ter recebido com entusiasmo a realização deste estudo e por me ter aliviado algum trabalho de escola, para que eu conseguisse avançar.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional a todos os níveis que me deram ao longo destes anos. Esta não é apenas uma vitória minha, também é deles, pois sei que viveram intensamente todas as minhas frustrações, medos e alegrias.

Aos meus filhos, começo com um pedido de desculpas, por muitas vezes terem falado comigo e eu não os ter ouvido, por terem pedido para brincar e estar com eles e eu ter respondido que o momento não era o mais apropriado. Ao longo dos anos foram compreendendo e fico-lhes eternamente grata pelo incentivo e mimos que foram dando, apesar de eu sentir que alguma coisa perdi.

Ao meu marido, companheiro de viagem. Passámos pelas mesmas dúvidas, angústias, apoiámo-nos um ao outro e permanecemos juntos até ao fim. Teria sido uma viagem muita mais dura, sem o amor e compreensão.

A todos aqueles, que não consigo nomear, familiares, amigos e colegas, que sempre me incentivaram e que de uma forma ou outra ajudaram-me a concluir esta viagem.

Resumo

Este estudo tem como objetivo identificar e interpretar o conhecimento para ensinar Estatística evidenciado por professoras de Matemática do Ensino Profissional de diversos cursos, no quadro de uma experiência de ensino com recurso a tarefas de modelação que envolvem distribuições bidimensionais, desenvolvida em contexto colaborativo. O conhecimento profissional dos professores e as suas práticas de ensino, a modelação matemática e a Estatística constituem os domínios do quadro teórico da investigação. As relações bivariadas estão presentes em diversos fenómenos reais, podendo ser abordadas através da modelação matemática. A modelação desenvolve-se através de um ciclo com seis fases sequenciais, na qual intervêm saberes do domínio da Matemática e de outros domínios, nomeadamente relativos aos contextos da realidade em que se inscreve a situação modelada. É proposto um quadro de análise que contempla vários tipos do conhecimento para ensinar Estatística, o matemático e o não matemático, bem como o comum e o especializado, próprio dos professores, presentes nas várias fases do ciclo de modelação. Este quadro serviu de base para a identificação e interpretação do conhecimento para ensinar Estatística reveladas pelas professoras participantes no estudo.

Neste estudo optou-se pelo paradigma interpretativo, de natureza qualitativa, seguindo o design de estudo de caso relativo a duas professoras que lecionam o 10.º ano de escolaridade do Ensino Profissional. A recolha de dados recorreu à observação participante de aulas e sessões de trabalho colaborativo; a entrevistas e recolha de materiais produzidos por cada professora. A análise dos dados procurou desocultar os diferentes tipos de conhecimento usados pelas professoras revelados na prática de ensino relativa às aulas em que usaram tarefas de modelação estatística e identificar as dificuldades surgidas. Para além disso, revelou evidências do conhecimento matemático e não matemático das professoras, quer a nível do conhecimento comum quer a nível do conhecimento especializado. Evidenciou-se a fragilidade do conhecimento matemático no que diz respeito a conceitos do domínio das distribuições bidimensionais (correlação) e a robustez do seu conhecimento não matemático, proporcionado pelo contacto direto com a realidade a modelar a que tiveram acesso, com os respetivos alunos, na fase anterior à preparação das tarefas de modelação.

Palavras-chave: Conhecimento para ensinar Estatística, modelação matemática, distribuições bidimensionais, cursos profissionais.

Abstract

The aim of this study is to identify and analyze the knowledge to teach Statistics revealed by mathematic teachers of professional courses from different domains, in a context of a teaching experience using modelling tasks which involves two-dimensional distributions, developed in a collaborative group of teachers. Teachers professional knowledge, their teaching practices, mathematical modelling and Statistics are the domains of the theoretical frame of this investigation. The bivariate relations are present in different real phenomenon, which can be addressed through mathematical modelling process. This process is developed through a cycle of six sequential phases, in which knowledge of different areas, mathematical and non-mathematical, can intervene, namely ones related to real contexts where the modelling situation is situated. It is proposed a framework of analysis which includes varied types of knowledge to teach Statistics, the mathematical and the non-mathematical, as well as the common and specialized, the latter specific of the teachers, present in the different phases of the modelling cycle. This framework is the basis to identify and analyze the knowledge to teach Statistics revealed by the teachers who participated in the study.

In this study it was decided to use the interpretive paradigm and qualitative approach, following the design of case study of two teachers who were teaching the 10th grade of a professional course. Data collection was done by using a participant observation, interviews and analysis of documents, namely materials produced by each teacher. The data analyses tried to unhide the different types of knowledge used by the teachers revealed during the teaching practice, in lessons where they used modelling tasks and identify the problems detected. The analysis of the cases reveals evidences of both the mathematical and the non-mathematical knowledge of the teachers, either at the common knowledge or at the specialized knowledge. It was evident the fragility of the mathematical knowledge in what concerns concepts of the two-dimensional distributions (correlations) and the strength of the non-mathematical knowledge, given by the direct contact of the students with the reality of the situation to model, in a previous stage of the preparation of the modelling tasks.

Keywords: Knowledge to teach Statistics, mathematical modelling, two-dimensional distributions, professional courses.

Índice

Capítulo 1 - Introdução	1
Motivações do estudo	1
Problematização.....	3
Objetivo geral e questões de investigação	7
Relevância do estudo	8
Contexto curricular do Programa de Matemática para o ensino secundário profissional.....	11
Visão geral do Programa.....	12
Competências a desenvolver.....	12
Orientações metodológicas	13
Elenco modular e cursos	14
Módulo 3-Estatística	15
Estrutura da tese.....	19
Capítulo 2 - Modelação Matemática e Estatística.....	21
Caracterização de modelação matemática	21
Definição de modelação matemática	21
Modelo matemático e ciclos de modelação	23
Modelação no ensino da Matemática	29
Finalidades da modelação no ensino da Matemática.....	29
As tarefas de modelação	33
Modelação em Estatística	34
Educação Estatística.....	34
A Estatística como ferramenta na modelação matemática	38
O ensino e aprendizagem das distribuições bidimensionais	44
Modelação matemática no currículo.....	47
Práticas escolares de modelação matemática.....	49
Síntese.....	51
Capítulo 3 – Conhecimento e práticas do professor	55
O conhecimento profissional dos professores	55
Natureza do conhecimento profissional.....	54

Estrutura do conhecimento profissional.....	60
Os domínios do conhecimento profissional	62
Componentes do conhecimento didático do professor	68
Conhecimento da Matemática.....	69
Conhecimento dos alunos e processos de aprendizagem.....	70
Conhecimento do currículo de Matemática	72
Conhecimento Instrucional	75
Educação estatística e o conhecimento profissional do professor para ensinar	
Estatística	78
Modelos específicos de conhecimento estatístico para ensinar	78
Uma proposta de conhecimento para ensinar Estatística com modelação	
.....	84
Síntese.....	88
Práticas de ensino da Matemática.....	90
Conhecimento profissional e práticas de ensino	90
Planificação de aulas	92
Seleção, criação e adaptação de tarefas matemáticas	95
Gestão e condução de aulas	99
Estrutura das aulas	100
Práticas de utilização de tecnologias no ensino da Matemática	103
Reflexão sobre as práticas de ensino	105
De que forma, como e quando refletem os professores?	111
Síntese.....	111
Capítulo 4 – Metodologia	113
Opções metodológicas	113
Paradigma interpretativo	113
Abordagem qualitativa.....	116
Design de estudo	120
Contexto colaborativo.....	121
O papel da investigadora.....	127
Participantes no estudo	128
A escola.....	128
As turmas e cursos profissionais.....	129

As professoras	130
Recolha de dados	131
Entrevistas	132
Observação	137
Observação de aulas	138
Reuniões de trabalho colaborativo	139
Recolha documental	140
Análise de dados	140
Capítulo 5 – O contexto de trabalho colaborativo	143
Constituição do grupo de trabalho colaborativo	143
Sessões de trabalho colaborativo	146
A dinâmica das sessões de trabalho colaborativo	146
A primeira fase das sessões-cariz teórico	148
A segunda fase das sessões-parte criativa	153
As tarefas de “pré-modelação” e as de modelação matemática	156
A terceira fase das sessões-as aulas	160
A quarta fase das sessões-a reflexão final	164
Síntese	174
Capítulo 6 – Sara	175
A pessoa e a professora	176
Sara e o trabalho colaborativo	178
Caracterização geral da experiência de ensino realizada por Sara	185
A fase de “pré-modelação” de Sara	191
Tarefa 1: “Início do estudo das características de um grupo de alunos do pré-escolar”	191
Tarefa 4: “O início da gincana”	194
Síntese	198
A primeira tarefa de modelação: “Pé grande=peso pesado?”	200
Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação	200
A construção da tarefa	201
Planificação da tarefa	203
A condução da aula	205
Reflexão imediata de Sara sobre a aula	224

Síntese	226
A segunda tarefa de modelação: “Os magricelas rápidos e saltitantes ou...talvez não!”	229
Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação	229
A construção da tarefa	230
Planificação da tarefa	232
A condução da aula	234
Reflexão imediata de Sara sobre a aula	241
Síntese	244
A terceira tarefa de modelação: “Encontrei o melhor modelo matemático”	245
Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação	245
A construção da tarefa	247
Planificação da tarefa	250
A condução da aula	251
Reflexão imediata de Sara sobre a aula	267
Síntese	270
Evolução de Sara relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação.....	272
Conhecimento comum matemático.....	272
Conhecimento comum não matemático	273
Conhecimento especializado matemático	274
Conhecimento especializado não matemático	275
Síntese global relativa a Sara	277
Sara e as características do conhecimento para ensinar Estatística revelado na prática de ensino com tarefas de modelação	277
Quadro síntese de Sara.....	277
Caracterização global do conhecimento para ensinar Estatística de Sara	283
Sara e o conhecimento para ensinar Estatística nas diferentes fases das tarefas de modelação estatística	287
Sara e as dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que se evidenciaram na preparação, condução e reflexão de aulas de modelação estatística	290

Capítulo 7 – Patrícia	293
A pessoa e a professora.....	294
Patrícia e o trabalho colaborativo	296
Caracterização geral da experiência de ensino realizada por Patrícia	302
A fase de “pré-modelação” de Patrícia	308
Tarefa 1: “Começar a conhecer a amostra”	308
Tarefa 5: “A hora da soneca”	312
Síntese	316
A primeira tarefa de modelação: “Relacionando variáveis”	318
Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação	318
A construção da tarefa	319
Planificação da tarefa	321
A condução da aula	323
Reflexão imediata de Patrícia sobre a aula	340
Síntese	344
A segunda tarefa de modelação: “Estarei gordinho ou serei baixinho?”	346
Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação	346
A construção da tarefa	348
Planificação da tarefa	350
A condução da aula	351
Reflexão imediata de Patrícia sobre a aula	360
Síntese	361
A terceira tarefa de modelação: “Estarei magrinho ou cansadinho?”	362
Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação	362
A construção da tarefa	364
Planificação da tarefa	366
A condução da aula	367
Reflexão imediata de Patrícia sobre a aula	374
Síntese	378
Evolução de Patrícia relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação	380
Conhecimento comum matemático.....	380
Conhecimento comum não matemático	381

Conhecimento especializado matemático	382
Conhecimento especializado não matemático	383
Síntese global relativa a Patrícia.....	385
Patrícia e as características do conhecimento para ensinar Estatística revelado na prática de ensino com tarefas de modelação	386
Quadro síntese de Patrícia.....	386
Caracterização global do conhecimento para ensinar Estatística de Patrícia	392
Patrícia e o conhecimento para ensinar Estatística nas diferentes fases das tarefas de modelação estatística	397
Patrícia e as dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que se evidenciaram na preparação, condução e reflexão de aulas de modelação estatística.....	401
Capítulo 8 – Conclusões.....	405
Breve síntese do estudo	405
Conclusões gerais	407
Características do conhecimento para ensinar Estatística ao longo da prática letiva com tarefas de modelação	408
Conhecimento comum matemático.....	408
Conhecimento comum não matemático.....	410
Conhecimento especializado matemático	412
Conhecimento especializado não matemático	415
Conhecimento para ensinar Estatística nas diferentes fases de desenvolvimento das tarefas de modelação estatística	417
Construção da representação real.....	417
Construção do modelo real	418
Construção do modelo matemático.....	419
Obtenção de resultados matemáticos	420
Interpretação de resultados matemáticos	421
Validação do modelo matemático.....	421
Dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que se evidenciaram na preparação, condução e reflexão das aulas de modelação estatística.....	423
<i>Framework</i> relativo ao conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação com recurso a distribuições bidimensionais	425

Considerações finais	428
Referências.....	433
Anexos	449
Apêndices	537

Índice de figuras

Figura 1: Modelação na sala de aula (Kerr & Maki, 1979)	24
Figura 2: Ciclos na modelação (Lesh & Zawojewski, 2007).....	26
Figura 3: Ciclo de modelação de Ferri (2006)	27
Figura 4: A primeira dimensão do pensamento estatístico: ciclo investigativo (Wild & Pfannkuch, 1999)	39
Figura 5: A terceira dimensão do pensamento estatístico: o ciclo interrogativo (Wild & Pfannkuch, 1999)	42
Figura 6: Modelo de Shulman sobre o conhecimento do conteúdo, o conhecimento de pedagogia e o conhecimento didático (pedagogical content knowledge) do professor.....	63
Figura 7: Conhecimento dos professores (Hill, Ball & Schilling, 2008)	64
Figura 8: Estrutura hipotética de Groth (2007) para o conhecimento estatístico para ensinar	82
Figura 9: Modelo cíclico de ensino de Artzt e Armour-Thomas (Leikin & Zazkis, 2007, p.122)	92
Figura 10: Modelo do processo reflexivo para aprender com a experiência de Bound e Walker (1998).....	110
Figura 11: Exemplo de um grupo de alunos sobre a organização das idades das crianças em tabelas de frequências(10/05/12).....	193
Figura 12: Exemplo de uma tabela e gráfico de um dos grupos de alunos de Sara (24/05/12)	195
Figura 13: Exemplos de conclusões que os alunos obtiveram a partir da leitura da organização dos dados em tabelas (24/05/12)	196
Figura 14: Exemplo introdutório para explicar os vários conteúdos relacionados com as distribuições bidimensionais (12/06/12)	206
Figura 15: Exemplo usado para explicar o significado dos pontos do diagrama de dispersão, tendo em conta o contexto real (12/06/12).....	207
Figura 16: Exemplos de diagramas de dispersão (12/06/12)	208
Figura 17: Exemplo de uma associação não linear (12/06/12)	209
Figura 18: Exemplo usado para ensinar as distribuições bidimensionais, com recurso ao EXCEL (12/06/12)	210
Figura 19: Exemplo usado para ensinar a construir o diagrama de dispersão, com recurso ao EXCEL (12/06/12)	211

Figura 20: Exemplo, em EXCEL, de duas tabelas construídas por um grupo de alunos: primeira resultante da organização dos dados a partir dos questionários; segunda resultante da limpeza de dados (12/06/12)	214
Figura 21: Primeiro diagrama de dispersão obtido antes da intervenção de Sara (12/06/12).....	215
Figura 22: Segundo diagrama de dispersão obtido após intervenção de Sara (12/06/12).....	216
Figura 23: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão de um dos grupos (12/06/12).....	217
Figura 24: Exemplo, de um dos grupos, da construção do modelo de regressão linear, com recurso ao EXCEL (12/06/12)	218
Figura 25: Exemplo, de um dos grupos, da obtenção do modelo de regressão linear, com recurso ao EXCEL (12/06/12).....	218
Figura 26: Exemplo obtido por um grupo de alunos, de um modelo de regressão linear, com recurso ao EXCEL (12/06/12)	219
Figura 27: Exemplo do valor do coeficiente de correlação linear obtido por um grupo de alunos, com recurso ao EXCEL (12/06/12)	220
Figura 28: Exemplo da reta de regressão linear obtido por um grupo de alunos, com recurso ao EXCEL (12/06/12)	221
Figura 29: Exemplo, de um dos grupos, dos cálculos efetuados para a obtenção de resultados matemáticos (12/06/12)	222
Figura 30: Registo fotográfico do dia da gincana	235
Figura 31: Diagrama de dispersão obtido por um dos grupos, com recurso ao EXCEL, referentes às variáveis peso e 2º tempo do sprint (14/06/12).....	237
Figura 32: Modelos matemáticos obtidos, por um grupo de alunos, para os três pares de variáveis (14/06/12).....	238
Figura 33: Registo fotográfico do dia da gincana	248
Figura 34: Exemplo de tabelas, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12)	253
Figura 35: Exemplos de diagramas de dispersão, obtidos por um grupo de alunos (15/06/12).....	254
Figura 36: Exemplo da equação do modelo de regressão linear obtido por um grupo de alunos, para as variáveis “tempo do 1º sprint/tempo do 2º sprint” (15/06/12)	255
Figura 37: Exemplo da equação do modelo de regressão linear obtido por um grupo de alunos, para as variáveis “Acerta em cheio nas latas e Lança, atira e acerta” (15/06/12).....	255

Figura 38: Exemplo da equação do modelo de regressão linear da figura 36, sem inclusão do <i>outlier</i>	256
Figura 39: Exemplo da construção de várias linhas de tendência sobrepostas e respectivas equações de modelos de regressão (15/06/12).....	257
Figura 40: Exemplo da construção de várias linhas de tendência distintas para o mesmo conjunto de dados bivariados (15/06/12)	258
Figura 41: Exemplos de modelos de regressão polinomiais (15/06/12)	259
Figura 42: Exemplos de retas do modelo linear e respectivas equações das regressões lineares, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12).....	260
Figura 43: Exemplos de “curvas” referentes ao modelo de regressão quadrática e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12).....	261
Figura 44: Exemplos de “curvas” referentes ao modelo de regressão cúbica e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12).....	261
Figura 45: Exemplos de “curvas” referentes ao modelo de regressão quártica e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12).....	261
Figura 46: Exemplo de “curvas” referentes ao modelo de regressão polinomial de grau 5 e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12).....	262
Figura 47: Exemplo de “curvas” referentes ao modelo de regressão polinomial de grau 6 e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12).....	262
Figura 48: Exemplo de resposta de um dos grupos relativamente à escolha do modelo matemático (15/06/12)	263
Figura 49: Exemplo do resultado obtido, por um grupo de alunos, a partir da equação do modelo de regressão escolhido, para estimarem valores (15/06/12).	264
Figura 50: Exemplo do resultado obtido, por um grupo de alunos, a partir da equação do modelo de regressão escolhido, para estimarem valores (15/06/12).	265
Figura 51: Exemplo apresentado por um grupo de alunas sobre a incorreta organização dos dados (30/04/12).....	311
Figura 52: Exemplo de uma tabela e gráfico obtidos por um grupo de alunas (24/05/12).....	313
Figura 53: Exemplo de algumas conclusões obtidas por um grupo de alunas (24/05/12).....	315
Figura 54: Exemplo introdutório para explicar os vários conteúdos relacionados com as distribuições bidimensionais (11/06/12)	324
Figura 55: Exemplo usado para explicar o significado dos pontos do diagrama de dispersão, tendo em conta o contexto real (11/06/12).....	325

Figura 56: Exemplo usado para fazer referência à reta do modelo de regressão linear e aos mínimos quadrados (11/06/12)	326
Figura 57: Exemplo usado para explicar o significado do valor do coeficiente de correlação linear (11/06/12)	327
Figura 58: Exemplo dado para calcular o valor do coeficiente de correlação linear, com recurso ao EXCEL (11/06/12).....	328
Figura 59: Exemplo dado para obter um modelo de regressão quadrática, com recurso ao EXCEL (11/06/12)	329
Figura 60: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão incorretamente construídos por um grupo de alunas (11/06/12).....	331
Figura 61: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão incorretamente construídos por um grupo de alunas (11/06/12)	332
Figura 62: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão corretamente construídos por um grupo de alunas (11/06/12)	333
Figura 63: Exemplo da construção de modelos matemáticos, com recurso ao EXCEL, apresentado por um grupo de alunas (11/06/12)	334
Figura 64: Exemplo obtido por um grupo de alunas, da construção do modelo de regressão linear, com recurso ao EXCEL (11/06/12)	335
Figura 65: Exemplo, obtido por um grupo de alunas, da construção do modelo de regressão quadrática, com recurso ao EXCEL (11/06/12)	335
Figura 66: Exemplo, obtido por um grupo de alunas, da construção do modelo de regressão exponencial, com recurso ao EXCEL (11/06/12)	336
Figura 67: Exemplo da equação do modelo de regressão quadrática, obtido por um grupo de alunas, com recurso ao EXCEL (11/06/12)	337
Figura 68: Exemplo das respostas dadas por um grupo de alunas durante a fase de obtenção de resultados matemáticos (11/06/12)	339
Figura 69: Exemplo de respostas dadas pelas alunas à última questão (11/06/12)	340
Figura 70: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão que relaciona o peso com a altura (21/06/12)	353
Figura 71: Exemplo da reta e da equação do modelo de regressão linear obtido por um grupo de alunas, com recurso ao EXCEL (21/06/12)	356
Figura 72: Exemplo dos cálculos efetuados a partir do modelo de regressão linear para prever resultados (21/06/12)	357
Figura 73: Exemplos de respostas dadas por alunas a partir dos resultados matemáticos obtidos e comparação com a realidade (21/06/12)	359

Figura 74: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão que relaciona o peso com as horas de sono que as crianças dormem (25/06/12)	369
Figura 75: Exemplos de respostas dadas por alguns grupos de alunas à questão 2 (25/06/12)	370
Figura 76: Exemplo da construção de um modelo de regressão polinomial e respetiva equação, apresentado por um grupo de alunas (25/06/12)	371
Figura 77: Exemplo do cálculo efetuado, por um grupo de alunas, a partir da equação do modelo de regressão escolhido, para estimarem valores (25/06/12)	372
Figura 78: Exemplo de interpretações realizadas a partir dos resultados matemáticos obtidos e comparação com a realidade (25/06/12)	373
Figura 79: Exemplo de conclusões que permitiram compreender em que condições o modelo matemático escolhido é válido (25/06/12)	373
Figura 80: Exemplos de conclusões apresentadas que retratam a comparação efetuada entre os resultados matemáticos obtidos com as conjecturas inicialmente apresentadas (25/06/12)	374

Índice de quadros

Quadro 1: Conhecimento estatístico para ensinar (Burgess, 2007)	79
Quadro 2: Exemplos de diversos conhecimentos estatísticos para ensinar (Burgess, 2007)	80
Quadro 3: Exemplos de Groth (2007) relativamente aos vários tipos de conhecimento estatístico para ensinar com investigações matemáticas	83
Quadro 4: Aspectos do conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação para o estudo das distribuições bidimensionais (adaptado de Groth, 2007)	85
Quadro 5: Fases das práticas de ensino (Ponte, 2011, p.79)	91
Quadro 6: Primeiras entrevistas semiestruturadas individuais realizadas.....	135
Quadro 7: Últimas entrevistas semiestruturadas individuais realizadas	137
Quadro 8: Estrutura da dinâmica da equipa de trabalho colaborativo e sua relação com a atividade individual dos membros.....	147
Quadro 9: Identificação e conteúdos estatísticos abordados nas oito tarefas de “pré-modelação” criadas por Sara.....	187
Quadro 10: Identificação e conteúdos estatísticos abordados nas quatro tarefas de modelação criadas por Sara.....	189
Quadro 11: Aspectos mencionados por Sara sobre a sua evolução	276
Quadro 12: Aspectos do conhecimento de Sara para ensinar Estatística com tarefas de modelação para o estudo das distribuições bidimensionais (adaptado de Groth, 2007)	277
Quadro 13: Identificação e conteúdos estatísticos abordados nas oito tarefas de “pré-modelação” criadas por Patrícia.....	304
Quadro 14: Identificação e conteúdos estatísticos abordados nas quatro tarefas de modelação criadas por Patrícia.....	306
Quadro 15: Aspectos mencionados por Patrícia sobre a sua evolução	385
Quadro 16: Aspectos do conhecimento de Patrícia para ensinar Estatística com tarefas de modelação para o estudo das distribuições bidimensionais (adaptado de Groth, 2007)	386
Quadro 17: <i>Framework</i> relativo ao conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação com recurso a distribuições bidimensionais	425

Índice de anexos

Anexo 1: Lista de módulos da disciplina de Matemática para os cursos de 300 horas	450
Anexo 2: Lista de módulos da disciplina de Matemática para os cursos de 200 ou 100 horas	451
Anexo 3: Temas abordados no ensino secundário profissional	452
Anexo 4: Precedências do elenco modular	453
Anexo 5: Módulos para os cursos de 100 horas.....	454
Anexo 6: Documento com os princípios orientadores das linhas estratégicas de ação da escola.....	455
Anexo 7: Conformação da tarefa 3 ao ciclo de modelação de Kerr e Maki (1979), apresentada na terceira sessão de trabalho colaborativo	456
Anexo 8: Perfil de desempenho dos cursos profissionais: Técnico de Cozinha-Pastelaria	457
Anexo 9: Perfil de desempenho dos cursos profissionais: Técnico de apoio à Gestão Desportiva	458
Anexo 10: Perfil de desempenho dos cursos profissionais: Técnico de apoio à Infância.....	459
Anexo 11: Propostas de contextos reais para cada curso profissional	460
Anexo 12: Questionário, elaborado pelos alunos e professoras e entregues aos Encarregados de Educação.....	464
Anexo 13: Tabela de recolha de dados oriundos dos questionários.....	467
Anexo 14: Tarefa de “pré-modelação” de Sara.....	473
Anexo 15: Primeira tarefa de “pré-modelação” de Sara: Início das características de um grupo de alunos do pré-escolar	475
Anexo 16: Segunda tarefa de “pré-modelação” de Sara: O peso e a altura dos alunos do pré-escolar	477
Anexo 17: Terceira tarefa de “pré-modelação” de Sara: A pontaria no jogo em cheio nas latas	479
Anexo 18: Quarta tarefa de “pré-modelação” de Sara: O início da Gincana.....	482
Anexo 19: Quinta tarefa de “pré-modelação” de Sara: A Gincana continua.....	485
Anexo 20: Sexta tarefa de “pré-modelação” de Sara: Para conhecer melhor o grupo	487
Anexo 21: Sétima tarefa de “pré-modelação” de Sara: Esse houvesse alterações na turma?.....	489

Anexo 22: Oitava tarefa de “pré-modelação” de Sara: A dispersão dos resultados no jogo Canguru Maluco e em Cheio nas Latas	491
Anexo 23: Primeira tarefa de modelação de Sara: Pé grande=Peso pesado?	492
Anexo 24: Segunda tarefa de modelação de Sara: Os magricelas saltitantes ou...talvez não!	494
Anexo 25: Terceira tarefa de modelação de Sara: Encontrei o melhor modelo matemático!.....	497
Anexo 26: Quarta tarefa de modelação de Sara: Será que estas variáveis estão relacionadas?.....	499
Anexo 27: Tabelas de pontuações e tempos de jogos da Gincana.....	501
Anexo 28: Planificação das tarefas em sessão de trabalho colaborativo	506
Anexo 29: Primeira tarefa de “pré-modelação” de Patrícia: Começar a conhecer a amostra	508
Anexo 30: Segunda tarefa de “pré-modelação” de Patrícia: Já sou grande	510
Anexo 31: Terceira tarefa de “pré-modelação” de Patrícia: Vida quotidiana e hábitos diários	512
Anexo 32: Quarta tarefa de “pré-modelação” de Patrícia: Alimentação e higiene	514
Anexo 33: Quinta tarefa de “pré-modelação” de Patrícia: A hora da soneca	516
Anexo 34: Sexta tarefa de “pré-modelação” de Patrícia: Média, moda e mediana	518
Anexo 35: Sétima tarefa de “pré-modelação” de Patrícia: Brincar com os números	520
Anexo 36: Oitava tarefa de “pré-modelação” de Patrícia: As peças de fruta	522
Anexo 37: Primeira tarefa de modelação de Patrícia: Relacionar variáveis	524
Anexo 38: Segunda tarefa de modelação de Patrícia: Estarei gordinho ou serei baixinho?.....	526
Anexo 39: Terceira tarefa de modelação de Patrícia: Estarei magrinho ou cansadinho?.....	529
Anexo 40: Quarta tarefa de modelação de Patrícia: Será que estas variáveis estão relacionadas?.....	532

Índice de âpendices

Apêndice 1: Carta de autorização à escola.....	538
Apêndice 2: Carta de autorização aos Encarregados de Educação	539
Apêndice 3: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº1	540
Apêndice 4: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº2	541
Apêndice 5: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº3	544
Apêndice 6: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº4	548
Apêndice 7: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº5	551
Apêndice 8: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº6	554
Apêndice 9: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº7	556
Apêndice 10: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº8	558
Apêndice 11: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº9	560
Apêndice 12: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº10 e 11.....	561
Apêndice 13: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº12	563
Apêndice 14: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº13	564
Apêndice 15: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº14	565
Apêndice 16: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº15	566
Apêndice 17: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº16	567
Apêndice 18: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº17	568
Apêndice 19: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº18	569
Apêndice 20: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº19	571
Apêndice 21: Guião de sessão de trabalho colaborativo nº20	573
Apêndice 22: Calendarização e planificação das reuniões de trabalho colaborativo	575
Apêndice 23: Guião da primeira entrevista semiestruturada às professoras	577
Apêndice 24: Guião da última entrevista semiestruturada às professoras	581
Apêndice 25: Guião da entrevista pré-aula	586
Apêndice 26: Guião da entrevista pós-aula.....	587
Apêndice 27: Guião para observação de aulas	588
Apêndice 28: Calendarização e planificação das reuniões de trabalho colaborativo	590

Apêndice 29: Calendarização e tópicos de discussão das sessões relativas à primeira fase	592
Apêndice 30: Tarefa apresentada na sessão 3	595
Apêndice 31: Calendarização e tópicos de discussão das sessões relativas à segunda fase	596
Apêndice 32: Calendarização e tópicos de discussão das sessões relativas à terceira fase	599

Capítulo 1- Introdução

Este capítulo apresenta as minhas motivações pessoais que me levaram ao desenvolvimento deste tema, identifica a pertinência deste estudo enquadrado em investigação atual sobre conhecimento profissional dos professores e práticas de ensino da Matemática, nomeadamente sobre o ensino da Estatística, apresenta o objetivo do estudo e as suas questões de investigação. Apresenta também as orientações curriculares portuguesas em que se enquadra o ensino secundário profissional, contexto deste estudo. Por último, descreve a estrutura da presente tese.

Motivações do estudo

Esta investigação focou-se no conhecimento para ensinar Estatística do professor de Matemática que leciona cursos profissionais no Ensino Secundário. Decorreu da reflexão sobre a minha prática de ensino e da dificuldade que senti enquanto professora de Matemática de turmas de cursos profissionais, nomeadamente no que diz respeito à gestão curricular do programa e na escolha de tarefas adequadas a cada curso profissional.

A falta de formação nesta área, a ausência de partilha de informações e desconhecimento de como os professores fazem a gestão curricular do programa levou-me a várias interrogações sobre esta temática, nomeadamente no que diz respeito à produção de tarefas de modelação, tão enfatizadas no programa de Matemática e no tema Estatística.

Muitos professores não implementam tarefas de modelação ou porque desconhecem o conceito ou porque acham que se o fizerem não cumprem o programa, pois muitos deles consideram que cumprir o programa é percorrer toda a listagem de tópicos a lecionar. Esquecem-se que o cumprimento do programa passa por implementar tarefas contextualizadas e que proporcionem aos alunos atividade matemática rica que lhes permita compreender o valor da Matemática como ferramenta para lidar com o mundo. As tarefas de modelação permitem usar e aplicar conhecimento matemático que

pode estar relacionado com qualquer área profissional ou do saber, e que é mobilizado na construção ou exploração dos modelos matemáticos em questão. Também os resultados da modelação são confrontados com a realidade, permitindo uma reflexão e crítica a partir do que desta se conhece. Assim, as tarefas de modelação permitem partir da realidade, fazer emergir a necessidade de usar a Matemática como ferramenta útil para resolução de problemas extra matemáticos (reais) e voltar à realidade, na comparação dos resultados matemáticos com esta.

O programa de Matemática (ME, 2004) sugere que seja dada importância às aplicações da matemática e à modelação matemática e essa tem sido uma das minhas maiores dificuldades, certamente partilhada pelos meus colegas. Poderá existir um fraco reconhecimento da importância da modelação enquanto orientação curricular. Mas poderão ser outros os aspetos que dificultam a realização da modelação no ensino destes cursos. Saberão os professores como ensinar Estatística usando a modelação? Ou existirão dificuldades em explorar os conhecimentos estatísticos no contexto da modelação? E ao nível das práticas de ensino, como lidar com a adaptação de tarefas de modo a poder usar a modelação nas aulas? E como as gerir com os alunos?

São estas questões que coloco quando preparo as minhas aulas e produzo materiais para os meus alunos destes cursos. Preocupa-me o perfil destes alunos pois, em geral, são desmotivados, alguns são mesmo problemáticos a nível comportamental e encaram a Matemática como algo que lhes dificulta a vida e à qual não atribuem importância - por esta razão a minha tentativa em selecionar tarefas que partam de situações reais, que os motivem e que os leve a compreender a importância e utilidade da Matemática no mundo que os rodeia. Estas tarefas permitir-lhes-ão perceber que a partir da realidade, de problemas que surgem, poderão ter necessidade de usar a Matemática para os resolver. Deste modo, a visão da disciplina poderá ser favorecida e a aprendizagem da Matemática poderá ser mais significativa e relevante para estes alunos que verão nela algo necessário para a compreensão e intervenção no real. Estas são as minhas expectativas.

Neste contexto, tem sido essa a minha maior dificuldade, pois não me tem sido fácil, ao trabalhar isoladamente, criar ou selecionar tarefas que preencham esses requisitos tão importantes para este tipo de cursos.

Problematização

Nos últimos anos os estudos sobre o professor têm vindo a ganhar importância, uma vez que lhe tem sido reconhecido o seu papel crucial, nomeadamente no desenvolvimento e na gestão do currículo. Atribui-se-lhe um maior protagonismo (Brocardo, 2001; Canavarro & Ponte, 2005; Gimeno, 1989) no seu desenvolvimento profissional, mesmo um papel central (Sowder, 2007). O professor é o agente fundamental no desenvolvimento do seu conhecimento profissional e das suas práticas (Ball, Thomas & Phelps, 2008; Canavarro, 2003; Ponte, 2012; Ponte & Oliveira, 2002; Ruthven & Goodchild, 2008).

Um professor precisa de possuir competências em várias áreas e domínios. Não pode apenas ser detentor de conhecimento na sua área científica, terá de possuir conhecimentos de índole educacional, no que diz respeito aos seus alunos e aprendizagens, currículo e problemas organizacionais e de inserção da escola na comunidade. O que quer dizer que a atividade do professor requer uma combinação de saberes académicos e científicos com conhecimentos de ordem educacional. Na perspetiva de Azcárate (1999), é através de um processo contínuo de resolução de problemas que o conhecimento profissional se constrói na prática quotidiana. Assim, o conhecimento profissional é um conhecimento gerado num dado contexto e através de diversas atividades, que tem por objetivo dar resposta aos problemas educativos que se colocam no ensino da Matemática. Deste modo, a organização do conhecimento desenvolve-se em torno dos interesses e preocupações imediatas do professor, tomando significado face aos problemas que ajuda a resolver. O conhecimento profissional envolve a capacidade de resolução de problemas concretos (Santos, 2000), mas também o domínio de processos de rotina num campo bem definido de prática social, como é o caso do ensino (Ponte & Oliveira, 2002). Para que o professor possa desempenhar bem o seu papel, precisa de se envolver no seu processo de formação contínua ao longo da vida, identificando as suas necessidades de formação, envolvendo-se em processos de construção e evolução do seu conhecimento profissional e desenvolvimento profissional onde possa ter um papel ativo na negociação de objetivos e processos de formação (Sowder, 2007) e em que a sua prática possa ser simultaneamente um ponto de partida, de análise e reflexão, mas também um contexto de aplicação do que aprendeu (Llinares & Krainer, 2006; Mewborn, 2003).

São nestes contextos que se pode desenvolver o conhecimento profissional dos professores, sendo este entendido como um conhecimento prático, orientado para a ação e que cresce com a experiência (Elbaz, 1983). É assim um saber dirigido à ação, integrador de outros conhecimentos que se caracteriza pela elaboração de teorias práticas que orientam e dirigem a ação (Azcárate, 1999).

Para o tornar explícito, é importante recorrer a situações do seu uso, onde ele é mobilizado. Considerando-o como um conhecimento sobretudo dirigido para a ação, este conhecimento é construído e desenvolvido ao longo da experiência e da reflexão sobre a experiência. Sendo um conhecimento dinâmico e evolutivo, a sua natureza é essencialmente implícita, situada e pessoal (Santos, 2000).

A colaboração (Hiebert, Gallimore & Stigler, 2002; Ruthven & Goodchild, 2008) constitui um meio que pode ajudar a perceber o modo como os professores mobilizam esse conhecimento e como evolui. A colaboração nestes contextos organiza-se normalmente em torno de uma tarefa comum como, por exemplo, a exploração de novos materiais curriculares (Mewborn, 2003), a resolução de problemas (Sowder, 2007) ou o uso da tecnologia no ensino (Ruthven & Goodchild, 2008), facultando oportunidades aos professores para construírem conhecimento sobre a Matemática e sobre a pedagogia, num ambiente que encoraja correr riscos (Sowder, 2007) e que pode apoiar-se em redes (Llinares & Kainer, 2006).

O contexto em que os professores exercem a sua profissão é importante no desenvolvimento da sua prática e conhecimento. Investigações recomendam as potencialidades do trabalho colaborativo entre docentes ou com peritos e/ou com investigadores (e.g. Boavida & Ponte, 2002; Ferreira, 2006; Hargreaves, 1998; Nunes & Ponte, 2008; Pimentel, 2010; Santos, 2000; Saraiva, 2002; Sowder, 2007). Uma investigação enquadrada no paradigma colaborativo entre professores e investigadores é entendida, por Ruthven e Goodchild (2008), como um acordo de aprendizagem conjunta que envolve um maior grau de colaboração, onde os professores constituem um parceiro ativo no processo de pesquisa (Krainer, 2011), sendo objeto de análise a própria prática de investigação.

De modo a dar sentido e pertinência ao trabalho conjunto dos docentes que lecionaram no contexto de desenvolvimento da investigação desta tese, os cursos profissionais, pareceu-me pertinente criar um elo de ligação e de interesse comum aos vários cursos, onde os professores se pudessem envolver numa aprendizagem conjunta e

com maior grau de colaboração. Verifica-se no programa de Matemática para os cursos profissionais que existe um módulo comum a todos eles: a Estatística. Esta é sem dúvida uma área crucial e que está presente em várias áreas do saber e com inúmeras conexões. A Estatística é uma ciência que presta uma grande contribuição à sociedade, pois além de fornecer métodos para organizar, resumir e comunicar dados, também proporciona condições de fazer inferência através de observações realizadas por um universo maior de observações potenciais. Há um crescente número do aproveitamento da Estatística nas diversas áreas do conhecimento, a generalizada emergência e reconhecimento de problemas de natureza estatística nos vários ramos científicos, na indústria e em atividades governamentais o que faz crescer o interesse pela atividade estatística (Loureiro, Oliveira & Brunheira, 2000).

Steen (2002) refere que a Estatística é uma das áreas que está mais presente no dia-a-dia do cidadão comum. Este deve estar preparado para analisar, criticar e tirar conclusões acerca da informação que lhe é fornecida. Daí a importância da integração da Estatística nos currículos nacionais.

No entanto, existem, para vários autores (por exemplo, Burgess, 2007; Groth, 2007), diferenças entre a Estatística e a Matemática. A Estatística usa Matemática, processos matemáticos, mas lida com números que são dados em contexto, aos quais é necessário atribuir significado, e não com números abstratos. Além disso, a Estatística coloca questões estocásticas, às quais se responde situadamente com análise de dados em contexto, e a Matemática coloca questões determinísticas, às quais quer responder com teorias demonstráveis e abstratas (Groth, 2013).

À medida que a sociedade valoriza a análise de dados e a capacidade de raciocinar sobre eles e de usá-los de forma crítica e reflexiva na tomada de decisões, contrastando com as práticas habituais de aplicação de fórmulas que requerem cálculos morosos e repetitivos e sem significado para os alunos, a Estatística tem ganho destaque nos documentos curriculares, tanto nacionais como internacionais (GAISE, 2005; ME, 2007; NCTM, 2007). Estas orientações sugerem uma abordagem curricular que promova, ao longo dos anos de escolaridade, a compreensão da Estatística como um processo investigativo para resolver problemas reais em que os alunos se sentem motivados para: formular as suas próprias questões sobre um fenómeno significativo, que podem ser respondidas recolhendo, organizando e representando dados; seleccionar e aplicar métodos (gráficos e numéricos) apropriados para analisar os dados; desenvolver e avaliar

inferências e previsões baseados nos dados; e relacionar a análise com a questão original em estudo (Oliveira & Henriques, 2014).

Já desde algum tempo que a Estatística está presente no programa de Matemática, mas nem todos os professores lhe dão a importância que esta tem na sociedade, nem a abordam com a relevância que deveria ter. Nas várias profissões, a Estatística desempenha um papel importante, porque à medida que a interpretação de dados se tem tornado cada vez mais relevante em decisões que afetam a vida das pessoas espera-se que os profissionais de praticamente todas as áreas sejam capazes de a usar. A Estatística assume deste modo um papel preponderante nessa preparação porque proporciona ferramentas metodológicas gerais para analisar a variabilidade (Gal & Garfield, 1997), determinar relações entre variáveis, desenhar as suas próprias experiências e tomar decisões em situações de incerteza (Batanero & Diaz, 2004).

Neste estudo, o estabelecimento de relações entre variáveis, a partir de elementos da realidade, levou à necessidade de recorrermos ao estudo das distribuições bidimensionais. Vários autores referem a complexidade do ensino e aprendizagem sobre dados e relações bivariadas (Engel & Sedlmeier, 2011; Estepa & Batanero, 1996; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Mugabe, Fernandes & Correia, 2012). A compreensão da regressão e correlação exige conhecimento básico sobre funções e, acima de tudo, a consideração da variação à volta de uma possível tendência (Engel & Sedlmeier, 2011). A covariação, num sentido mais alargado, corresponde a uma correspondência entre variáveis cujos valores envolvem alguma forma de associação (Batanero, Estepa & Godino, 1997; Moritz, 2004; Zieffler & Garfield, 2009). No entanto, embora a definição de covariação seja frequentemente incluída na definição de associação, segundo Moritz (2004) a primeira é distinta desta porque o “termo *associação estatística* pode referir-se a associações entre duas variáveis categóricas, usualmente representada em tabelas de dupla entrada (ou tabelas de contingência), e entre uma variável categórica e uma intervalar” (p. 228, *itálico no original*). Neste estudo, focamo-nos na covariação estatística, frequentemente designada também por correlação entendida como a correspondência entre duas variáveis estatísticas numéricas, que é reconhecida como um importante aspeto do raciocínio estatístico (Fitzallen, 2012; Moritz, 2004).

Os contextos reais que os cursos profissionais podem fazer emergir e o estudo das prováveis relações que podem surgir a partir dessas situações reais, parecem tornar-se adequados para trabalhar com modelação matemática. Para além disso, como a

modelação matemática promove o estabelecimento de relações entre variáveis estatísticas, parece-me adequado usá-la para o ensino dos conteúdos estatísticos inerentes às distribuições bidimensionais.

Mas esta abordagem requer do professor um conhecimento específico e são necessários quadros do conhecimento profissional dos professores distintos dos que existem para a Matemática (Groth, 2007). Dado o desconhecimento que parece existir sobre modelação matemática entre os professores do ensino secundário e a complexidade inerente ao ensino das distribuições bidimensionais, pareceu-me pertinente focar aqui o meu estudo. Que conhecimento profissional específico permite aos professores exercer este ensino de forma eficaz? Como será este conhecimento?

Objetivo geral e questões de investigação

O objetivo deste estudo é identificar e interpretar o conhecimento específico para ensinar Estatística evidenciado por professoras no quadro de uma experiência de ensino, com recurso a tarefas de modelação que envolvem distribuições bidimensionais, desenvolvida em contexto colaborativo por professoras de Matemática do ensino profissional de diversos cursos.

Para conseguir identificar e interpretar o conhecimento para ensinar Estatística evidenciado pelas professoras, foi usado como referência o quadro de análise definido no capítulo de revisão de literatura, que cruza as fases de modelação (Ferri, 2006) com os vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística propostos por Groth (2007), fazendo emergir os conceitos de conhecimento matemático e não matemático (como, por exemplo, o conhecimento dos contextos), bem como os conceitos de conhecimento comum e especializado, sendo o primeiro detido por qualquer pessoa com formação matemática e o segundo específico de quem leciona esta disciplina.

Assim, como questões orientadoras do estudo elegeram-se as seguintes:

- Como se caracteriza o conhecimento para ensinar Estatística revelado pelas professoras na prática de ensino com tarefas de modelação estatística?
- Que conhecimento para ensinar Estatística se evidencia nas diferentes fases de desenvolvimento das tarefas de modelação estatística exploradas pelas professoras em sala de aula?

- Que dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística se evidenciam na preparação, condução e reflexão de aulas de modelação estatística pelas professoras?

Não se tendo constituído como objetivo da investigação, existiu a expectativa de que com esta investigação se pudesse ainda contribuir para constituir um acervo de tarefas de modelação estatística contextualizadas a cada curso profissional que fosse ao encontro das orientações do programa de Matemática e aplicável no futuro por professores que lecionem este tipo de cursos.

Relevância do estudo

O programa de Matemática para os cursos profissionais é um programa para alunos que escolhem uma via profissionalizante, mas que poderão no final do 12.º ano prosseguir estudos. A Matemática faz parte de um grupo de duas ou três disciplinas da componente científica e pode ser distribuída por 100, 200 ou 300 horas consoante a área profissional. O principal objetivo explicitado é contribuir para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de atividades profissionais, permitindo-lhes obter um nível III de certificação profissional e, ao mesmo tempo, que corresponda às exigências do ensino secundário (ME, 2004).

O que é considerado essencial neste programa é que os alunos desenvolvam conhecimentos, capacidades e atitudes que lhes permitam a aprendizagem de um conjunto de competências orientadas para um setor de atividade, profissão ou família de profissões e devem “fazer” a sua aprendizagem ao nível da experimentação, isto é, sendo importante e fazendo sentido a implementação de tarefas de modelação:

A Matemática, nas suas conexões com todos os ramos de saber, é uma contribuição decisiva para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas e tecnológicas. (ME, 2004/5, p. 14)

A modelação matemática surge da necessidade do Homem em compreender os fenómenos que o cercam para interferir ou não no seu processo de construção e é uma forma privilegiada de resolução de problemas do mundo real. A palavra modelação

aparece intimamente associada aos problemas da realidade, procurando-se sistematizar dados obtidos da realidade e analisá-los do ponto de vista matemático, conjecturando sobre como se relacionam através de fórmulas, gráficos ou esquemas que permitam a sua interpretação e extrapolação para outras situações previsíveis da realidade. Neste contexto, faz todo o sentido ensinar Matemática aos cursos profissionais recorrendo à modelação. O seu programa dá indicações metodológicas, nomeadamente quanto ao tipo de tarefas a propor aos alunos e capacidades matemáticas a desenvolver:

O ensino de todos estes temas tem de ser suportado em tarefas propostas a cada estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas adequadas a cada curso sobre as quais se coloquem questões significativas, resolução de problemas não rotineiros e conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais, recorrendo com frequência a ferramentas computacionais adequadas. Neste sentido, considera-se que as aplicações e modelação matemática constituem um grande tema transversal a todos os módulos. (ME, 2004/5, p. 14).

Acrescente-se ainda que no ensino profissional não há obrigatoriedade de adoção de manuais escolares, o que torna muitas vezes a missão mais complicada. Os manuais existentes não fazem referência a tarefas com a especificidade a que o programa se refere e são únicos, isto é, os manuais existentes são iguais para todos os cursos. Embora sejam dadas orientações e seja solicitado aos professores que integrem e adaptem tarefas de modelação, e as contextualizem e integrem na realidade de cada curso, não são apresentados no programa sugestões de tarefas de modelação adequadas a cada curso profissional existente.

Assim, a gestão curricular do programa de Matemática destes cursos é particularmente complexa. Por um lado, os cursos profissionais são diversos e a disciplina de Matemática tem uma carga horária distinta consoante os cursos, no entanto, o programa é um só. Por outro lado, pede-se aos professores que adaptem o programa consoante as especificidades das áreas dos cursos, que são muito variadas (Curso Técnico de Apoio à Infância e Curso Técnico de Turismo - 100 horas; Curso Técnico de Cozinha; Curso Técnico de Restaurante e Bar; Curso Técnico de Apoio à Gestão Desportiva - 200 horas; Curso Técnico de Gestão de Equipamentos Informáticos e Curso Técnico de Segurança e Salvamento em Meio Aquático - 300 horas), e que o concretizem através de tarefas de modelação:

Considera-se que as Aplicações e Modelação Matemática constituem um grande tema transversal a todos os módulos. A modelação e os problemas relacionados com as diferentes áreas profissionais constituem tanto a metodologia de trabalho privilegiada na construção dos conceitos matemáticos, como uma competência a desenvolver que é imprescindível para estudantes que vão enfrentar no seu trabalho profissional, problemas concretos muito variados e terão de saber selecionar as ferramentas matemáticas relevantes para cada situação. (ME, 2004/5, p. 4).

Este cenário suscitou diversas dificuldades no desenvolvimento e implementação do programa nestes cursos profissionais, tanto a mim como aos meus colegas, que muitas vezes nos sentimos não preparados para lidar com as exigências de lecionar um programa de Matemática com estas características e adequado a estes alunos. Muitas das vezes colocámos em causa se o conhecimento profissional seria ou não suficiente na gestão e leção deste programa. Em particular, era-nos muito difícil criar situações problemáticas que tivessem e fizessem realmente sentido para estes alunos. No tema da Estatística, a procura de contextos reais para a criação de tarefas motivadoras constituiu um desafio. Daí a minha necessidade, assim como a das minhas colegas, de desenvolver algo novo e realmente adaptado a estes alunos, para que a disciplina se tornasse mais atrativa, para que eles aprendessem com vontade e percebessem a utilidade que a Estatística poderá ter no seu futuro.

A pertinência deste estudo está estreitamente relacionada com as ideias acima descritas e defendidas por vários autores e com a minha dificuldade já referida anteriormente, dificuldade essa inerente à gestão curricular do programa e procura de tentar compreender o conhecimento para ensinar Estatística que os professores evidenciam nessa gestão.

Desta forma, desafiou-me compreender de que modo o conhecimento para ensinar Estatística se manifestou e evoluiu, ao fazermos conjuntamente a gestão curricular deste programa. A ideia foi criar, colaborativamente com colegas de grupo que lecionavam também cursos profissionais, tarefas relacionadas com situações problemáticas com que os alunos se viessem a deparar e conseguir lecionar os conteúdos estatísticos, nomeadamente as distribuições bidimensionais, de um modo mais ligado ao real.

Neste contexto, e dado que se pretendeu criar tarefas de modelação contextualizadas a partir de situações do mundo real e, tendo em conta a importância da Estatística no entendimento do real, a escolha recaiu sobre a criação de tarefas de

modelação estatística, aqui entendidas como tarefas de modelação que recorreram a conhecimentos do domínio temático da Estatística.

Este estudo contribuirá para a formação de professores, contínua e inicial, para o desenvolvimento profissional de professores que trabalham colaborativamente e para a didática da Estatística.

Contexto curricular do Programa de Matemática para o ensino secundário profissional

O mundo encontra-se em constante mudança e neste sentido a Matemática desempenha não só um papel fundamental no desenvolvimento dos jovens, como permite que estes compreendam o meio envolvente e desenvolvam a capacidade de tomar decisões e fazer escolhas no seu quotidiano, nomeadamente na sua profissão. O programa de Matemática para o ensino secundário profissional (ME, 2004) tem por base essa preocupação, enfatizando o facto de a disciplina constituir uma base teórica essencial e necessária na interpretação da realidade. Neste contexto, o programa apresenta como finalidades da disciplina:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
 - Desenvolver a capacidade de seleccionar a Matemática relevante para cada problema da realidade;
 - Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
 - Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para a inserção plena na vida profissional como para o prosseguimento de estudos;
 - Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;
 - Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
- Criar capacidades de intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade atual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania ativa e participativa. (ME, 2004/5, p. 3).

Visão geral do programa

No ensino da Matemática e segundo o programa de Matemática para o ensino profissional, não é objetivo que os alunos aprendam as regras lógicas e símbolos, mas sim que desenvolvam ferramentas adequadas no cálculo, devendo a aprendizagem da Matemática fazer-se ao nível da resolução de problemas e modelação matemática em contexto real:

O uso das ferramentas deve ser ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes e contextualizados a situações realistas, permitindo o seu manejo e em que seja vantajoso o seu conhecimento, privilegiando mesmo características típicas do ensino experimental. (ME, 2004/5, p. 3)

Os temas a abordar são estruturados em módulos. A abordagem da Estatística e das Probabilidades elementares completa as aprendizagens básicas, com algumas noções novas e ferramentas que não podem ser compreendidas no ensino básico.

A lista de módulos desta disciplina é constituída por dois grupos, cuja sintetização é apresentada em dois quadros resumo em anexo (anexos 1 e 2). O grupo A corresponde ao elenco destinado aos cursos cuja carga horária da disciplina é de 300 horas. Os módulos do grupo B destinam-se a ser combinados com módulos A, para a formação dos estudantes em cursos menos exigentes em carga horária.

O programa de Matemática dos cursos profissionais sugere que todos estes temas sejam abordados num contexto de modelação matemática e aplicações da Matemática. Para esse efeito, é necessário que sejam criadas situações que partam do mundo real e que sejam transportadas para a sala de aula, constituindo interesse para a área profissional escolhida, com conexões a várias áreas do saber e com recurso, preferencialmente, à tecnologia. Devem ser colocadas, aos alunos, questões significativas que levem à exploração e à aquisição de conhecimentos e ferramentas matemáticas que estimulem a criatividade e poder de decisão, quando confrontados com situações realistas.

Competências a desenvolver

É expetante que, com este programa de Matemática, os alunos adquiram competências, técnicas e ferramentas matemáticas adequadas que os levem a tomadas de decisões, quando estiverem perante situações realistas, e que sejam capazes de mobilizar os conhecimentos matemáticos e científicos adequados nessas situações. Neste contexto, o professor deverá propor problemas contextualizados tendo em conta o curso

profissional e que levem ao desenvolvimento de atividade matemática, proporcionando: a exploração, procura de generalizações, formulação de conjecturas e o raciocínio lógico. Neste programa, para desenvolver a competência matemática consideram-se os seguintes princípios fundamentais:

- Neste tipo de cursos profissionais, o professor deve assumir o papel de mediador. Para isso, o professor deve disponibilizar as ferramentas matemáticas necessárias e participar na organização das ideias, para que com este tipo de ensino se desenvolva a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção na realidade.
- A participação da Matemática no desenvolvimento das competências profissionais contribui para o desenvolvimento da comunicação (dos conceitos, dos raciocínios ou das ideias) com clareza e progressivo rigor lógico. (ME, 2004/5, p.6)

Para que estas finalidades sejam atingidas o professor terá que assumir um papel crucial que passa por uma preocupação acrescida relativamente a este tipo de cursos e de alunos, no que diz respeito à escolha e criação de tarefas e à forma como as vai implementar dentro da sala de aula. Uma primeira preocupação, e cuidado a ter, passa por compreender que é essencial que as tarefas a apresentar aos alunos partam de problemas ou situações do mundo real e que sejam de interesse para eles. Outra preocupação é conseguir transformar uma situação do mundo real em algo de concreto que possa ser levado para a sala de aula e trabalhado matematicamente, permitindo desenvolver deste modo competências matemáticas que partam de conhecimentos que os alunos já têm a partir de algo exterior à Matemática e que entendam desta forma a utilidade e aplicabilidade da Matemática. Este tipo de trabalho proporciona nos alunos o espírito de pesquisa, entretida e é fundamental que trabalhem em grupo, permitindo não só a partilha de experiências já vividas, como também a descoberta de conceitos matemáticos que poderão emergir dessas situações realistas. Esta opinião será fundamentada a seguir, tendo em conta as orientações metodológicas deste programa.

Orientações metodológicas

No que diz respeito às orientações metodológicas, é mencionado, neste programa, que se deve recorrer a aplicações e à modelação matemática, à comunicação matemática e ao uso da tecnologia, nomeadamente, fazendo recurso à calculadora gráfica, computadores (*software* adequado) e internet (ME, 2004/5).

Elenco modular e cursos

O elenco modular dos cursos profissionais é apresentado num quadro (anexo 3) e é composto por dezoito módulos possíveis. Esse quadro apresenta o conjunto de todos os módulos contemplados e possíveis para o ensino secundário profissional. Nos quadros resumo (anexos 1 e 2), referidos anteriormente, são apresentados os elencos modulares para todas as cargas horárias à disciplina de Matemática, assim como os conjuntos de módulos a seguir em cada tipo de curso. A partir do quadro (anexo 3), observa-se que são abordados todos os grandes temas da matemática. Em cada módulo, a duração de referência será discriminada por forma a indicar as horas de lecionação incluindo as que devem ser dedicadas ao acompanhamento/avaliação de atividades e as horas reservadas para a avaliação sumativa final.

Tendo em conta a diversidade de temas apresentados anteriormente e que fazem parte do elenco modular dos vários cursos existentes, é indispensável que o professor tenha um conhecimento global do programa, bem como dos programas dos ciclos do ensino básico e também e não menos importante dos próprios alunos e perfil de desempenho dos vários cursos. Existem cursos cujo elenco modular é obrigatório e poderão ser tratados pela ordem indicada ou a definir atendendo às precedências entre os conteúdos (anexo 4). Sempre que o projeto desenvolvido pela escola o aconselhar, a ordem poderá ser alterada, devendo tal decisão ficar devidamente registada e ser adequadamente planeada, desde que se respeitem as precedências apresentadas no quadro já referido. Outros cursos, cuja carga horária a Matemática é de 100 horas, ficam a cargo do professor ou grupo disciplinar, a escolha dos módulos de Matemática a abordar nesses cursos, respeitando a área profissional dos alunos e sua adequabilidade ao curso (anexo 5).

A carga horária da disciplina de Matemática para os cursos profissionais é variável e dependente do tipo de curso. Esta pode ser distribuída do seguinte modo: 100 horas (10.º ano), 200 horas (10.º e 11.º anos) e 300 horas (10.º, 11.º e 12.º anos). Para os cursos cuja carga horária de Matemática é de 300 horas os módulos que são lecionados são: A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 e A10. A ordem sugerida é esta. No entanto, e desde que fique convenientemente justificado e respeite as precedências apresentadas no quadro anterior, é possível alterar a ordem. Para os cursos cuja carga horária a Matemática é de 200 horas, os módulos a lecionar são: A2, B1, A3, A4, A8, A9 e A10. Da mesma forma,

a ordem pode ser alterada desde que respeitadas as precedências acima mencionadas. Quanto aos cursos cuja carga horária é apenas de 100 horas, são lecionados apenas 3 módulos, sendo obrigatório o módulo A3 – Estatística, e os outros dois escolhidos dentro de algumas opções e respeitando a área profissional do curso.

Módulo 3 – Estatística

A duração de referência para a leção do módulo de Estatística é de 27 horas. Devido ao facto de este ser o único módulo obrigatório a todos os cursos profissionais, pareceu-nos o mais pertinente para trabalhar colaborativamente. Deste modo, foi possível criar tarefas de modelação para os três cursos a funcionar no 10.º ano de escolaridade na escola onde foi implementado o projeto de investigação. Para além disso, é um dos módulos que mais interesse suscita nos alunos e com várias aplicações ao real. O programa de Matemática apresenta-nos o módulo de Estatística dividido da seguinte forma: apresentação, competências visadas, objetivos de aprendizagem, âmbito dos conteúdos, situações de aprendizagem/avaliação e bibliografia/recursos.

O tema da Estatística tem a particularidade de muitos dos conteúdos já terem sido abordados em anos anteriores, o que permite avançar progressivamente e reinvestir nesses conteúdos e abordá-los de formas diversificadas. O aluno deve ficar a saber organizar, representar e tratar dados, sejam recolhidos em bruto ou tabelados de modo a conseguir tratar conclusões duma forma crítica, consciente e organizada:

É importante que o estudo da estatística contribua para melhorar a capacidade dos estudantes em avaliar afirmações de carácter estatístico, fornecendo-lhes ferramentas apropriadas para rejeitar quer certos anúncios publicitários quer notícias ou outras informações em que a interpretação dos dados ou a realização da amostragem não tenha sido correta. (ME, 2004/5, p. 21).

Este módulo é propício ao trabalho colaborativo entre professores de áreas diferentes e ao trabalho de grupo ou individual com recurso, preferencialmente, ao computador e à calculadora gráfica, sempre com o objetivo de promover e desenvolver o sentido crítico e a comunicação matemática. Este módulo é ainda adequado à elaboração de projetos contextualizados a situações realistas e integradas na área profissional do curso profissional.

O programa refere que as competências a alcançar neste módulo são:

- A tendência para usar a Matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos;
- A predisposição para recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para os representar de modos adequados, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando as novas tecnologias;
- A aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz de situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas;
- A tendência para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito;
- A aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e elaboração de conclusões;
- O sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada. (ME, 2004/5, p. 22)

O programa no âmbito das competências a desenvolver destaca a importância em recorrer a situações oriundas do mundo real e que sejam os alunos, preferencialmente, a recolher dados reais. O objetivo é que consigam compreender e interpretar fenómenos da vida real e sejam capazes de tratá-los matematicamente, realizando investigações no sentido de tirarem conclusões e validarem os modelos a que chegaram, sempre com sentido crítico face aos resultados obtidos, podendo levar a possíveis reajustamentos.

Relativamente aos objetivos de aprendizagem, pretende-se que os alunos atinjam os objetivos a seguir indicados:

- Definir o problema a estudar;
- Realizar recolhas de dados;
- Organizar e tratar os dados através do cálculo das medidas estatísticas (de centralidade e dispersão), sua interpretação e representação gráfica;
- Selecionar as formas de representação gráfica mais adequadas à estatística a trabalhar e interpretá-las criticamente;
- Desenvolver o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada;
- Comunicar raciocínios e/ou argumentos matemáticos quer na forma oral e/ou escrita;

- Realizar um trabalho de projeto, partindo de uma situação problemática da vida real relacionada com percursos profissionais, com necessidades industriais ou comerciais (controle de qualidade da cadeia de produção), com rentabilização de recursos (negociado com os estudantes), garante a concretização dos objetivos que se pretendem. Por isso, recomenda-se que se desenvolva a aprendizagem usando metodologias de trabalho de projeto. (ME, 2004/5, p. 23)

Todos os objetivos apresentados anteriormente vão ao encontro das várias fases de modelação matemática, que serão discutidas no próximo capítulo, o que me leva a crer que a Estatística é um bom tema para criar tarefas de modelação matemática e que se adequa a todas as áreas profissionais.

No âmbito dos conteúdos o que é abordado é o seguinte:

1. Estatística — Generalidades

- Objeto da estatística. Utilidade na vida moderna.
- Recenseamento e sondagem; população e amostra; critérios de seleção de amostra de uma determinada população.
- Estatística descritiva e indutiva.

2. Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)

- Tipos de caracteres estatísticos: qualitativo e quantitativo (discreto e contínuo).
- Formas de representação: gráficos circulares, diagramas de barras/histogramas, pictogramas, função cumulativa, diagrama de extremos e quartis, tabelas de frequências absolutas e relativas, polígono de frequências.
- Medidas de localização central: moda/classe modal, média, mediana e quartis.
- Medidas de dispersão: amplitude, variância, desvio padrão, amplitude interquartis.

3. Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)

- Diagrama de dispersão; dependência estatística e correlação positiva e negativa.
- Coeficiente de correlação e sua variação no intervalo.
- Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física.
- Reta de regressão: sua interpretação e limitações. (ME, 2004/5, p. 23)

Neste módulo, é importante ter consciência que a Estatística desempenha um papel crucial em todas as áreas do saber e conhecimento e revela-se de grande utilidade na vida moderna e profissional.

A compreensão do conceito de amostragem e o reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas permite a distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Abordam-se, ainda que intuitivamente, os critérios de escolha de uma dada amostra: a aleatoriedade, a representatividade e o ser livre de vícios de conceção.

A Estatística é uma ciência que trata dos “dados”. Em alguma altura do trabalho deste módulo, os estudantes precisam de ficar a compreender que num procedimento estatístico estão envolvidas, de um modo geral, duas fases: uma fase de organização dos dados recolhidos em que se procura reduzir, de forma adequada, a informação neles contida - Estatística Descritiva -, e uma segunda fase, em que se procura tirar conclusões e tomar decisões para um conjunto mais vasto, de onde se recolheram os dados - Inferência Estatística:

Uma fase importante para o trabalho escolar-profissional é a aquisição dos próprios “dados”, que deve ser significativo até ao ponto de realçar que, no início de qualquer estudo estatístico, é imperioso proceder ao planeamento da experiência (ME, 2004/5).

Em síntese, a análise do programa para o ensino secundário profissional levou-me a uma antevisão de muitas dificuldades na gestão curricular deste programa, não só pela minha própria experiência enquanto professora de cursos do ensino profissional, como também pelas conversas que tive e tenho com colegas nas mesmas condições.

O programa sugere a criação e seleção de tarefas a partir de situações do mundo real, mas não está presente em nenhum dos módulos exemplos de tarefas deste tipo, apenas as sugerem não dando indicações sobre o que são. Quando se refere à implementação de modelação matemática, não é claro o que se entende por isto e o pouco à-vontade geral que existe entre os professores sobre este assunto leva-me a acreditar que poucos são os que o fazem. Muitas são as questões que me surgiram relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística que os professores evidenciam, nomeadamente: Como preparam, criam, selecionam e planificam tarefas para estes cursos com uma especificidade tão grande? Que conhecimento para ensinar Estatística evidenciam? Esse

conhecimento é suficiente? Como fazem e como pensam? Será que trabalham colaborativamente na pesquisa e produção de materiais?

Muitas são as orientações para que os professores criem colaborativamente situações ou problemas a partir do mundo real. Essas situações devem constituir momentos significativos de aprendizagem e levarem a emergir os vários conceitos estatísticos, de modo a que os alunos no futuro, perante vários contextos profissionais, sejam capazes de mobilizar os conteúdos estatísticos aprendidos na sala de aula, no mundo profissional. Deste modo, este programa tem por finalidade promover o sentido crítico e a capacidade de decisão perante as exigências profissionais. Neste contexto, reforço a importância da necessidade de criar colaborativamente tarefas de modelação estatística para cursos do ensino profissional e a expectativa que tive sobre o contributo que este trabalho possa ter na evolução do conhecimento para ensinar Estatística dos professores.

Estrutura da tese

A tese estrutura-se em oito capítulos. Após este capítulo 1, apresento os capítulos 2 e 3 relacionados com o enquadramento teórico do estudo, onde faço uma revisão de literatura e discuto os principais resultados dos estudos empíricos relacionados com os temas estruturantes deste estudo. No capítulo 2, sobre modelação Matemática e Estatística, discuto cada uma delas e faço o cruzamento entre ambas. Para além disso, apresento e discuto vários ciclos de modelação. No capítulo 3, sobre conhecimento e práticas do professor, abordo os vários tipos de conhecimento profissional, dando por fim destaque ao conhecimento para ensinar Estatística, relativamente ao qual proponho um quadro de análise próprio que considera o conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação.

No capítulo 4, apresento a metodologia onde justifico a opção por um estudo qualitativo de natureza interpretativa, na modalidade de estudo de caso. Aí descrevo as técnicas de recolha de dados, o processo e procedimentos da análise de dados.

No capítulo 5, apresento o contexto do trabalho colaborativo, onde descrevo e justifico a constituição da equipa e também o funcionamento das várias sessões de trabalho colaborativo.

Nos capítulos 6 e 7, apresento os casos das professoras Sara e Patrícia, começando por as descrever, segundo uma estrutura onde se cruzam, no quadro próprio de análise, os vários tipos do conhecimento para ensinar Estatística e as várias fases do ciclo de modelação ao longo das diversas tarefas criadas e implementadas. Cada um dos casos inclui uma descrição sobre a relação de cada professora com o trabalho colaborativo. No final de cada caso, é apresentada uma reflexão global sobre as tarefas de modelação estatística (reflexão da professora sobre as dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que foi sentido e como as superou e as que estão por superar) e uma síntese global relativa a cada professora, tendo em conta as questões orientadoras deste estudo.

No capítulo 8 e último, discuto os resultados do estudo, apresento as conclusões, uma proposta de um *framework* do conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação sobre as distribuições bidimensionais e um conjunto de reflexões finais.

Capítulo 2 - Modelação Matemática e Estatística

Caracterização de modelação matemática

Os atuais programas de Matemática contemplam cada vez mais o uso desta disciplina como uma forma poderosa de compreensão e intervenção no real. Neste contexto faz todo o sentido trazer situações do mundo real para a sala de aula e usar a Matemática para a sua compreensão. Estamos inseridos numa sociedade cada vez mais matematizada e para a compreender são usados cada vez mais modelos matemáticos em todas as áreas do saber. Mas o que é modelação matemática? Como se faz? Para que serve e com que objetivos? De que forma se integra no currículo? Esta secção dedicar-se-á a tentar dar respostas e clarificar estas questões com o objetivo de caracterizar modelação matemática e perceber como ensinar Estatística com recurso a esta.

Definição de modelação matemática

A modelação matemática surge da necessidade do Homem em compreender os fenómenos que o cercam para interferir ou não no seu processo de construção e é uma forma privilegiada de resolução de problemas do mundo real.

A palavra modelação aparece intimamente associada aos problemas da realidade, procurando-se sistematizar dados obtidos da realidade e analisá-los sob pontos de vista matemáticos, conjecturando fórmulas, gráficos ou esquemas para interpretá-los e extrapolar para outras situações previsíveis, da realidade.

Apresentaremos algumas definições de modelação matemática encontradas na literatura. Bassanezi (1994) refere que:

A modelação matemática é um processo dinâmico de busca de modelos adequados, que sirvam de protótipos de alguma entidade. (Bassanezi, 1994, p. 45)

Para Bassanezi (2002), o processo de modelação consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e de resolvê-los interpretando as suas soluções na linguagem do mundo real.

Numa visão semelhante, Biembengut (1997) descreve modelação matemática como o processo requerido para obtenção de um modelo matemático. Acrescenta, no entanto, que tal processo pode, sob alguns aspetos, ser considerado um processo artístico. Na perspetiva da autora, para elaborar um modelo, além de conhecimento apurado de Matemática, o “modelador” deve ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, discernir que conteúdo matemático melhor se adapta para descrevê-lo, além de senso lúdico para “jogar” com as variáveis envolvidas. Biembengut (1997) considera que a modelação é como um meio para integrar dois conjuntos aparentemente disjuntos: matemática e realidade. Isto sugere traduzir a linguagem do mundo real para a linguagem do mundo matemático, ou seja, relacionar dois domínios ou mundos distintos.

Outros autores como Swetz (1992) definem modelação matemática como um: “processo de idealizar um modelo matemático” (Swetz, 1992, p. 45).

Para Swetz (1992) a modelação matemática é uma forma privilegiada de resolução de problemas da vida real e apresenta as seguintes fases do processo de modelação matemática: formular o problema; isolar os fatores relevantes (quais os parâmetros? Quais as variáveis?); determinar as relações matemáticas que existem, os fatores relevantes e que são úteis para resolver o problema; estabelecer a relação e criar um modelo; testar o modelo, determinar valores para situações conhecidas e examinar o ajustamento; refinar o modelo, para obter informações mais úteis e precisas.

Segundo Niss (1992), a modelação está associada à aplicação da matemática a situações e problemas extra matemáticos e ocorre por meio de modelos matemáticos. Um caso de modelação matemática para que seja considerado autêntico terá que estar associado a uma disciplina ou atividade existente fora da Matemática e que compreende fenómenos, objetos, questões e problemas que têm interesse genuíno de uma perspetiva extra matemática para pessoas ligadas a essa disciplina ou atividade, ideia esta também defendida por Ferri (2006), tal como mostraremos na secção seguinte. Esta autora apresenta as várias fases da modelação matemática: clarificar o objetivo de aplicar um modelo matemático ao contexto dado (problema); especificar os aspetos a considerar e as questões a responder, tal como suposições e condições subjacentes; realizar o processo de

matematização, isto é, traduzir os elementos e relações importantes da situação extra matemática para um universo matemático, o que conduz a um modelo matemático; métodos e resultados matemáticos para obter *resultados matemáticos* a respeito das propriedades dos modelos; interpretar esses resultados em termos da situação extra matemática; validar o modelo.

A modelação, ao ser essencialmente entendida como um processo, como foi referido anteriormente, é descrita, usualmente, através de um esquema: o ciclo da modelação. Vários autores (por exemplo, Kerr & Maki, 1979; Lesh, 1981; Ponte, 1992; Lança & Canavarro, 2008; Lesh & Zawojewski (2007), Ferri (2006)) apresentaram diferentes versões para este ciclo. Alguns desses modelos serão apresentados na próxima secção.

Modelo matemático e ciclos de modelação

Um modelo físico é uma construção que reproduz um objeto real. À semelhança dos modelos físicos, também os modelos teóricos podem ser construídos. Um modelo teórico é um conjunto de regras e leis que representa um objeto ou fenómeno (Swetz & Hartzler, 1991).

O modelo matemático pode ser definido como uma estrutura matemática que descreve, aproximadamente, as características de um fenómeno em questão e pode ser determinado através da experimentação, observação e cálculo (Swetz & Hartzler, 1991).

Segundo Edwards e Hamsom (1990) um modelo matemático é o produto da transferência de um conjunto de elementos matemáticos (como sejam, funções ou equações), com vista à obtenção de uma representação matemática de uma parcela do mundo real. Já para Swetz e Hartzler (1991), modelo matemático de um objeto ou de um fenómeno real é um conjunto de regras ou leis, de natureza matemática, que representam adequadamente o objeto ou o fenómeno na mente de um observador.

Entre estas duas definições existem algumas diferenças, sobretudo no que se refere à aplicação da matemática para explicar uma parcela do real. Em qualquer dos casos, é necessário, previamente, definir-se a situação real que se quer estudar, ou seja, identificar com precisão em que consiste o problema. Uma vez ultrapassada esta fase, segue-se a escolha da estrutura matemática utilizada para representar o problema, ou seja, são escolhidas as variáveis que se relacionam de algum modo. Definida a formulação

matemática do problema, esta terá que ser testada e analisada de modo a retirar conclusões. Estas, por sua vez, terão que ser interpretadas à luz da situação inicial. É esta a fase de avaliação do modelo. Posteriormente, consoante os resultados, decide-se redefinir o problema, considerar novas variáveis ou alterar a via de resolução. Toda esta descrição constitui um ciclo, o ciclo de modelação.

No ciclo de modelação elaborado por Kerr e Maki (Fig. 1) está presente o modelo para a sala de aula, o que o torna particularmente interessante para a educação. Este modelo para a sala de aula implica uma maior simplificação do problema, considerando-se apenas o que é mais relevante e, como tal, abandonando alguns dos seus aspetos (Matos & Carreira, 1994b), com vista a torná-lo mais interessante e compreensível para os alunos.

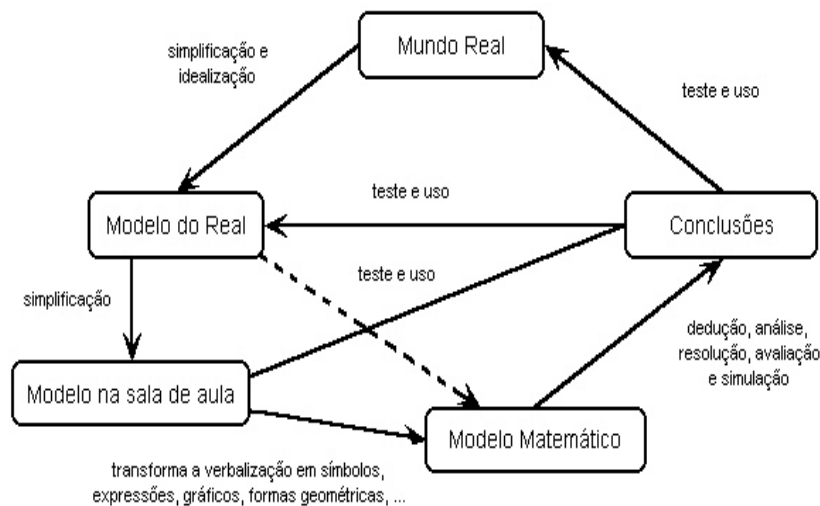


Figura 1: Modelação na sala de aula (Kerr & Maki, 1979)

Podemos interpretar o ciclo de modelação de Kerr e Maki da seguinte forma: a primeira etapa consiste em identificar o problema do mundo real; depois, na seguinte fase do processo de modelação, constrói-se um modelo real da situação problemática, para o qual é necessário identificar e definir em que consiste o problema. Por sua vez, este modelo real será traduzido por uma estrutura matemática onde são representadas as variáveis e estabelecidas as relações existentes entre si, isto é, é feita a substituição das palavras e conceitos por símbolos e expressões matemáticas – surge, então, o modelo matemático. É neste modelo matemático que procuramos utilizar as ferramentas matemáticas ao nosso dispor para o analisar, de modo a chegar a novas conclusões (Kerr & Maki, 1979; Ponte, 1992). Estas conclusões ou resultados têm de ser interpretados de acordo com a situação real, de modo a ser avaliada a adequação e utilidade do modelo ao

objetivo inicial. Evidentemente, nem sempre é obtido o modelo mais indicado e, nestes casos, terá de ser construído um novo modelo.

Ponte (1992) refere que um modelo é uma descrição simplificada duma situação, real ou imaginária. Em Ponte (1992), por exemplo, podemos encontrar uma versão do ciclo de modelação onde não consta o modelo para sala de aula. No entanto este autor valoriza o recurso a estas tarefas dentro da sala de aula, descrevendo as etapas do ciclo como se este se desenvolvesse neste contexto. Para este autor, o primeiro passo do ciclo de modelação é traduzir a situação real através de um problema; a seguir temos que escolher uma estrutura matemática (modelo matemático) para o representar; ao mesmo tempo sugere que se selecione as variáveis que estão evidentes na formulação do problema e se estabeleçam relações entre si; posteriormente e uma vez representado o problema, usamos as ferramentas matemáticas que o conhecemos para o analisar e tirar conclusões; de seguida refere que as conclusões obtidas têm que ser interpretadas de acordo com a situação do mundo real e criticadas; por último temos que avaliar a adequação do modelo inicial e caso este não seja adequado temos que reajustá-lo, procurar novas variáveis, estabelecer novas variáveis e se for preciso repetir várias vezes este ciclo até obtermos resultados que consideremos satisfatórios e adequados à situação real inicial. Como se constata, este autor, não fala como em outros ciclos apresentados por outros autores, em modelo para a sala de aula, pois fala da constituição do modelo e “salta” para o modelo matemático, no entanto está subjacente que este está presente e é construído durante todo este processo de modelação.

Alguns autores defendem que os modelos matemáticos podem assumir naturezas diversas. Carreira (1995), por exemplo, distingue três grandes etapas para as aplicações e modelos matemáticos: a descrição, a prescrição e a previsão, também defendido por Lesh e Zawojewski (2007), como descreveremos em parágrafos seguintes. O carácter descritivo da matemática pode ser exemplificado quando, ao nos confrontarmos com uma dada situação problemática real, questionamos o que nos é apresentado e traduzimo-lo para linguagem matemática. O carácter prescritivo dos modelos matemáticos está presente especialmente em situações reais no contexto social, quando, após a obtenção dos resultados de um modelo, tomamos decisões quanto ao que fazer. O aspeto preditivo dos modelos matemáticos será aquele que, em contexto de sala de aula, mais nos interessará. Ormell (1991) dá um grande destaque à natureza projetiva dos modelos matemáticos, afirmando tratarem-se de instrumentos de simulação de hipóteses. Este tipo de modelação

é usado para se saber o que esperar de uma determinada alteração no modelo inicial, através da análise de um cenário de implicações onde são definidos critérios para a manipulação das variáveis. Estes critérios visam, por sua vez, a maximização de vantagens e a minimização de desvantagens (Carreira, 1995). Este aspeto de previsão dos modelos matemáticos está bem explícito na definição de modelo matemático dada por Canavarro (2004):

Um modelo matemático é algo que nos ajuda a compreender melhor uma situação e proporciona-nos o poder de prever aquilo que não conhecemos. Por isso é muito mais importante que descreva bem o essencial do fenómeno e que proporcione as indicações pertinentes sobre o futuro do que não se adapte perfeitamente ao início da situação (...) (p. 63).

Neste contexto, o crucial é que o modelo que é criado inicialmente nos ajude a conjecturar e testar hipóteses emergentes do problema, de modo a que nos possibilite a previsão de resultados. Esse modelo como pode ser reajustado, caso não se adapte exatamente à situação inicial, proporcionará após reajustes e testagens de novas hipóteses, à construção de um novo modelo.

Edward e Hamson (1990) defendem que ao ser criado um modelo matemático dá-se um deslocamento do mundo real para o mundo abstrato dos conceitos matemáticos e, depois de utilizado o modelo para responder ao problema, dá-se um novo deslocamento para retornar ao mundo real, com vista a interpretar a solução encontrada matematicamente, no contexto. Estes deslocamentos foram também considerados por Lesh e Zawojewski (2007) quando consideraram o esquema da figura 2 que ilustra ciclos na modelação:

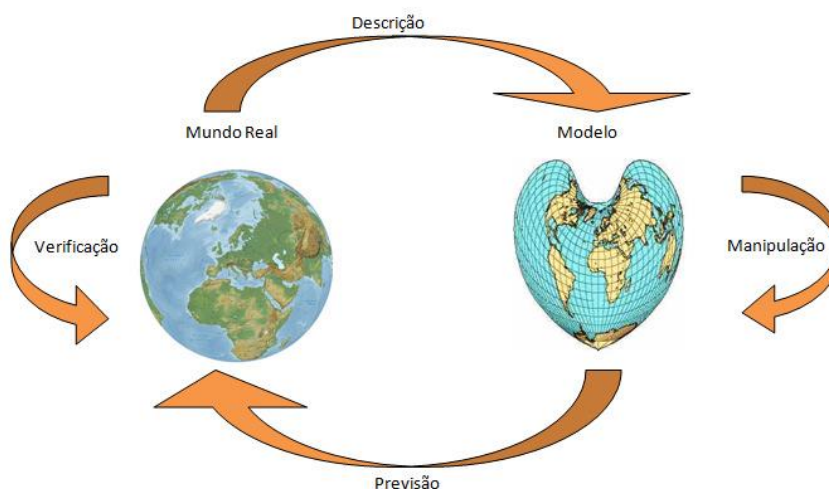


Figura 2: Ciclos na modelação (Lesh & Zawojewski, 2007)

A resolução de problemas de modelação requer que os alunos tenham um determinado tipo de pensamento, perante um problema real, mais relacionado com aspetos de estrutura e sistematização, revelando aspetos muito pessoais da sua forma de pensar enquanto indivíduo. Contudo, há um ciclo comum, apresentado na figura 2, que todos os estudantes devem percorrer enquanto estão envolvidos em tarefas de modelação. A descrição refere-se à criação do modelo que envolve uma transição do “mundo real” para o “mundo modelado”. A manipulação do modelo matemático acontece dentro do “mundo modelado” quando nele se executam operações relacionadas com questões e hipóteses provenientes do “mundo real”. A previsão (*Prediction*) transporta os resultados relevantes do “mundo modelado” para o “mundo real”, sendo a verificação o processo de validar de forma crítica no “mundo real”, os resultados obtidos no “mundo modelado”. Caso os resultados não sejam válidos no contexto real é necessário proceder a testes e revisão do processo experimental. É neste sentido que as tarefas de modelação oferecem a possibilidade de desenvolver o espírito crítico dos alunos, preparando-os para serem agentes ativos e críticos na sociedade atual.

Um outro ciclo de modelação (Figura 3) de Ferri (2006) sugere que se comece com uma construção real da situação, de modo que o aluno consiga de imediato e com o conhecimento extra matemático que possui estabelecer uma conexão com a realidade.

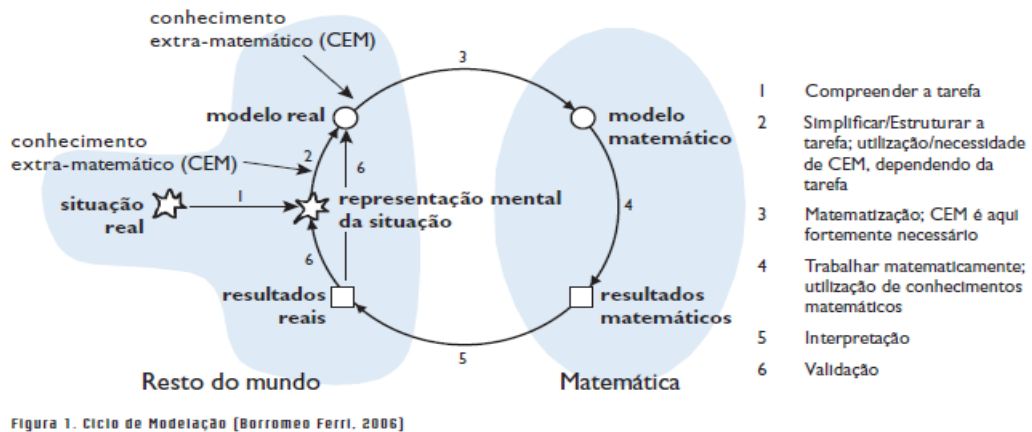


Figura 3: Ciclo de modelação de Ferri (2006)

Segundo Ferri (2006), a primeira fase começa com uma situação real, sendo importante que haja uma construção da representação real, por exemplo foto, de modo a captar a atenção do aluno e a possibilitar a conexão imediata com o mundo real. A

segunda fase passa pela construção do modelo real. Os alunos ao compreenderem a situação real, são eles próprios que criam as suas próprias associações no que respeita aos elementos da realidade apresentados, tendo em conta o conhecimento extra matemático que possuem. A um nível muito inconsciente eles começam a construir o chamado modelo real. A partir do modelo real, entramos na terceira fase do ciclo, a construção do modelo matemático. Os alunos mobilizam fortemente o seu conhecimento extra matemático e transformam o modelo real em algo matemático, passando das ideias e palavras para uma linguagem matemática. A seguir, os alunos irão trabalhar matematicamente, quarta fase do ciclo de modelação. Aplicando conhecimentos matemáticos, os alunos trabalham com o modelo obtido e chegam a resultados matemáticos. Ao obterem resultados os alunos terão que interpretá-los (quinta fase do ciclo de modelação), tendo em conta a situação real e a seguir terão que validar o modelo (sexta fase do ciclo de modelação), que consiste na comparação entre a matemática e a realidade.

Ao comparar os três ciclos de modelação, o modelo de Lesh é um refinamento do modelo de Kerr e Maki, já justificado anteriormente. O modelo de Lesh é o que se salienta por ser o mais “diferente”, pelo menor número de fases e pela abrangência. Numa primeira leitura poderá levar a que o leitor o ache “simplista”, o que na realidade não é, pois prevê três fases importantes: a descrição, a prescrição e a previsão, já discutidas anteriormente por Carreira (1995). Em Lesh, tal como em Ferri, existem dois mundos paralelos, o real e o mundo matematizado, onde se manipulam dados e a partir do qual se fazem previsões para o mundo real. O modelo de Ferri alerta para a necessidade de construir uma tarefa que permita uma construção real da situação e representativa para os alunos. É o único modelo que enfatiza esse aspeto. Este modelo é o único que se preocupa com critérios a ter em conta na construção de tarefas de modelação e os vários tipos de modelação que poderão existir e o único modelo a dar ênfase à importância do conhecimento extra matemático e à representação mental da situação proposta. Os ciclos de Kerr e Maki e de Ferri são semelhantes no percurso do processo de modelação, embora o de Ferri pareça mais completo (pois traduz a diferença entre o real e o real tal como nos vemos/interpretamos), referindo-se ao conhecimento extra matemático, o que nos leva a interpretar que este tipo de conhecimento é essencial para a construção do modelo real e consequentemente do modelo matemático. E será esse conhecimento que permitirá validar o modelo matemático a partir

da testagem desse mesmo modelo e seu refinamento ou não consoante a interpretação dos resultados obtidos e sua adequação à situação real.

Modelação no ensino da Matemática

Finalidades da modelação no ensino da Matemática

Cada vez mais se dá importância ao trabalho com modelação matemática no ensino da Matemática. Os vários programas enfatizam a implementação de tarefas de modelação matemática. Nas "Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar" do NCTM (1991) recomenda-se que todos os alunos: “apliquem o processo de modelação matemática a situações problemáticas do mundo real” (p. 163).

Ainda antes de aparecerem os *Principles and Standards for School Mathematics* elaborados pelo NCTM, Griffiths e Howson (1974) (referidos em Matos & Carreira, 1994b), também indicavam várias razões para a integração curricular da modelação e aplicações matemáticas, de entre as quais se destaca, digamos, uma razão social: “preparação dos alunos para uma melhor inserção na sociedade” (Matos & Carreira, 1994b, p. 11).

Nesta perspectiva, que em certos aspetos coincide com o NCTM, o cidadão deveria ter a capacidade de criticar modelos e processos matemáticos, de desmontar exemplos de matemática aplicados a fenómenos reais e de questionar o uso de modelos matemáticos na sociedade na qual está envolvido (Carreira, 1995). Por outro lado, as exigências de formação profissional dos indivíduos e um mercado de trabalho em constantes mutações constituem também motivos para a inclusão de aplicações da matemática no ensino da disciplina (Carreira, 1992). Para além desta razão social para a inclusão das tarefas de modelação no currículo, Griffiths e Howson (1974) apontaram outras quatro: (a) como elemento motivador; (b) como componentes culturais; (c) Como forma de evitar aprendizagens incorretas; (d) Como forma de reconhecimento de estruturas na presença de *ruído*. Quanto ao elemento motivador apontado por Griffiths e Howson (1974), também Pires (2001) afirma que a modelação matemática se revela uma forma eficaz para motivar os alunos e despertar o interesse dos mesmos pela disciplina. Carreira (1992), por seu lado, menciona que a modelação matemática é do agrado dos alunos, evidenciando-se uma maior motivação nestes para com a disciplina. Partilhando a ideia de Griffiths e

Howson (1974), Carreira (1992) refere-se às tarefas de modelação como uma mais-valia para evitar aprendizagens incorretas, dando um exemplo: por vezes, os alunos usam a matemática nas aulas de Física sem terem adquirido as noções corretas, valorizando a memorização de fórmulas que não são compreendidas. Se estes alunos trabalharem a Matemática envolvida nos tópicos de física nas aulas de Matemática, podem vir a compreendê-la verdadeiramente. O sucesso desta solução depende de uma cooperação entre as duas disciplinas. Por fim e tendo em conta a última razão apontada Griffiths e Howson (1974), podemos adiantar que o recurso às tarefas de modelação pode ajudar os alunos a reconhecerem estruturas, conceitos e regras matemáticas em diversos contextos extra matemáticos. Segundo estes autores, neste sentido as propostas pedagógicas deverão incorporar a construção de modelos matemáticos concretos da física, da química e da própria matemática onde se reconheçam uma determinada estrutura matemática.

Niss (1992) também apresenta algumas justificações para que a modelação matemática seja integrada na escola e no currículo: (a) uma delas é que a Matemática tornou-se uma disciplina para todos e porque a competência matemática tem adquirido uma extrema e crescente importância para um grande número de profissões, assim como a preparação de jovens para as constantes mudanças da sociedade; (b) para que os alunos perante situações do mundo real consigam usar matemática não é suficiente saber-se apenas matemática pura; (c) serve de motivação e apoio para a aquisição e compreensão, pelos estudantes, métodos e resultados matemáticos; (d) a modelação matemática permite tornar visível o significado da Matemática para compreender o mundo, criando situações autênticas. Uma dificuldade apontada tem a ver com a autenticidade das situações a modelar; se as situações não forem autênticas, isto é, não representarem situações do mundo real, os alunos poderão pensar que estas são um jogo e afinal a matemática escolar não terá poder suficiente para enfrentar situações e problemas da realidade concretas, assumindo aos olhos dos alunos, um papel inútil.

Para Swetz (1992) existem razões para que se integre modelação matemática na escola: (a) permite preparar jovens para atuarem de forma conhecedora e confiante em situações problemáticas do mundo real; (b) coloca em ação uma variedade de competências matemáticas e força a atenção sobre o problema como um todo, e não sobre uma solução única; (c) a modelação permite a compreensão do fenómeno e adquire uma natureza ativa e dinâmica em vez de estática e passiva. Quem constrói o modelo experimenta uma sensação de participação e controlo no processo de solução; (d) permite

a manipulação de vários parâmetros e variáveis; (e) a modelação ajuda a exteriorizar a dinâmica que é inerente a muitas situações problemáticas; (f) os alunos podem apreciar melhor certos conceitos como as limitações de um dado processo e a sua maximização; (g) a modelação permite uma melhor perceção do poder da matemática e (h) pode permitir a introdução de novos conceitos. Este autor ideia também já referida por Niss, menciona uma dificuldade inerente à modelação matemática em sala de aula, se esta não for integrada e contextualizada: a separação e o isolamento da modelação matemática em relação ao resto do currículo tende a levantar nos alunos a suspeita de estarem perante algo estranho ou difícil.

Também Swetz e Hartzler (1991) referem que a modelação matemática deve ser incluída no ensino da disciplina por focar uma grande variedade de capacidades e competências matemáticas e cognitivas de ordem superior, na procura da solução para uma questão e por proporcionar aos alunos uma ampla visão de aplicações matemáticas no mundo real. No entanto, o mundo real onde são contextualizados os problemas e tarefas deve ter significado para os alunos, pois a Matemática útil é aquela que os alunos conseguem aplicar em coisas do seu interesse (Lesh, 1979).

Fuller (2001) refere que a modelação matemática, ao incidir sobre suposições e a formulação de hipóteses, a definição de variáveis e a aplicação matemática a problemas úteis e interessantes para os alunos e o mundo que os rodeia, pode tornar a matemática mais apelativa (ideia defendida por Niss (1992)), reforçando assim o argumento da modelação enquanto elemento motivador. Deste modo, se existe interesse e motivação e se os alunos dispõem de recursos para explorar e investigar os aspetos de um mesmo problema, então os conteúdos terão hipóteses de ser melhor consolidados e aprendidos.

Carreira (1992) aponta duas linhas de orientação dos argumentos para a inclusão das tarefas de modelação no currículo: uma corrente pragmática, a qual, por um lado, deseja uma mudança nos conteúdos a serem ensinados que devem ser aplicáveis a situações da vida real assim como a outras ciências e, por outro, pretende a introdução de momentos destinados ao treino da aplicação de métodos matemáticos para a resolução de problemas reais; uma corrente científica humanista, que se preocupa mais em contextualizar o ensino da Matemática e em oferecer uma visão adequada da disciplina enquanto ciência. Neste sentido, as maiores preocupações residem na forma de introduzir e explorar os conceitos matemáticos.

Doerr e English (2003), baseando as suas conclusões numa investigação na qual propuseram aos alunos tarefas de modelação matemática no âmbito da Estatística, também apresentam um conjunto de contribuições e implicações deste tipo de tarefas no ensino da matemática. Entre essas contribuições, estes autores destacam que os alunos podem desenvolver, de forma independente do professor, ideias matemáticas verdadeiramente importantes. Afirmam também que, durante a resolução destas tarefas, os alunos desenvolvem capacidades de comunicação e de partilha de ideias e, como tal, desenvolvem o espírito de tolerância e de respeito pelos colegas. Uma outra contribuição que estes autores destacam é que este tipo de tarefa permite diferentes abordagens e resoluções de problemas experimentais da vida real. Ao nível das implicações das tarefas de modelação para o ensino, os autores evidenciam sobretudo três. A primeira prende-se com o facto de que enquanto os alunos desenvolvem estas tarefas reveem e redefinem as suas formas de raciocínio e expandem a própria forma de pensar sobre o problema. Uma outra implicação relaciona-se com o facto de que as diferentes formas de abordagens dos problemas dão aos alunos, assim como aos professores, oportunidades de ver e compreender interpretações e visões alternativas do problema. A terceira implicação a que se referem estes autores é a mais centrada no professor, uma vez que nela é expressa a ideia de que a categorização do raciocínio dos alunos será bastante útil para que o professor elabore um esquema de forma a reconhecer quais as possíveis abordagens que os alunos farão às diversas tarefas.

Podemos afirmar que são as tarefas de modelação, que levam a que os alunos aprendam a conjecturar, a experimentar diversas abordagens para resolver problemas, construir argumentos matemáticos (NCTM, 2000) e a aplicar conceitos e processos matemáticos para resolver situações relacionadas com a realidade. Estas tarefas devem ser desenvolvidas em sala de aula em ambientes adequados, os quais são criados, em grande parte, pelos professores. A aprendizagem dos alunos, quando lhes é proposta uma tarefa de aplicação ou modelação matemática, é muitas vezes mais eficaz do que esperar que aprendam um método ensinado pelo professor, pois são eles a descobrir a forma de resolverem uma dada questão e não apenas a aplicar um procedimento rotineiro (Ponte, 2004). A modelação surge como uma orientação metodológica em documentos internacionais e nacionais, sendo entendida por alguns autores (Blum & Ferri, 2009; Kaiser, Blum, Ferri & Stillman, 2011) como uma forma de promover uma mudança no ensino da Matemática, promovendo o trabalho interdisciplinar.

As tarefas de modelação

Na sua prática de ensino, um professor pode propor diversas tarefas aos seus alunos. Ponte (2005) aponta variadas hipóteses: problemas, exercícios, tarefas de investigação, projetos e tarefas de modelação. Mas o que são tarefas de modelação? Quais os critérios a ter em conta na elaboração/criação de uma tarefa de modelação? As tarefas de modelação poderão partir de situações reais e conhecidas pelo aluno ou então de situações que possibilitem a mobilização do conhecimento extra matemático do aluno no reconhecimento dessas situações como significativas para ele. O que se deve ter em conta, primeiramente, na criação de uma tarefa de modelação é o contexto (Matos & Carreira, 1994b), o partir de situações reais e significativas para o aluno, indo ao encontro do seu interesse. Estas tarefas requerem a construção de um modelo matemático e exigem a formulação de questões pertinentes acerca da situação, bem como a seleção dos fatores considerados mais relevantes nessa situação, a identificação das variáveis que lhe estão associadas, a experimentação e a análise da adequação do modelo matemático à situação. As tarefas de modelação consoante o grau de estruturação poderão aproximar-se da resolução de problemas ou de investigações. Lesh e Yoon (2007) definem tarefas geradoras de modelos matemáticos (*modeleliciting activities*) como resolução de problemas dos quais se extraem modelos matemáticos, mas que requer dos alunos a explicitação dos seus raciocínios de modo a testá-los e refiná-los várias vezes, se necessário. As soluções e conclusões finais da atividade matemática baseada em tarefas geradoras de modelos matemáticos envolvem, obviamente, o modelo matemático criado e, também, todo o processo desenvolvido e inerente à sua construção, que inclui os sistemas de conceitos que esse modelo possa envolver. Lesh e Yoon (2007) apresentam os princípios que consideram fundamentais ter em conta na conceção de tarefas geradoras de modelos matemáticos:

- (i) Devem permitir aos alunos envolverem-se no problema de modo que sintam a necessidade de rever ou aperfeiçoar as suas formas atuais de pensamento sobre a situação/problema;
- (ii) Devem fazer com que os alunos se sintam desafiados e motivados a expressar o seu conhecimento atual sobre o problema, de modo que eles mesmos o possam testar e rever várias vezes;
- (iii) Devem impelir os alunos a partilhar, com os seus pares, as ferramentas conceptuais que constroem e, também, a reutilizá-las noutros contextos, além da situação específica em que as construíram (p.163).

Kaiser e Maaß (2007) referem que a resolução de problemas de modelação matemática promove um maior enriquecimento da educação matemática porque toda a

atividade matemática dos alunos, decorrente destes problemas, é diversificada e por isso mais rica, no sentido em que se relacionam e interagem na sala de aula com uma diversidade de conhecimentos, não só matemáticos, como também sociais, ou baseados nas vivências e crenças dos alunos. O equilíbrio entre uma formulação mais aberta do enunciado da tarefa e a necessidade, por parte dos alunos, de simplificá-la, dentro da complexidade do mundo real, permite desenvolver na sala de aula discussões ricas acerca da resolução do problema e do estabelecimento de relações a partir das diferentes atividades matemáticas dos alunos, de acordo com as suas capacidades e perspetivas.

As tarefas de modelação poderão ter várias “entradas”: poderá ser dado à partida o modelo matemático; não ser dado o modelo matemático e este ser construído a partir de dados fornecidos ou mesmo serem os próprios alunos a recolher os dados reais e a partir desses construir o modelo matemático que melhor se ajuste a esse conjunto de dados. A decisão quanto ao grau de estruturação da tarefa de modelação cabe ao professor e deve ter em conta os objetivos dessa tarefa, o contexto, os alunos em questão, os conteúdos matemáticos e o ciclo de modelação. Como já foi referido é crucial o contexto, pois é importante que os alunos reconheçam nesse, algo motivador, conhecido e de utilidade e que consigam mobilizar o conhecimento extra matemático (Ferri, 2006) na construção do modelo para a sala de aula e identifiquem as variáveis que terão que manipular de modo a que consigam testar esse modelo e reajustá-lo caso seja necessário.

Modelação em Estatística

Educação estatística

A Estatística tem vindo a ganhar importância na sociedade e em várias áreas profissionais, o que leva a suscitar interesse por parte dos investigadores em educação matemática. A forma como surge diariamente na comunicação social e em estudos para o governo e empresas, leva a que a interpretação dos dados estatísticos e a forma como são apresentados (gráficos, tabelas) não sejam apenas para estatísticos, mas sim para o cidadão comum. Steen (2002) refere que a Estatística é uma das áreas que está mais presente no dia-a-dia do cidadão comum. Ser um cidadão “literado” e informado, numa sociedade exposta a uma grande quantidade de informação estatística, requer a capacidade de interpretar e avaliar criticamente os dados que aparecem no dia-a-dia e de

comunicar e tomar decisões informadas por eles (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Gal, 2002). Este nível de literacia leva tempo a desenvolver, justificando a integração da Estatística nos currículos de muitos países, desde os níveis de ensino mais elementares. No entanto, o aumento do tempo dedicado ao ensino não é, só por si, suficiente para preparar cidadãos estatisticamente letrados, é necessário desenvolver, também, o seu raciocínio estatístico que está fortemente associado à tomada de decisões em condições de incerteza (Batanero, Burrill & Reading, 2011; Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2011). Tem havido progressos relativamente à educação estatística, uma vez que se tem seguido as recomendações de outros países, relativamente às orientações curriculares, aparecendo mais enfatizada em Portugal, no programa de Matemática às Ciências Sociais e do ensino secundário profissional. No entanto, o ensino da Estatística ainda é, de um modo geral, realização de cálculos, construção de gráficos e estudo de medidas estatísticas, não dando a oportunidade aos alunos de se envolverem em todo o processo estatístico, surgindo dificuldades em usar a Estatística adequadamente como ferramenta útil na resolução de problemas do quotidiano, tanto a nível escolar como pessoal. As mudanças preconizadas para o ensino da Estatística, não dizem só respeito ao conteúdo, mas também à forma como se ensina (Batanero, Burrill & Reading, 2011). Hoje em dia, defende-se um papel mais ativo e aprofundado no ensino da Estatística e esperam-se novas abordagens no seu ensino e aprendizagem, mais holísticas e orientadas para os dados e para o desenvolvimento estatístico dos alunos, valorizando as investigações em contextos reais, tirando partido da riqueza dos dados e da tecnologia (Ben-Zvi & Garfield, 2010; Henriques & Oliveira, 2012). Tendo em conta as novas abordagens para o ensino e aprendizagem da Estatística, relativamente à realização de investigações estatísticas, discutidas por Wild & Pfannkuch (1999), estas são reconhecidas como um processo inferencial, envolvendo os alunos que as realizam na generalização a outros contextos das conclusões retiradas a partir dos dados em análise. A investigação recente usa a expressão “inferência estatística informal” para designar o trabalho dos alunos como formas de inferência estatística, desde que começam a colocar questões sobre o conjunto de dados e a estabelecer relações, passando pela operacionalização da recolha de dados até ao momento em que se confrontam com a inferência formal (Watson, 2008). Makar, Bakken & Ben-Zvi (2011) explicam que a palavra informal é usada para: (i) tornar claro que a inferência estatística é um conceito alargado e não se restringe à estimação ou aos típicos testes de hipóteses formais; e (ii) destacar que não se espera que os alunos se apoiem em medidas estatísticas e procedimentos formais para formular as suas inferências. A

inferência estatística deve ser ensinada aos alunos a partir de contextos ricos, permitindo tirar conclusões úteis e interessantes em contexto sobre os dados.

À medida que a sociedade valoriza a análise de dados e a capacidade de raciocinar sobre eles e de usá-los de modo efetivo e crítico na tomada de decisões, contrastando com as práticas habituais de aplicação de fórmulas que requerem cálculos morosos e repetitivos e sem significado para os alunos, a Estatística tem ganho destaque nos documentos curriculares, tanto nacionais como internacionais (GAISE, 2005; ME, 2007; NCTM, 2007).

A preocupação com a forma como se ensina e aprende Estatística deu origem à educação estatística. Isso ocorreu, em parte, devido às contribuições que esta apresenta perante as grandes transformações tecnológicas e científicas da sociedade moderna. A forma como as tabelas e gráficos aparecem nos meios de comunicação social leva a que o cidadão comum deva possuir a capacidade de interpretar essa informação, ou seja possua alfabetização matemática. Campos (2007) assegura que, nessa linha de investigação, apesar do objeto de estudo ser a estatística, o foco é a educação e daí se origina a conjugação educação estatística. Wodewotzki e Jacobini (2004) afirmam que a educação estatística se trata de:

Um processo que favorece a contextualização das informações e oferece oportunidades relevantes para reflexões e para críticas, sobretudo quando se trata de informações de ordem social. (p. 233)

Uma educação estatística crítica requer do professor uma atitude de respeito face ao conhecimento extra matemático que o aluno possui e transpõe para a escola.

O trabalho com a Estatística torna-se relevante ao possibilitar ao aluno, desenvolver a capacidade de recolher, organizar, interpretar e comparar dados para obter e fundamentar conclusões, que é a grande base do desempenho de uma atitude científica, que tanto é referida nos programas de Matemática. Esses temas são essenciais na educação para a cidadania, uma vez que possibilitam o desenvolvimento de uma análise crítica sob diferentes aspetos científicos, tecnológicos e/ou sociais. A aprendizagem da Estatística poderá ser mais significativa para a formação de futuros cidadãos desde que o professor não se limite a ensinar algoritmos e a repetir cálculos, mas que valorize outras competências e recorra a informações e dados reais do contexto dos alunos e possam ir ao encontro das suas expectativas. Como Steen (2002) refere:

Os cidadãos quantitativamente letrados precisam de saber mais do que fórmulas e equações. Necessitam de uma predisposição para observarem o mundo através de olhos matematicamente críticos, para se aperceberem dos benefícios (e riscos) da aplicação do pensamento quantitativo nos assuntos quotidianos e para abordarem problemas complexos com confiança no valor do raciocínio ponderado. A literacia quantitativa confere às pessoas o poder de pensarem por si próprias, de colocarem questões inteligentes e de confrontarem as autoridades com confiança. Estas são as competências necessárias para singrarem no mundo moderno. (Steen, 2002, p.80)

Para este autor, a Estatística permite desenvolver o conceito de cidadania, ao promover uma reflexão para quem a compreende sobre praticamente todos os grandes assuntos de interesse público. Também Gal e Garfield (1997) referem que a Estatística possibilita aos alunos a compreensão e o saber lidar com a incerteza, variabilidade e informação estatística existente no dia-a-dia e, desta forma, contribuírem para a produção, interpretação e comunicação de dados de problemas com que se deparam na sua vida profissional.

Para além de promover a cidadania, Steen (2002) menciona que a Estatística intervém em outras áreas como: cultura, educação, profissões, finanças, saúde e trabalho. Na cultura, porque o homem deve entender o papel da matemática na vida; relacionar a história da matemática com o desenvolvimento da cultura e da sociedade; compreender que as conjecturas influenciam o comportamento dos modelos matemáticos e saber como utilizá-los para tomar decisões. A Estatística é de relevo para a educação porque muitas são as áreas científicas que necessitam da Estatística, por exemplo: a biologia, a medicina e as ciências sociais. Nas profissões, a Estatística desempenha um papel importante porque à medida que a interpretação de dados se tem tornado cada vez mais relevante em decisões que afetam a vida das pessoas espera-se que os profissionais de praticamente todas as áreas sejam capazes de usar ferramentas quantitativas. Neste contexto e tendo em conta as mudanças sucessivas e necessidades da sociedade e do mundo, a escola tem o papel importante de preparar os alunos para esse mundo em constante mudança. A Estatística assume deste modo um papel preponderante nessa preparação porque proporciona ferramentas metodológicas gerais para analisar a variabilidade (Gal & Garfield, 1997), determinar relações entre variáveis, desenhar as suas próprias experiências e tomar decisões em situações de incerteza (Batanero & Diaz, 2004).

Os avanços na tecnologia e a crescente facilidade de acesso a dados reais, fornecem aos professores novas ferramentas para adotar abordagens informais orientadas

para os dados, usando contextos ricos e significativos para os alunos, como os proporcionados pelas investigações estatísticas (Ben-Zvi *et. al.*, 2012) e porque não, também a modelação. Os múltiplos recursos tecnológicos hoje disponíveis têm sido incorporados na educação estatística de modos diversificados, em particular como instrumento de apoio aos alunos na exploração e análise de dados, na resolução de problemas estatísticos envolvendo dados reais e na compreensão de conceitos complexos e ideias estatísticas, com o objetivo de desenvolver o seu raciocínio estatístico (Ben-Zvi, 2006; Ben-Zvi & Garfield, 2004).

Assim sendo, é necessário que a escola prepare os alunos para que consigam pensar e refletir sobre a sociedade que os rodeia de forma crítica e ativa.

A Estatística como ferramenta na modelação matemática

A Estatística é uma ciência que se dedica à recolha, análise e interpretação de dados. Preocupa-se com os métodos de recolha, organização, resumo, apresentação e interpretação dos dados, assim como tirar conclusões sobre as características desses mesmos dados, para melhor compreender as situações.

Através do desenvolvimento do raciocínio estatístico é possível organizar e analisar melhor as informações recolhidas, possibilitando a compreensão de sua estrutura e interpretações adequadas (Wodewotzki & Jacobini, 2005).

Apesar da importância da Estatística no ensino da Matemática apontada por vários autores e a sociedade em geral, existem dificuldades inerentes ao ensino da Estatística. Os professores têm eles próprios que saber problematizar uma situação, organizar, tratar, interpretar os dados e conseguir saber se estes são ou não adequados (Batanero *et al.*, 2004). Isto está de acordo com as quatro etapas inerentes a uma investigação estatística apontadas por Franklin *et. al.*, (2007). Outros autores como Kader e Perry (1994) ainda destacam uma quinta fase que passa pela comunicação de resultados obtidos, importantíssima quando se realiza com os alunos tarefas de modelação matemática. Para outros autores, Wild e Pfannkuch (1999) existem quatro dimensões que dividem o pensamento estatístico: (1) ciclo investigativo; (2) tipos de pensamento; (3) ciclo interrogativo e (4) disposições (Figura 4).

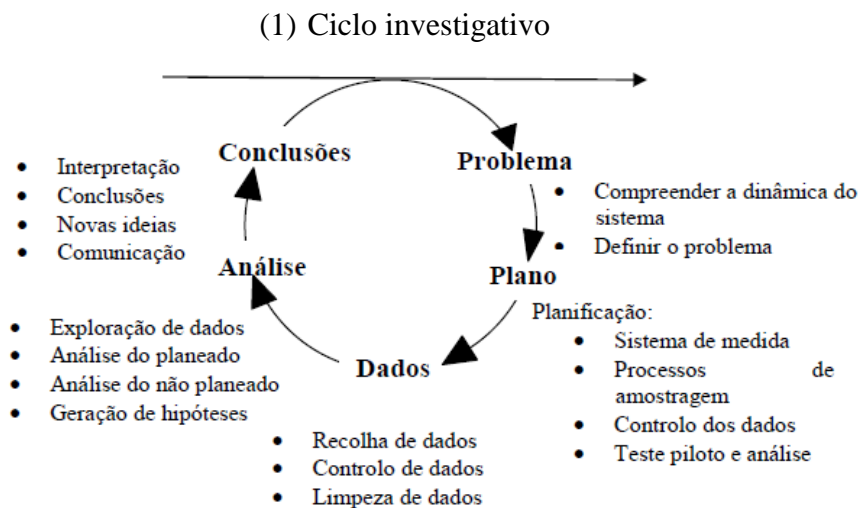


Figura 4: A primeira dimensão do pensamento estatístico: ciclo investigativo (Wild & Pfannkuch, 1999)

Segundo Shaughnessy (2007), esta é primeira fase dos inquéritos estatísticos, cujas fases coincidem com as apresentadas por Pólya (1945) para a resolução de problemas: compreender, planificar, executar e revisão do problema. No entanto, este autor refere que em Estatística, de um modo geral, não é concedido muito tempo à fase da problematização e da planificação, uma vez que quando aos alunos são apresentadas tarefas, nestas já aparece a problematização da situação e a recolha de dados, o que empobrece o ciclo investigativo. A formulação do problema de investigação estatística, como indicam Makar e Fielding-Wells (2010) constitui a base fundamental para o trabalho a realizar. Na sua perspetiva, as questões iniciais devem motivar os alunos, estar relacionadas com os seus interesses e serem desafiantes, e não causem frustrações ao nível da sua resolução. Heaton e Mickelson (2002) acrescentam que as questões devem ser abertas, estatisticamente ricas, com conteúdo apropriado aos alunos e relacionadas com outras áreas do currículo e do saber, referindo, que por vezes, esta fase é muitas vezes desvalorizada. No caso da modelação matemática e nesta investigação em particular o ciclo investigativo é mais rico, porque os alunos tiveram a oportunidade de serem eles, com base nas suas motivações e contextos profissionais fazerem conjecturas e formularem eles próprios problemas de situações por eles conhecidas e que quisessem ver estudadas. Neste sentido, a recolha de dados teve por base a organização de eventos e de atividades contextualizadas ao curso profissional em questão e foram eles próprios que se envolveram na operacionalização da recolha de dados e que foram posteriormente trabalhados em contexto de sala de aula. Deste modo, o ciclo investigativo do pensamento

estatístico proposto por este autor pode ser trabalhado de forma mais rica e adequa-se perfeitamente ao que se pretende em modelação matemática.

Durante o planeamento da investigação estatística, cabe aos professores ajudar os alunos a tomar decisões metodológicas, que podem passar por, usar população em vez de amostras (Makar & Fielding-Wells, 2011). Contudo, esta fase também é frequentemente desvalorizada em sala de aula, não proporcionando aos alunos ferramentas para resolver problemas estatísticos na sua fase inicial (Shaughnessy, 2007). Outros autores, Heaton e Mickelson (2002) defendem que os professores devem responsabilizar os alunos por esta fase de planeamento.

A segunda fase do pensamento estatístico: Tipos de pensamento (Wild & Pfannkuch, 1999)

(2) Tipos fundamentais do conhecimento estatístico:

- Reconhecimento da necessidade dos dados
- Transnumeração (mudança de representações para proporcionar compreensão)
 - Recolha de medidas do sistema real
 - Mudança de representações de dados
 - Comunicação de mensagens nos dados
- Consideração da variação
 - Perceber e reconhecer
 - Medir e modelar para o propósito de prever, explicar ou controlar
 - Explicar e lidar com estratégias investigativas
- Raciocinar com modelos estatísticos
 - Raciocínio baseado em agregados
- Integração da estatística e do contexto
 - Conhecimento, informação e conceções

Tipos gerais:

- Estratégico
 - Planear, antecipar problemas
 - Ter em atenção restrições práticas

Procurar explicações

- Modelar

Construção seguida de utilização

- Aplicar técnicas

Seguir precedentes

Reconhecer e utilizar exemplos-tipo

Usar instrumentos de resolução de problemas

Para Shaughnessy (2007), o pensamento estatístico implica não só pensamento intrínseco não só à Estatística como também associado a pensamentos mais gerais e estratégicos, tal como a heurística de Pólya propõe.

A necessidade dos dados e o reconhecimento destes é a base do raciocínio estatístico e do seu pensamento, pois quando esta vertente é focada e porque o estudo inicia-se com um problema que se pretende resolver e interpretar, sendo imprescindível a recolha de dados para o problema em estudo (Burgess, 2007). Para a modelação matemática e neste estudo em particular, esta fase revela-se de extrema importância uma vez que os problemas surgem da necessidade dos alunos compreenderem o real e das situações inerentes à sua futura profissão, sendo necessário a recolha de dados reais e reconhecida a importância dessa mesma necessidade.

A transnumeração consiste na capacidade de se ordenar os dados, criar tabelas ou gráficos e deste modo encontrar a medida de localização que melhor se adapte aos dados, isto é, mudar a representação dos dados de modo a que esta faça sentido (Wild & Pfannkuch, 1999).

A variação afeta a tomada de decisões tendo em conta os dados, pois temos que compreender que os dados variam (Burgess, 2007). Na modelação matemática e uma vez que partimos da realidade, ao recolher os dados reais temos que perceber que os resultados que iremos obter a partir dos dados serão comparados a essa realidade e não a outra, não podendo avançar com generalizações.

O raciocínio com modelos, segundo Burgess (2007), é a fase necessária para dar sentido aos dados, incluindo tabelas, gráficos e medidas. Na modelação matemática em Estatística esta fase está presente, pois após a recolha dos alunos e do estabelecimento de conjecturas e hipóteses, é necessário organizar os dados em tabelas e gráficos, permitindo

posteriormente e na fase seguinte do ciclo de modelação à construção do modelo matemático.

Por último, a fase da integração da estatística e do contexto, corresponde à relação existente entre o conhecimento do contexto (no caso da modelação matemática, do conhecimento extra matemático) com o conhecimento estatístico, relacionando os dados da situação com os dados obtidos (Wild & Pfannkuch, 1999). Esta fase na modelação matemática corresponde à fase da interpretação dos resultados matemáticos, no caso deste projeto, resultados estatísticos com a situação real.

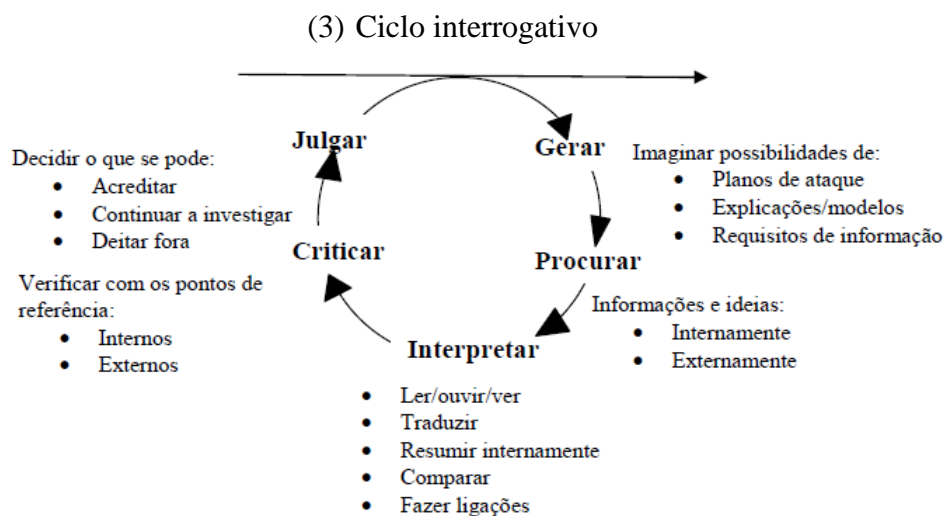


Figura 5: A terceira dimensão do pensamento estatístico: o ciclo interrogativo (Wild & Pfannkuch, 1999)

Wild e Pfannkuch (1999) referem que o ciclo interrogativo está associado a dados recolhidos a partir de atividades que permitam gerá-los, procurar informação, criticar os resultados e validar ou não, revelando-se uma dimensão interessante para a modelação matemática, dadas as suas fases sequenciais (Ferri, 2006). Nesta fase de investigação estatística, para além de se recolher e controlar os dados, faz-se uma “limpeza” dos mesmos (Martins & Ponte, 2010; Wild & Pfannkuch, 1999). Segundo Makar e Fielding-Wells (2011), os professores com experiência na orientação do trabalho dos alunos facilmente reconhecem oportunidades para aprendizagens significativas durante a discussão entre estes, relativa a problemas surgidos a partir da recolha de dados.

Este ciclo interrogativo, na modelação matemática é importantíssimo porque ao chegarmos a resultados matemáticos e ao compará-los com a realidade temos que ter a

capacidade de nos interrogar acerca da sua adequabilidade à situação real e concluir se o modelo matemático construído e escolhido é válido ou não.

Quarta dimensão do pensamento estatístico (Wild & Pfannkuch, 1999)

(4) Disposições

- Ceticismo
- Imaginação
- Curiosidade e consciência
 - Observação e atenção
- Abertura
 - Ideias para alterar preconceitos
- Uma propensão de procurar um significado mais profundo
- Ser lógico
- Envolvimento
- Perseverança

Segundo Shaughnessy (2007), as disposições apontadas por Wild e Pfannkuch (1999), para se tentar resolver um problema é necessário ter curiosidade em estudá-los e encontrar soluções; ser cético, característica essencial para criticar os resultados e não os aceitar de imediato; ter imaginação; ser aberto a várias e possíveis interpretações e querer aprofundar o assunto, podendo haver a possibilidade de voltar atrás no ciclo se tal se justificar. Estas disposições são essenciais no ciclo de modelação matemática adotado neste estudo, pois é a curiosidade sobre situações profissionais e conjecturas que os alunos fazem, que levam à criação de modelos reais e modelos matemáticos e é o seu ceticismo e capacidade crítica que pode conduzir estes alunos a aceitarem ou não o modelo matemático ao confrontarem resultados matemáticos com a realidade.

Wodewotzki e Jacobini (2005) enfatizam que para a compreensão e construção do pensamento estatístico, o estudo não deve ser feito isoladamente; é importante que seja trabalhado com dados reais, relevantes para os estudantes e, principalmente, obtidos por eles mesmos. Esta ideia vai ao encontro do que se pretende para este estudo, pois o objetivo é ensinar tópicos de Estatística através da modelação matemática e que sejam os próprios alunos, a partir das suas motivações e necessidades, face ao curso profissional

em que estão integrados, a organizar atividades em contextos profissionais que levem à recolha de dados e ao surgimento de variáveis que possam levar ao estabelecimento de relações. Esta ideia é defendida por Burak (2004), pois segundo este autor, a modelação matemática vai ao encontro das expectativas do aluno, por dar sentido ao que ele estuda e por satisfazer esses interesses e motivações. O aluno passa a trabalhar com mais entusiasmo e perseverança, formando atitudes positivas face à Estatística e gosto por esta. O facto de relacionarmos a aprendizagem da Estatística com o contexto e motivações do aluno poderá ser um meio facilitador da aprendizagem.

O ensino e aprendizagem das distribuições bidimensionais

O conceito de covariação aparece na resolução de problemas do quotidiano e por isso faz parte dos currículos internacionais de vários países, surgindo em Portugal nos programas de Matemática do ensino secundário regular e profissional (ME, 2001a e 2001b) e mais recentemente no documento das metas curriculares para o 11.º ano de Matemática A (ME, 2013). Este conceito está relacionado com o raciocínio covariacional e é um dos aspetos fundamentais do pensamento estatístico, uma vez que envolve processos sobre o estabelecimento de relações entre variáveis, a representação gráfica dos dados bivariados permitindo a identificações de relações ou padrões e a justificação verbal sobre a covariação (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Várias investigações evidenciam alguma complexidade no ensino e aprendizagem das distribuições bidimensionais (Engel & Sedlmeier, 2011; Estepa & Batanero, 1996; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Mugabe, Fernandes & Correia, 2012). A compreensão da regressão e correlação exige conhecimento básico sobre funções e, acima de tudo, a consideração da variação à volta de uma possível tendência (Engel & Sedlmeier, 2011). Covariação, num sentido mais alargado, é uma correspondência entre variáveis cujos valores envolvem alguma forma de associação (Batanero, Estepa & Godino, 1997; Moritz, 2004; Zieffler & Garfield, 2009). A definição de covariação é frequentemente incluída na definição de associação, segundo Moritz (2004). A primeira é distinta desta porque o termo *associação estatística* pode referir-se a associações entre duas variáveis categóricas, usualmente representada em tabelas de dupla entrada (tabelas de contingência), e entre uma variável categórica e uma intervalar” (p. 228, itálico no original). Neste estudo, focamo-nos na covariação estatística, frequentemente designada também por correlação, que se refere à correspondência entre duas variáveis estatísticas

numéricas e que é reconhecida como um importante aspeto do raciocínio estatístico (Fitzallen, 2012; Moritz, 2004).

O ensino deste tópico, em Portugal, é remetido para o ensino secundário, com objetivos muito semelhantes presentes nas orientações curriculares de outros países (Franklin *et. al.*, 2005; NCTM, 2007). Em Portugal, começa-se com um estudo de uma única variável, sendo feita uma abordagem intuitiva e gráfica relativamente ao estudo das distribuições bidimensionais. Os conteúdos abordados são: representação gráfica de um conjunto de dados bivariados (diagrama de dispersão ou nuvem de pontos), cálculo (recurso à tecnologia) e interpretação do valor do coeficiente de correlação linear como medida indicadora do grau de intensidade da associação linear entre duas variáveis, construção da reta de regressão linear e a sua interpretação como uma forma de modelar os dados, previsão de resultados para uma variável conhecido o valor da outra (ME, 2001a, 2001b). A maior parte dos estudos referem-se às dificuldades dos alunos e não às dificuldades dos professores. Quanto aos alunos, muitos conceitos carecem de atenção por parte dos professores quando os vão ensinar. A distinção entre “associação” e “causa-efeito” não é referida nos programas portugueses, mas é destacada nos objetivos internacionais de aprendizagem das orientações curriculares internacionais (Franklin *et. al.*, 2005), dada a dificuldade cognitiva que lhe está subjacente. A autora Martins (2005) para explicar que nem sempre à associação entre variáveis está implícita uma “causa-efeito” apresenta um estudo de Rossman (1996). Este autor realizou um estudo em 22 países, que aborda a relação possível entre o tempo médio de vida das pessoas e o número de aparelhos de televisão por pessoa, e onde exemplifica claramente a distinção entre “associação” e “causa-efeito”. O valor de coeficiente de correlação obtido entre as duas variáveis foi igual a -0.80, o que significava uma forte correlação negativa entre o tempo médio de vida e o número de pessoas por aparelho de TV, ou seja, quanto maior o número de pessoas por aparelho de TV, menor é o tempo médio de vida. Este é um exemplo, onde sobressai de forma clara, que não pode existir uma relação causa-efeito, pois diminuindo o número de pessoas por aparelho de TV, não aumentaria o tempo médio de vida. Existem outras variáveis não observadas relacionadas com o nível de vida da população e que provocam obviamente alterações nestas duas variáveis e que explicam a forte correlação verificada, denominadas por *variáveis perturbadoras* (Martins, 2005).

Outro aspeto no ensino das distribuições bidimensionais é a importância da representação gráfica dos dados bivariados. A sua análise é realizada a partir da

construção de diagramas de dispersão ou chamadas nuvem de pontos. Esta representação gráfica é fácil de usar e permite visualizar a existência de relação entre dois conjuntos de medições que variam ao longo de escalas numéricas, uma vez que os resumos numéricos de dados não são suficientes para captar todas as características da relação entre duas variáveis (Estepa, 2008). A representação dos dados a partir do diagrama de dispersão permite identificar padrões, tendências ou aglomerações nos dados que informam acerca do sentido e a intensidade da relação entre duas variáveis. Por vezes, os pontos tendem a agrupar-se em torno de uma linha reta cujo “aspecto” (positivo ou negativo) determina a relação (inversa ou direta) entre as duas variáveis. Pode haver casos em que a tendência dos pontos se alinhe segundo uma curva e não uma reta. Neste caso, o coeficiente de correlação linear não é uma boa medida de associação entre as duas variáveis. Antes de calcular o valor do coeficiente de correlação linear, recomenda-se que seja construída a representação gráfica dos dados bivariados, pois o coeficiente de correlação linear apenas mede a associação linear entre duas variáveis e não outra. Logo se a partir da construção do diagrama de dispersão verificar-se que a tendência dos pontos não é linear, não faz sentido calcular esse valor (Martins, 2005). Outra informação que o diagrama de dispersão pode fornecer, está relacionada com os denominados *outliers*. Estes pontos podem influenciar de forma significativa o valor do coeficiente de correlação linear e a reta do modelo de regressão linear (declive dessa reta). Nos dois exemplos dados relativamente ao cálculo do valor do coeficiente de correlação para uma associação não linear entre variáveis e existência de *outliers*, se a representação gráfica for feita, poderá conduzir a uma informação errada sobre a forma e intensidade da associação linear entre duas variáveis (Martins, 2005). De Veaux *et. al.*, (2004) apresentam regras básicas que devemos ter em conta na análise inicial de dados e que passa pela representação gráfica dos dados bivariados: (a) uma representação gráfica dos dados pode revelar informação acerca dos padrões e relações existentes e escondidas nos dados, informação esta que não é visível a partir dos dados originais ou tabelas; (b) um gráfico bem construído realça aspetos importantes da distribuição dos dados, isto é, pode informar acerca da associação linear ou não entre duas variáveis ou ainda, existência de *outliers*.

As estratégias usadas por alunos para avaliar a covariação a partir de situações representadas por diagramas de dispersão, foram identificadas por Estepa e Batanero (1996) como conceções erradas, nomeadamente: (a) conceção determinística: os alunos esperam que haja uma correspondência perfeita entre os valores da variável explicativa,

não admitindo exceções na relação entre as variáveis; (b) concepção local: os alunos tendem a usar apenas uma parte dos dados fornecidos e acreditam que é o tipo de associação de todo o conjunto de dados; (c) concepção causal: os alunos acreditam que a covariação pode ser atribuída a relações causais entre elas e (d) concepção unidirecional de associação: os alunos percebem a covariação apenas quando o sinal é positivo, considerando a relação inversa como independência (Estepa, 2008; Estepa & Batanero, 1995). Ben-Zvi e Arcavi (2001) identificaram dificuldades por parte dos alunos em lidar com a covariação negativa, isto porque são contraditórias às suas crenças prévias sobre a possível relação entre duas variáveis. Este fenómeno é designado por “correlação ilusória” (Chapman & Chapman, 1982) e tem origem na experiência e no contexto do aluno e é usado frequentemente na interpretação de dados e contextos que o rodeiam.

Modelação matemática no currículo

Os programas de Matemática contêm algumas orientações curriculares que apontam no sentido de dar ênfase à articulação entre a matemática e a realidade e à utilização das tecnologias de informação e comunicação. Há diferenças na implementação e na interpretação das aplicações e da modelação entre países e currículos. Destaquemos então o que existe em comum. Segundo Niss (1992), em primeiro lugar: estamos cada vez mais a dar formação matemática a um maior número de alunos, estando a promover, neste sentido, *a matemática para todos*. Isto acontece porque:

A competência matemática tem adquirido uma importância crescente para o exercício de um largo espectro de profissões e atividades e para a vida privada e social dos cidadãos numa sociedade em mudança, e consequentemente para a preparação das crianças e dos jovens para o trabalho e cidadania. A associação da matemática com estas finalidades manifesta-se através da aplicação da matemática a problemas e situações extra matemáticos o que ocorre por meio de modelos matemáticos e da modelação, refletindo-se no currículo. (Niss, 1992, p. 1)

A segunda razão enunciada por Niss (1992), para se incluírem aplicações e modelação no currículo, tem a ver com o facto de:

Se pretendermos a utilização eficiente, flexível e refletida da matemática em situações extra matemáticas não será suficiente sabermos matemática pura, mas sim, para conseguirmos analisar e praticar, competentemente, aplicações da matemática e construção de modelos em áreas exteriores à

matemática, é preciso que haja aprendizagem e consequentemente, ensino, numa relação dual; Em terceiro lugar e última razão: para trabalhar com modelação na matemática escolar é necessário “motivar e apoiar a aquisição e compreensão, pelos estudantes, de conceitos, métodos e resultados matemáticos. (...) as aplicações e a modelação são utilizadas como um veículo para se atingirem objetivos que podem não ter a ver com a substância das aplicações e da modelação. (Niss, 1992, p.1).

Segundo Niss (1992), estas três razões não enfatizam por si só de que modo se devem incluir as aplicações e a modelação matemática nos currículos. Segundo este autor, o papel que a Matemática desempenha no mundo, deve ser compreendida para os alunos. Tornar a matemática visível tem duas implicações:

(1) devemos demonstrar que a matemática desempenha de facto um papel essencial no mundo, incluindo a nossa sociedade, mostrando onde podemos encontrar matemática fora da própria disciplina; (2) devemos demonstrar as (ou algumas das) razões porque é a matemática capaz de desempenhar este papel, isto é, mostrar de que modo o poder externo da matemática está relacionado com as suas propriedades internas. (Niss, 1992, p.2)

Este autor defende que os alunos, de vez em quando, devem trabalhar com profundidade, todo o processo de modelação o qual inclui as seguintes componentes: (i) clarificar o objetivo de aplicar um modelo matemático ao contexto dado; (ii) especificar os aspetos a considerar e as questões a responder; (iii) realizar o processo de matematização, isto é, traduzir os elementos e relações importantes da situação extra matemática para um universo matemático, o que conduz a um modelo matemático; (iv) usar métodos e resultados matemáticos a fim de chegar às propriedades do modelo; (v) interpretar esses resultados comparando-os com a realidade; (vi) validar o modelo.

Blum (1995) aponta algumas razões, também defendidas por Niss (1992), quanto à inclusão da modelação matemática no currículo: motivação (se os alunos se aperceberem da aplicabilidade e utilidade da Matemática na sua vida futura sentir-se-ão mais motivados para a estudar); facilidade na aprendizagem (se os alunos conseguirem conectar as ideias matemáticas a outros assuntos ou áreas terão maior facilidade em aprendê-las); preparação para utilizar a Matemática em outras áreas (certamente os alunos desenvolvem a capacidade de aplicar a Matemática em diversas situações do seu quotidiano); desenvolvimento de habilidades gerais de exploração (os alunos desenvolverão capacidades investigativas) e compreensão do papel sócio cultural da Matemática (os alunos compreenderão o uso da Matemática nas práticas sociais).

Ponte (1992) defende que todo este ciclo de modelação deve ser realizado algumas vezes por ano e em grupo, permitindo que os alunos se apercebam da interligação entre os vários domínios da Matemática e do poder e limitações de cada um deles. Esta atividade por parte dos alunos é fundamental para que estes ganhem sensibilidade para os aspetos mais globais do processo de modelação, nomeadamente, conceção geral, avaliação e análise crítica dos modelos (Davis, 1988).

Segundo Ponte (1992) ser competente em matemática, não implica necessariamente ser competente na sua utilização em situações concretas. Trata-se de competências diferentes, que têm de ser igualmente tidas em consideração pelo currículo desta disciplina, já se verificando nas orientações oficiais dos novos programas de Matemática.

Os programas curriculares prescritos e, nomeadamente, o programa para o ensino profissional secundário, apresentam o tema da Estatística subdividido em vários tópicos que contêm as listas dos conteúdos que os professores devem trabalhar na sala de aula, muitas vezes encarados pelos professores como mais relevantes do que as tarefas utilizadas para os abordar. De facto, está claramente descrito no currículo prescrito que as tarefas de modelação e a ligação da matemática à realidade têm um papel fundamental na construção do conhecimento matemático: “no entanto, os programas têm problemas ao nível da gestão e, muitas vezes, as intenções não passam do papel” (Pires, 2002, p. 137).

Práticas escolares de modelação matemática

Cada vez mais e tendo em conta as exigências da sociedade, os professores devem ter maior consciência do papel da Matemática na sociedade, da importância de sensibilizar os alunos para esse papel, compreensão e crítica das aplicações matemáticas, e terem a intencionalidade de exercer uma prática que promova todos estes aspetos. Deste modo, deverão pensar em práticas pedagógicas, metodologias, materiais, tarefas e formas de usar os manuais que possam ir ao encontro da relação da Matemática com o exterior. Muitos professores ainda continuam com o ensino tradicional recorrendo a aulas expositivas e repetição de exercícios. Como alternativa a este paradigma, Bishop (2001) sugere abordagens diversas: trabalhos em pequenos grupos, que promovem a entreajuda e o progresso entre os alunos; trabalhos de projeto porque ajudam a perceber que existem

fortes relações entre a matemática e a sociedade; investigações matemáticas para promover a criatividade, trabalho exploratório e ideias matemáticas; e discussão em grande grupo ou debate.

Skovsmose (1992) propõe um conjunto de possíveis novas abordagens para a sala de aula, e considera que os professores não podem ficar limitados a uma única forma de ensinar, devendo recorrer a metodologias que mais se adequem aos objetivos de aprendizagem e aos alunos. Pretendendo uma aprendizagem da Matemática relacionada com a realidade social, política, económica e cultural da sociedade, e com objetivo de formar futuros cidadãos mais críticos, reflexivos, interventivos e participativos na vida democrática da sociedade, os cenários de investigação baseados em projetos e na modelação matemática parecem ser os que melhor contribuirão para se atingir aquele objetivo e promover uma aprendizagem rica em Matemática.

Para que a modelação favoreça a compreensão da relação entre Matemática e sociedade, terá que basear-se em situações problemáticas reais, atuais e com significado para o contexto de um determinado grupo de alunos, havendo concordância com Skovsmose (1994) quanto à possibilidade da modelação matemática estabelecer a ligação entre os conceitos matemáticos e a realidade empírica.

Através deste tipo de trabalho, o professor pode encorajar os seus alunos a argumentar, promover e orientar discussões ou debates em grande grupo, sensibilizar para a necessidade de se simplificar a escrita. As tentativas e o erro são considerados processos necessários e importantes para o trabalho, ajudando a conhecer e compreender as bases de certos algoritmos, estabelecendo relação entre a realidade da sociedade e a Matemática, promovendo a análise de resoluções diversificadas, incentivando os alunos a comunicarem os seus resultados perante a turma e estimulando a criatividade matemática.

A modelação constitui uma oportunidade para resolver problemas orientados em torno de um tema real que é proposto aos alunos. Estes terão de passar pelas diferentes fases do processo de modelação, tomando decisões e fazendo escolhas.

Para Matos e Santos (2002), as práticas escolares em Matemática têm de ser compreendidas e desenvolvidas em termos de pessoas em ação numa sociedade global que está em transformação, ideia que é partilhada por Popkewitz (2002). Os projetos e a

modelação, quando baseados em problemas e temas reais, parecem caminhar para essa prática escolar.

Perrenoud (2005) analisa as competências e conclui que saber analisar e assumir a complexidade é uma competência essencial dado que, se não compreendermos a realidade social pode surgir perturbação, medo e desinteresse. Para desenvolver esta competência, sugere que se recorra a métodos ativos, projetos, problemas abertos e situações problemáticas reais, como por exemplo, a modelação. Trata-se de formas que colocam os alunos perante situações que exercitam a mobilização de saberes adquiridos e a assimilação de outros saberes em contexto real e com significado para eles.

Com o atual currículo do ensino profissional podemos começar a dar alguns passos no sentido de uma mudança de prática. Havendo intencionalidade de trabalhar uma educação matemática numa perspetiva de integração de futuros cidadãos mais participativos na sociedade, a partir de uma abordagem mais crítica e reflexiva de determinados conteúdos, é possível promover uma aprendizagem mais significativa desses conteúdos, incutir nos alunos o interesse por questionar, refletir, analisar, criticar e propor transformações em torno de assuntos do seu contexto ou área profissional, e estabelecer elos de ligação entre os conteúdos matemáticos que se trabalham dentro da sala de aula com outros saberes exteriores à Matemática, mas onde é mobilizada e necessária.

Síntese

As relações entre a Matemática e a realidade são desde há muito recomendadas, destacando-se a importância da introdução de novos conceitos e ideias a partir de situações reais, devidamente estruturadas, podendo assim constituir uma importante base efetiva para desenvolver os conceitos e ideias pretendidas (Ponte, 1992). Para muitos autores, essas situações reais podem ter um significativo papel motivador, especialmente se as situações forem de natureza problemática, conhecidas e do interesse dos alunos. Há vários modos de descrever o processo de modelação matemática. Tudo começa com a escolha de um problema real que pode estar mais ou menos indefinido. Em seguida há que selecionar hipóteses e variáveis que se relacionem e que surjam do problema e que possam levar à construção do modelo real e posteriormente ao modelo que possa ser transportado para a sala de aula (modelo matemático). Esse modelo, que pode assumir

várias representações, é testado de modo a poder ser validado e reajustado se não responder como se pretendia ao problema inicial. Os problemas que envolvem a matemática nem começam apenas aqui nem terminam aqui, muitas vezes são cíclicos.

A realização de tarefas de modelação bem definidas, em que os alunos usam os conhecimentos aprendidos, é evidentemente necessária e devem ser propostas frequentemente, tanto para um melhor esclarecimento daqueles conceitos, como para que os alunos ganhem sensibilidade para o tipo de estruturas e técnicas matemáticas que se utilizam numa variedade de situações. É importante que os alunos sejam envolvidos no ciclo de modelação, para que estes se apercebam da relação entre os vários domínios da matemática e do poder e limitações de cada um deles e entre as outras áreas do saber.

Se os alunos estiverem inseridos num curso profissional, as tarefas criadas pelo professor devem partir de situações trazidas do mundo real para que realmente constituam momentos de aprendizagem ricos e significativos. É importante o professor ter em atenção vários aspetos quando pensa e cria essas tarefas: devem ser contextualizadas e terem por base o conhecimento extra matemático que o aluno possui para que rapidamente seja estabelecida e compreendida a relação entre o mundo real e o mundo matemático, ideia esta defendida por Ferri (2006). Esta atividade é igualmente essencial para que os alunos ganhem sensibilidade para os aspetos mais globais do processo de modelação, nomeadamente a conceção geral, a avaliação e a análise crítica dos modelos (Davis, 1988).

Neste estudo seguiremos a definição de Swetz (1992) para modelação matemática e teremos por base o ciclo de modelação de Ferri (2006) para a criação das tarefas de modelação.

Entre a modelação matemática e a modelação matemática na Estatística, a que chamamos modelação estatística neste estudo existe uma diferença que as distingue: essa distinção existe ao nível do contexto real. Embora, na modelação matemática os autores se refiram à situação real, quando o tema da Estatística é abordado num contexto de modelação, a importância da situação real é ainda mais enfatizada. Na Estatística, a situação real ou contextos devem partir dos alunos, a sua envolvência na procura e sugestões de situações reais torna-se crucial. É importante que sejam eles a pensar nas possíveis relações que poderão estabelecer. A sua envolvência na operacionalização da recolha de dados reais, respetiva concretização e organização levar-vos-á a compreender muito melhor a situação real (primeira fase do ciclo de modelação) e a mobilizarem o

conhecimento extra matemático que possuem na construção do modelo real (segunda fase do ciclo de modelação). Na modelação matemática essa situação real pode ser apresentada pelo professor assim como a problematização e recolha de dados; na modelação estatística, o aluno deve estar preferencialmente envolvido em todo o processo levando-o a um melhor entendimento do ciclo de modelação e da situação real em causa e por eles conhecida.

Capítulo 3 - Conhecimento e práticas do professor

O conhecimento profissional dos professores

O professor no exercício da sua atividade profissional é confrontado com vários contextos profissionais, onde terá que mobilizar o que sabe, as capacidades que possui e as atitudes que toma tendo em conta a sua vertente pessoal e social. A natureza, estrutura, domínios e as componentes do conhecimento profissional do professor são aspetos a desenvolver nesta secção.

Natureza do conhecimento profissional

A natureza do conhecimento profissional suscitou e desafiou muitos investigadores no que diz respeito a questões epistemológicas. Canavarro (2003) considera que o conhecimento profissional parece ter uma origem que, não sendo essencialmente teórica, também não se pode considerar exclusivamente prática, reduzindo-se a um conhecimento de técnicas, aprendidas na prática e para aplicar nessa mesma prática. Esta autora refere:

No fundo, a grande questão é caracterizar a natureza de um conhecimento que se sabe não ser essencialmente teórico, sem o reduzir a um saber-fazer de natureza artesanal, do tipo do aprendiz que aprende um ofício por observação e imitação do mestre. (Canavarro, 2003, p. 8)

Fenstermacher (1994), um filósofo que se dedicou a discutir o conhecimento profissional dos professores distingue dois tipos de conhecimento: o conhecimento formal e o conhecimento prático. Este autor refere que no conhecimento profissional, o conhecimento formal, teórico, está presente em combinação com a experiência e revela-se na prática, enquanto resultado dela, mas também da reflexão sobre ela:

Ao conhecimento formal faz corresponder o conhecimento científico, que resulta dos métodos científicos convencionais e possui altos níveis de

alcance, validade, generalidade e intersubjetividade, sendo assim independente do contexto, situação ou tempo em que é produzido. É um conhecimento que se expressa proposicionalmente, em tudo relacionado com a teoria. O conhecimento prático é caracterizado como aquele que é inerente às situações da prática, que se desenvolve a partir da experiência, que envolve a ação e a reflexão que dela se faz. É um conhecimento fortemente situado, que surge num determinado tempo e contexto e é nele que se revela, podendo ou não ser suscetível de expressão por quem o utiliza (Fenstermacher, 1994, p. 27).

Neste sentido, Canavarro (2003) menciona que o conhecimento dos professores é um conhecimento que combina teoria e prática, com uma forte base experiencial, que se revela na ação, resultando dela e da reflexão sobre a mesma e é a este tipo de conhecimento que muitos investigadores se referem quando falam em conhecimento prático dos professores.

O conhecimento profissional dos professores pode estar associado à teoria ou à prática. Relativamente à teoria, está associado ao saber que pode ser alcançado a partir de disciplinas integradas em cursos superiores; relativamente à prática, apresenta um carácter mais dinâmico, associado à ação.

Muitas questões surgem relativamente à forma como se constrói e desenvolve. Na perspetiva de Azcárate (1999), é através de um processo contínuo de resolução de problemas que o conhecimento profissional se constrói na prática quotidiana. Assim, o conhecimento profissional é um conhecimento gerado num dado contexto e através de diversas atividades, que tem por objetivo primordial dar resposta aos problemas educativos que se colocam no ensino da Matemática. Deste modo, a organização do conhecimento desenvolve-se em torno dos interesses e preocupações imediatas do professor, tomando significado face aos problemas que ajuda a resolver.

O conhecimento profissional envolve a capacidade de resolução de problemas concretos, mas também o domínio de processos de rotina num campo bem definido de prática social, como é o caso do ensino (Ponte & Oliveira, 2002). A capacidade de tomar decisões acertadas e de resolver problemas práticos em interação com outros, principalmente os alunos, mas também os colegas e outros membros da comunidade educativa, desempenha um papel importante na atividade do professor. Os conhecimentos académicos e o senso comum podem ajudar, mas o professor precisa de ter uma apreensão intuitiva das situações, articulando pensamento e ação, e ser capaz de fazer uma gestão

dinâmica das relações sociais. Para Ponte (2011), o conhecimento profissional do professor de Matemática está sujeito à influência de vários fatores, mas:

Assume uma especificidade própria dependendo da sua atividade e também das condições em que é exercida. O conhecimento profissional do professor é, assim, acima de tudo, orientado para uma atividade prática (ensinar matemática a grupos de alunos), embora se apoie em conhecimentos de natureza teórica (sobre a matemática, a educação em geral e o ensino da matemática) e também de natureza social e experiencial (sobre os alunos, a dinâmica da aula, os valores e a cultura da comunidade envolvente, a comunidade escolar e profissional, etc.). (Ponte, 2011, p. 3)

Numa perspetiva da sua natureza, segundo Bromme e Tillema (1995), o conhecimento profissional, do ponto de vista cognitivo, é resultante da ação profissional e estabelece-se através do trabalho e do desempenho da profissão. Se, pelo contrário, seguimos uma perspetiva socio-histórica, o conhecimento profissional desenvolve-se gradualmente na enculturação do profissional no contexto de trabalho, visto como parte constituinte de uma certa cultura (Santos, 2000).

No que concerne à componente do conteúdo disciplinar, Shulman (1986) indica diversas fontes para o conhecimento profissional dos professores: a teoria (conhecimento do conteúdo), a prática (conhecimento pedagógico do conteúdo) e o domínio dos valores ideológicos e filosóficos. Para este autor há outras componentes que dizem respeito ao saber académico, como seja, o conhecimento do conteúdo. Por outro lado, o conhecimento didático não é, no seu entender: “nem exclusivamente técnico (resultante da teoria) nem somente reflexivo (resultante da prática)” (Shulman, 1993, p. 58). Para este autor, o papel do raciocínio e da reflexão são essenciais na construção do saber.

Já Elbaz (1983), pioneira na abordagem sobre o conhecimento prático dos professores, considera que, no conhecimento profissional, é importante a componente prática do saber dos professores, de como “fazer”, construído a partir da sua experiência e orientado para a prática letiva, estando ligado aos seus valores e crenças pessoais. É um conhecimento focado sobre a ação e a natureza orientada das decisões que o professor toma perante as situações, construído, em parte, como resultado da resposta a essas situações. Esta autora com o propósito de reconhecer um conhecimento profissional próprio ao professor investiga as práticas de uma professora de inglês, partindo de uma definição de conhecimento prático:

Ao desenvolver o seu trabalho, o professor exhibe um vasto conhecimento que cresce com o acumular de experiência. Este conhecimento engloba experiência, em primeira mão, dos estilos de aprendizagem dos alunos, interesses, necessidades, potencialidades e dificuldades, e um repertório de técnicas de instrução e de gestão da sala de aula. O professor conhece a estrutura social da escola e o que é necessário, ao professor e ao aluno, para aí sobreviver e ter sucesso; conhece a comunidade de que a escola faz parte, e tem uma sensibilidade para o que aí será ou não aceitável. Este conhecimento experiencial é informado pelo conhecimento teórico da disciplina, e de áreas como o desenvolvimento da criança, teoria da aprendizagem ou teorias sociais. Todos estes tipos de conhecimento, enquanto integrados pelo professor individual em termos de valores pessoais e crenças e enquanto orientados para a sua situação prática, serão aqui referidos como conhecimento prático. (Elbaz, 1983, p. 5)

Para esta autora, à medida que o professor adquire experiência com a sua prática letiva e com o conhecimento que vai tendo dos seus próprios alunos, tendo em conta as suas aprendizagens, dificuldades, motivações e meio social onde estão inseridos, assim como o funcionamento da escola e comunidade envolvente, vai construindo o seu próprio conhecimento que terá consequentemente repercussões na forma como age e gere as suas aulas. Neste contexto, Elbaz (1983), identifica cinco aspetos que servem de orientação para que se possa encarar o conhecimento como: situado, pessoal, social, experiencial e teórico.

Posição idêntica é também defendida por outros autores. Clandinin e Connelly (1986) discutem como os professores aprendem através da sua prática e como usam esse saber posteriormente, combinando deste modo a teoria com a prática, tendo em conta a sua vertente pessoal, experiência e formação inicial ou contínua. Para estes autores, o professor é visto como um construtor do seu conhecimento, refletindo-se esta ideia na forma como o designam — conhecimento prático pessoal, também defendido por Chapman (2004). Esta autora usa também o constructo do “conhecimento prático”, para descrever o conhecimento que orienta a ação do professor na prática, que cresce com a experiência, é situado e implícito. A autora salienta que este é o conhecimento que o professor tem das situações da sala de aula e dos dilemas práticos que enfrenta.

Carter (1990) também se refere ao conhecimento prático do professor, referindo que é a favor da *reconceptualização* do conhecimento do professor, baseando-se na evidência de que, no professor:

O conhecimento não é altamente abstrato nem proposicional. Nem pode ser formalizado num conjunto de destrezas específicas ou respostas previstas para problemas específicos. Em vez disso, é experiencial, procedimental, situacional e particularístico. (Carter, 1990, p. 307)

Munby, Russell e Martin (2001) apontam os constructos alternativos que diferentes investigadores têm vindo a propor para capturar a natureza contextualizada do conhecimento dos professores — *conhecimento situado* (Leinhardt, 1988), *conhecimento estruturado por situações* (Carter & Doyle, 1987), *conhecimento prático pessoal* (Connelly & Clandinin, 1985; Elbaz, 1983), *imagens* (Calderhead, 1988) e *conhecimento-em-ação* (Schön, 1991).

Um outro aspeto que merece atenção tem a ver com o carácter implícito do conhecimento profissional do professor. Segundo Elbaz, (1993), o conhecimento profissional é mais implícito do que explícito. Eraut (1994) e Ponte (1996) defendem a ideia que o indivíduo tem dificuldade em transmitir e explicar o que sabe, quando este conhecimento provém da sua experiência ou prática, não o reconhecendo como conhecimento. O carácter implícito do conhecimento profissional dos professores nem sempre é visto de igual forma pelos investigadores. Ball (1991) defende que o conhecimento profissional deve ser explícito e explica que é aqui que distingue o saber dos professores do saber dos matemáticos. É o conseguir justificar, relacionar e explicar os porquês. Esta autora, não valoriza o conhecimento de natureza implícita, o que nos leva a discordar dela.

Azcárate (1998) aponta igualmente um conjunto de características do conhecimento profissional como seja, ser contextual, interativo, especulativo, situado, de carácter prático e pessoal e adaptável a contextos determinados: “O saber profissional não é um conhecimento académico nem empírico, é um conhecimento prático” (p. 32). Por outras palavras, se o conhecimento profissional é gerado num dado contexto concreto, ele é produto da própria atividade. É assim um saber dirigido à ação, integrador de outros conhecimentos que se caracteriza pela elaboração de teorias práticas que orientam e dirigem a ação (Azcárate, 1999).

Schön (1991) defende que o saber profissional dos professores se baseia num conjunto de competências marcadas pela prática da reflexão, conhecimentos estes que se aprendem na prática. Christiansen e Walther (1986) consideram que é a partir da interação

com os seus alunos, que o professor constrói novos saberes. Estes autores aliam a prática à interação com os alunos. Também em Portugal, Guimarães (1996) valoriza e alia o conhecimento à experiência no que diz respeito à: gestão da sala de aula, ao conhecimento, interesses, dificuldades e estilos de aprendizagem dos alunos. Num estudo por si realizado com duas professoras pode ler-se que:

No que se refere ao tipo de conhecimento, pode afirmar-se que este é essencialmente experiencial. De facto, tanto as técnicas de gestão da sala de aula, como o conhecimento do que interessa aos alunos, as suas necessidades e dificuldades perante determinada matéria, os estilos de aprendizagem, o modo de organização conveniente para desenvolver esta ou aquela tarefa e o conhecimento das representações mais adequadas para os alunos, foram aquisições que, em ambas as professoras – cujas licenciaturas não eram sequer orientadas para a docência – tiveram essencialmente origem na prática. (Guimarães, 1996, p. 214)

Oliveira (1998) conclui também que o conhecimento é “essencialmente de natureza experiencial, orientado para a prática, tendo pouco de proposicional” (Oliveira, 1998, p. 233). Santos (2000) acrescenta o papel da reflexão no desenvolvimento deste conhecimento:

Considerando-o como um conhecimento sobretudo dirigido para a ação, este conhecimento é construído e desenvolvido ao longo da experiência e da reflexão sobre a experiência. Sendo um conhecimento dinâmico e evolutivo, a sua natureza é essencialmente implícita, situada e pessoal. (Santos, 2000, p. 28)

Em síntese, a natureza do conhecimento profissional é essencialmente prática, combina teoria e prática, e manifesta-se na ação. Evolui com a experiência e a reflexão sobre essa mesma experiência, sendo marcada pela vertente pessoal e social do próprio professor.

Estrutura do conhecimento profissional

Um dos autores com crucial importância no estudo do conhecimento profissional dos professores é Shulman (1986). Este autor refere que o conhecimento profissional do professor, no que diz respeito ao seu domínio e categorias, divide-se em três formas: proposicional, de casos e estratégico. O conhecimento proposicional está relacionado com aquilo que é ensinado ao professor, quer através da investigação empírica, quer através

da sua própria experiência. O conhecimento de casos é um conhecimento bem documentado e identificável. O conhecimento estratégico revela-se o mais indispensável na prática do professor, pois este surge a partir da reflexão sobre o que faz.

Elbaz (1983) também identifica três níveis de estruturação: as regras, os princípios e as imagens. As regras de prática dizem respeito aos meios pessoais e a casos concretos. Os princípios estão relacionados com a orientação para a prática. Relativamente às imagens, este é o nível mais geral e menos explícito e podem estar associados a metáforas. Segundo Santos (2000) esta autora reconhece no seu próprio modelo, algumas dificuldades, quer na identificação de certos casos num dos níveis definidos, devido à forte interligação entre eles, quer devido ao fato da relação entre estes nem sempre ser linear.

Leinhardt e Greeno (1986) defendem que, dado que o conhecimento do professor é de grande complexidade, este estrutura-se através de conjuntos interrelacionados de ações organizadas, denominadas por esquemas. Estes esquemas incluem as rotinas, os esquemas de informação e a agenda. As rotinas são entendidas como atividades frequentemente utilizadas e conhecidas pelo professor e aluno. Os esquemas de informação resultam de registos que o professor realiza. A agenda é um plano mental, que contém os objetivos e ações para a aula, estando em movimento e sendo modificável. Segundo Leinhardt e Greeno (1986), para além da agenda, existem mais três formas de acesso ao conhecimento profissional: (a) o guião curricular, (b) as explicações e (c) as representações. O guião é uma estrutura, com características de esquema, que leva a interpretações sobre situações e respetivas atuações. Segundo Santos (2000), o conhecimento sobre a forma como se ensina é adquirida ao longo da vida e experiência. Este conhecimento inclui sequências de ideias ou passos a serem introduzidos, representações, notas sobre conceitos ou procedimentos que poderão suscitar dúvidas aos alunos. Ao invés da agenda, este é estável ao longo da aula e é revisto ao longo do tempo. No que diz respeito às explicações, estas traduzem a forma como o professor comunica aos alunos o conteúdo, como transmite a mensagem de forma a ser entendível por eles e é um conjunto de técnicas usadas por este, de modo a permitir, aos alunos, a construção da compreensão sobre esse conceito. Quanto às representações, estas dizem respeito à forma como se usa para explicar qualquer coisa.

Segundo Santos (2000):

Em todos os modelos se reconhece a influência de áreas diversificadas de saberes, nomeadamente, o conhecimento do conteúdo que lecionam e de outros, o conhecimento do currículo, o conhecimento sobre aspetos gerais de pedagogia e o conhecimento do contexto onde se incluem os alunos. (Santos, 2000, p. 32)

Em síntese, o elo de ligação que parece existir entre os vários modelos apresentados é a existência de dois níveis diferenciados, um de natureza mais conceptual e abstrato e outro de características mais práticas e contextual. Por outras palavras, a estrutura do conhecimento profissional é constituída por uma mais geral (imagens, conhecimento proposicional e agenda), outra mais relacionada com a ação (guiões, princípios e regras práticas) e outra relacionada com o saber lidar com situações novas e não contemplada pelas outras.

Os domínios do conhecimento profissional

O conhecimento profissional do professor tem por base vários tipos de conhecimento, que estão relacionados com a sua experiência, teoria aprendida, reflexão sobre a sua prática e que não se podem dissociar da vertente pessoal e social. De que forma o professor, mobiliza esse conhecimento quando planifica, prepara, seleciona e cria tarefas e como conduz as aulas é algo que suscita questionamento quanto aos domínios do conhecimento profissional.

O quadro teórico que de uma forma direta ou indireta influenciou a maioria dos estudos que integramos na categoria do conhecimento de base é o modelo de Shulman (1986) que salienta a importância do conhecimento do conteúdo, do conhecimento de pedagogia e de um domínio que, de algum modo, resulta da junção dos anteriores e que ele designa por conhecimento didático (*pedagogical content knowledge*) (Figura 6):

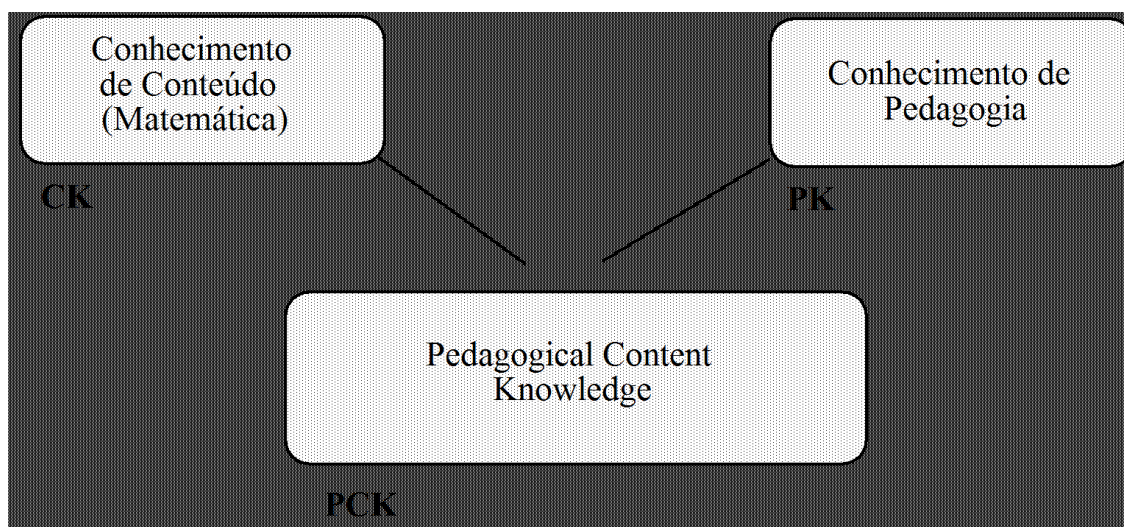


Figura 6: Modelo de Shulman sobre o conhecimento do conteúdo, o conhecimento de pedagogia e o conhecimento didático (*pedagogical content knowledge*) do professor (Shulman, 1986).

Segundo Shulman (1986), nas diversas componentes do saber profissional dos professores podem ser incluídas três categorias no que diz respeito ao conhecimento do conteúdo: do conteúdo a ensinar, didático do conteúdo e do currículo, ideias estas também defendidas por CBMS (2000) e Sowder (2007). Este autor vem atribuir uma maior importância ao conhecimento didático que integra o conhecimento do conteúdo, o conhecimento do currículo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, sendo este último, de acordo com Canavarro (2003), um conhecimento para ensinar que se desenvolve com a própria atividade de ensinar, a partir do conhecimento científico e da experiência, ou uma combinação de conteúdo e pedagogia sob formas compreensíveis para os alunos, segundo Munby *et al.* (2001). Para Shulman (1986), o conhecimento pedagógico do conteúdo inclui os tópicos “normalmente ensinados numa determinada área, as formas mais usuais de representação dessas ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações – numa palavra, as formas de representar e formular o assunto que o torne compreensível para os outros” (p. 9).

Também Sowder (2007) identifica quatro componentes do conhecimento pedagógico do conteúdo:

- (i) conhecimento global e crença sobre os efeitos do ensino da matemática;
- (ii) conhecimento das compreensões, concepções e incompreensões dos alunos;
- (iii) conhecimento do currículo e dos materiais curriculares;
- (iv) conhecimento das estratégias de ensino e representações para o ensino de

tópicos específicos. Estas componentes combinam muitos tipos de conhecimento que os professores precisam e que devem ser integrados na prática. A primeira pode considerar-se um mapa conceptual, uma componente particularmente saliente do conhecimento profissional de base, que enforma as decisões, base de avaliação dos objetivos, estratégias de ensino, manuais e materiais curriculares e aprendizagem dos alunos. (Sowder, 2007, p. 157-223).

Hill *et. al.*, (2004) e Ball *et. al.*, (2005) também subdividem a categoria do conhecimento pedagógico do conteúdo em duas componentes do conhecimento: (1) conhecimento do conteúdo e dos alunos; (2) conhecimento do conteúdo e do ensino. O conhecimento do conteúdo e dos alunos inclui a capacidade de antever os erros dos alunos que são comuns, interpretar e compreender o pensamento incompleto dos alunos e prever o que os alunos possam vir a produzir em determinadas tarefas e o que eles vão achar interessante ou desafiador. O conhecimento do conteúdo e do ensino inclui a capacidade do professor optar por uma determinada sequenciação de conteúdos para o ensino e reconhecer as vantagens e desvantagens do uso de diferentes formas de representações.

Hill, Ball e Schiling (2008) vão mais além nesta conceptualização do conhecimento do professor e propõem o modelo indicado na Figura 7, que apresenta algumas subdivisões das categorias apresentadas por Shulman (1986): o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo:

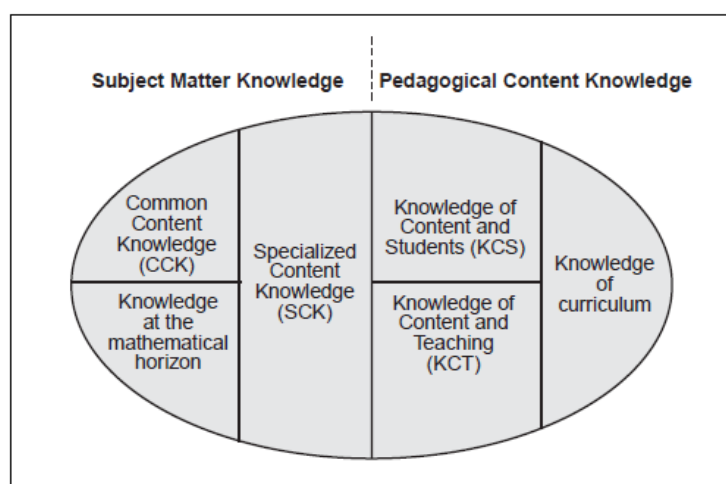


Figura 7: Conhecimento dos professores (Hill, Ball & Schiling, 2008)

O conhecimento do conteúdo engloba o conhecimento comum do conteúdo, o conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento do horizonte matemático. O

conhecimento comum do conteúdo é o que Shulman (1986) define como sendo apenas conhecimento de conteúdo. Esse conhecimento não é apenas detido pelo professor, mas comum a muitas outras profissões que usam a Matemática como ferramenta (Hill & Ball, 2004). Já o conhecimento especializado do conteúdo é um conhecimento próprio e único para planejar e conduzir o ensino de determinado assunto. Este conhecimento permite aos professores compreenderem estratégias de resolução de problemas dos alunos e, quando estes apresentam métodos inovadores, serem capazes de determinar se os métodos podem ser generalizados a outros problemas (Hill & Ball, 2004). Por sua vez, o conhecimento do horizonte matemático diz respeito ao conhecimento do modo como os vários tópicos se relacionam dentro do currículo (Hill, Ball & Schilling, 2008).

O conhecimento pedagógico do conteúdo, a outra componente apresentada por Hill, Ball e Schilling (2008), é composto pelo conhecimento do conteúdo e dos alunos, pelo conhecimento do conteúdo e do ensino e também pelo conhecimento do currículo. O conhecimento do conteúdo e do ensino combina o conhecimento do conteúdo matemático com os princípios pedagógicos para ensinar cada conteúdo. O conhecimento do conteúdo e dos alunos é definido como sendo o conhecimento de conteúdo interligado com o conhecimento de como os alunos pensam e sabem sobre um determinado aspeto do conteúdo, ou o modo como aprendem determinado conteúdo, sendo essencial que o professor tenha conhecimento das concepções, dificuldades e de interpretações menos corretas que os alunos possam apresentar.

Por fim, o conhecimento do currículo, já referido por Shulman (1986), abarca o conhecimento de programas construídos para o ensino do conteúdo a lecionar, diversos materiais educacionais relacionados com esses programas e as vantagens e desvantagens de usar os diversos programas e recursos materiais em diferentes ocasiões.

Segundo Canavarro (2003), o conhecimento didático, que é o conhecimento orientado para a prática letiva, abrange quatro domínios: o conhecimento da matemática, o currículo de Matemática, o conhecimento dos alunos e suas aprendizagens e o conhecimento instrucional. O conhecimento didático está associado ao conhecimento do currículo, à forma como o professor faz a gestão deste e ao conhecimento dos alunos e forma como fazem a sua aprendizagem. Segundo Santos e Ponte (2002), isso inclui, naturalmente, o conhecimento das grandes finalidades e objetivos do currículo, a organização dos conteúdos, o conhecimento dos materiais e das formas de avaliação. Este conhecimento tem um papel fundamental na tomada de decisões sobre os assuntos onde

deve ser empregue mais tempo, sobre as prioridades a considerar a cada momento, sobre a forma de orientar o processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Santos (2000), o conhecimento didático do conteúdo depende e resulta da combinação entre o conhecimento dos conteúdos e dos métodos de ensino a eles associados. Tal significa que o professor deve ser portador de diversas representações, analogias, exemplos e explicações dos conhecimentos que tem a transmitir, tendo em conta o processo de aprendizagem dos alunos e suas concepções. Este deve estar ciente das dificuldades e facilidades inerentes a cada conteúdo, assim como pré-requisitos e concepções que fazem parte do aluno. É através desse conhecimento didático que o professor transforma o saber académico em que algo que seja entendível pelo aluno. É esta postura e saber do professor que distingue o saber do professor sobre a disciplina do saber académico.

Sowder (2007) recomenda a necessidade de dotar os professores de um forte conhecimento em Matemática, de natureza concetual e apropriado para ensinar, ou seja, ver os tópicos a ensinar integrados numa rede de conceitos que possam ser relacionados, saber quando implementar as tarefas a colocar aos alunos. Estas ideias estão de acordo com as ideias de Shulman (1986), relativamente às formas de representação e formulação do assunto que as torna compreensíveis para os outros. Este autor refere um modelo de raciocínio e ação pedagógicos onde inclui: a compreensão dos objetivos a ensinar a outras disciplinas; uma transformação, onde considera a interpretação crítica da diversidade de materiais já existentes disponíveis ao professor; o desenvolvimento do referido repertório de representações, metáforas, analogias; a seleção do método do ensino e da organização da aula e a adaptação destes aspetos às características específicas dos alunos com que no momento está a trabalhar; o ensino propriamente dito; a avaliação enquanto se desenvolve o próprio ensino e após este; a reflexão que ocorre quando planifica, durante o ensino e na revisão e avaliação sobre o que foi feito; uma nova compreensão na qual ocorre o crescimento do saber sobre os objetivos do ensino, a matéria ensinada, os alunos e sobre si próprio. Segundo Shulman (1993), estas etapas não têm de ser sequenciais, podendo existir paralelamente.

No entanto, surgem algumas críticas ao modelo de Shulman (1993), relativamente ao conhecimento didático do conteúdo, pois nem todos os autores atribuem vantagem na diferenciação entre o conhecimento didático do conteúdo e o conhecimento do conteúdo. Segundo Azcárate (1998), a ideia não é transformar o conhecimento da disciplina em

outro mais acessível ou compreensível, mas sim elaborar um conhecimento diferente da disciplina, que permita ao professor um conhecimento profissionalizante da Matemática e que o habilite numa didática fundamental. Esta mesma autora (1999), relativamente a Shulman, questiona se é legítimo diferenciar o conhecimento profissional em várias componentes separadas, ou se o devemos entender como um todo integrado, cuja finalidade é o ensino da Matemática. Ponte (1993), também critica Shulman no que diz respeito ao facto de existir uma falta de atenção à componente pessoal do professor. Na tentativa de simplificar, Ball (1991) dá um contributo que está associado à forma como desenvolve o conhecimento do conteúdo e que para esta autora é constituído por três componentes: (a) o conhecimento da matéria que ensina; (b) conhecimento sobre essa matéria; (c) a atitude do professor face à matéria. Em primeiro, o conhecimento da matéria diz respeito ao conhecimento da matemática do tipo substantivo, onde está incluído o proposicional, procedimental, estrutural e relacional. Em segundo lugar, o conhecimento sobre a matéria diz respeito à compreensão que o professor tem sobre a natureza do conhecimento, do discurso e da atividade da matemática. Por último, a atitude do professor face à Matemática tem a ver com a postura do professor face à disciplina, quais as suas motivações e qual a sua posição em relação às várias áreas da Matemática. Elbaz (1983) distingue-se dos anteriores autores porque considera a componente pessoal do professor, enfatizando deste modo a componente prática que atribui ao saber do professor, dando grande visibilidade à componente pessoal, incluindo deste modo, não só as componentes constituintes do conhecimento profissional dos professores, como também a componente pessoal. Segundo esta autora e citando Santos (2000):

O autoconhecimento é constituído por três partes: o eu como fonte de recursos que se refere às capacidades que cada pessoa vê em si própria; o eu em relação com os outros que diz respeito ao tipo de preocupações que se tem com os outros; o eu como indivíduo no que concerne objetivos e características pessoais. (Santos, 2000, p. 37)

Segundo Elbaz (1983), existem mais quatro componentes para caracterizar o saber prático: o conhecimento do contexto de ensino, do conteúdo, do desenvolvimento curricular e do ensino, estabelecendo desta forma cinco orientações: para as situações, para a pessoa, para a sociedade, para a experiência e para a teoria.

Os professores devem conseguir prever o que os alunos entendem do que é ensinado, assim como terem conhecimento acerca dos pré-requisitos necessários, de

modo a conseguirem planificar melhor e irem ao encontro do que é pretendido. Deste modo, devem saber ouvir os alunos, conhecimento este que vem essencialmente da prática e de um bom entendimento da Matemática. Os professores com estas preocupações pensam o currículo de Matemática em termos de grandes ideias em torno das quais estruturam o ensino (um caminho para a compreensão conceptual), usando o programa como uma orientação, e usam materiais curriculares apropriadamente porque sabem a Matemática que os alunos aprendem a partir do seu uso (Sowder, 2007). Algumas limitações no conhecimento matemático fundamental afeta o conhecimento pedagógico de conteúdo. Este conhecimento (de conteúdo) dos professores e as suas crenças constituem poderosos filtros através dos quais a aprendizagem se processa (Borko & Putman, 1995). Neste contexto, Sowder (2007) refere que existem oito áreas de conhecimento, interrelacionadas, de que os professores precisam: (i) conhecimento de e sobre a Matemática (ii) um modelo pessoalmente significativo de aprendizagem da matemática; (iii) o conhecimento sobre o desenvolvimento de conceitos relevantes dos alunos; (iv) relações com a matemática dos seus alunos; (v) um modelo pessoalmente significativo do ensino da Matemática (em construção e em constante renovação); (vi) capacidade de definir objetivos de aprendizagem apropriados para os seus alunos e de identificar ideias chave de matemática; (vii) capacidade de antecipar como a aprendizagem dos estudantes progride; (viii) capacidade para conduzir aulas que constituam momentos ricos de aprendizagem com o seu modelo de ensino (Sowder, 2007, pp. 157-223).

Em síntese, o conhecimento profissional dos professores inclui diversos domínios multifacetados e interrelacionados entre si. Os domínios deste conhecimento apresentados por vários autores, embora com algumas diferenças, de um modo geral, incluem o conhecimento que os professores têm de si próprios, do currículo, dos contextos, do conteúdo a ensinar, das aprendizagens dos alunos e da forma como ensinam.

Componentes do conhecimento didático do professor

Segundo Canavarro (2003), o conhecimento profissional do professor diz respeito a domínios específicos que são mobilizados de forma diferente perante as diversas atividades profissionais do professor. Em particular, quanto à condução do processo de ensino aprendizagem na sala de aula, existem quatro domínios que assumem especial

importância. São eles: a Matemática, os alunos e os seus processos de aprendizagem, o currículo e o processo instrucional. Este conhecimento, diretamente relacionado com as práticas letivas, será designado por conhecimento didático (Ponte, 2001; Saraiva, 2001). Também Brown e Borko (1992) reconhecem que o conhecimento relacionado com a forma de ensinar surge como relação entre o conhecimento da disciplina, com o conhecimento dos alunos, do ensino e do currículo.

No mesmo sentido apontam Nunes e Ponte (2010) consideram que o conhecimento profissional do professor, no que se refere ao ensino da Matemática, inclui necessariamente quatro domínios fundamentais: (a) a Matemática, (b) o currículo, (c) o aluno e os seus processos de aprendizagem, e (d) a organização da atividade de ensino. Segue-se uma análise mais detalhada de cada uma destas componentes.

Conhecimento da Matemática

Ball (1991) refere que numa primeira fase da investigação sobre os professores, com foco nas características do que entende por um bom professor, o conhecimento matemático do professor estava relacionado com a quantidade de disciplinas por este realizadas na formação e os conteúdos que o professor concluía. Esta autora assume o conhecimento matemático, como uma componente essencial do conhecimento profissional dos professores, e sugere que um conhecimento matemático para o ensino deveria articular a compreensão do conteúdo (o conhecimento da e sobre a disciplina) com a forma como o professor vê o ensino e a aprendizagem, as representações que tem dos seus alunos e os contextos em que está inserido. Por conhecimento da disciplina entende o conhecimento de tópicos, conceitos e conexões entre estes ou outras áreas do saber, e por conhecimento acerca da disciplina, aspetos como a natureza do conhecimento e da atividade matemática reconhecendo, no entanto, que este conhecimento “não existe separadamente no ensino, mas determina e é determinado por outras formas de conhecimento e crenças” (Ball, 1991, p. 38). No entanto, esta perspetiva evoluiu e Canavarro (2003) refere que:

Já sob o paradigma processo-produto, a investigação procura analisar a matemática que o professor exhibe no ensino, destacando-se a prevalência de aulas de exercícios e prática - enquadradas, aliás, pelo currículo em vigor na altura. Mas à medida que a investigação dá atenção ao pensamento do professor, passa a ser reconhecida a importância de aspetos como as suas concepções sobre a matemática, o que originou uma série de estudos que procuravam entender a relação entre as concepções e as práticas, primeiro

numa ótica determinista, mais tarde reconhecendo-se-lhe uma relação dialética. (p. 38)

Um dos aspetos do conhecimento profissional do professor diz respeito ao conhecimento matemático, não como ciência, mas como disciplina escolar. Para além de conhecer os conceitos da disciplina, o professor deve ter em conta as formas de representação desses mesmos conceitos, assim como a perspectiva e conhecimento geral sobre a Matemática que é lecionada na escola e todas as conexões com as outras áreas do saber e possibilidades de interdisciplinaridade.

Segundo Ponte e Oliveira (1997), a investigação mostra que o conhecimento dos professores e futuros professores sobre conceitos matemáticos e sobre aspetos da aprendizagem desta disciplina é muito limitado e, frequentemente, marcado por sérias incompreensões. Outras vezes, os resultados parecem ter a sua origem sobretudo no modo pouco habitual como são propostas certas tarefas. Estes autores referem que surgem lacunas no conhecimento de base dos professores acerca dos assuntos que ensinam e do modo como eles podem ser aprendidos.

Ball (2003), ao procurar responder à questão sobre qual o conhecimento matemático para ensinar, aponta três aspetos: uma maior compreensão das suas ideias, conexões, razões e formas de as representar; saber interpretar erros, representar ideias em múltiplas formas e desenvolver explicações alternativas; ser utilizável na resolução de problemas matemáticos, oferecendo explicações claras e permitindo, por exemplo, a análise crítica de materiais de ensino, nomeadamente manuais.

Mais recentemente, Ball, Thames *et. al.*, (2009) consideram seis domínios no conhecimento matemático para ensinar: o conhecimento comum de conteúdo, o conhecimento especializado de conteúdo, o conhecimento dos conceitos de forma articulada e as suas conexões, o conhecimento do conteúdo e dos alunos, o conhecimento do conteúdo e do ensino e o conhecimento do currículo.

Conhecimento dos alunos e processos de aprendizagem

O conhecimento sobre os alunos e processos de aprendizagem está relacionado não só com as características, motivações e interesses dos alunos como também com o conhecimento das suas aprendizagens. Segundo Santos e Ponte (2002), este conhecimento envolve conhecer os seus alunos como pessoas, os seus interesses, os seus

gostos, a sua forma habitual de reagir, os seus valores, as suas crenças, as suas referências culturais, mas inclui também conhecer como os alunos aprendem Matemática.

Sowder (2007) refere que se deve desenvolver uma compreensão sobre como os alunos pensam e aprendem Matemática, no sentido de se entender o seu raciocínio e deste modo integrar esse conhecimento na melhoria e aprendizagem da Matemática dos alunos. A boa compreensão dos alunos, a forma como pensam, como compreendem e como fazem, segundo Sowder (2007), permite ao professor planificar melhor, antecipar dificuldades e saber que conhecimento prévio devem ter os alunos, para introduzir o novo. O saber ouvir os alunos e o conhecimento destes é um conhecimento que “vem essencialmente da prática, mas que só se desenvolve com uma boa compreensão da matemática” (Sowder, 2007, p. 157).

Estudos de Ponte e Chapman (2006) revelam a importância dos professores tentarem compreender o raciocínio dos seus alunos e respeitarem o ritmo de aprendizagem de cada um deles, levando a que os professores melhorem esta componente do seu conhecimento didático. Também o projeto *Cognitively Guided Instruction* (CGI), baseado no trabalho de Carpenter e Fennema (1989), menciona que a compreensão do conhecimento da cognição dos alunos em Matemática constitui uma componente importante do conhecimento dos professores de Matemática:

Dando aos professores acesso ao conhecimento baseado na investigação acerca do raciocínio dos alunos e da resolução de problemas pode afetar profundamente as crenças dos professores sobre o ensino e a aprendizagem, as práticas da sala de aula, o seu conhecimento dos alunos, e mais importante, as crenças e aprendizagens dos seus alunos. (Carpenter e Fennema, 1989, p. 44)

Por vezes os professores têm que tomar decisões em sala de aula, perante as respostas dos alunos. Essas tomadas de decisão são baseadas na perceção profissional que os professores têm do raciocínio dos alunos (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010). As aprendizagens dos alunos e o conhecimento que os professores têm delas tem levado a muitas investigações. Mewborn (2003) considera a aprendizagem dos alunos contextual, com maior sucesso se estes se envolverem ativamente na sua própria aprendizagem, tendo em conta as suas motivações e necessidades individuais. Even e Tirosh (2008) referem três aspetos a ter em atenção na aprendizagem matemática dos alunos: a análise das suas conceções, as diferentes formas de conhecimento envolvidas e a cultura da sala de aula.

Sobre as concepções dos alunos, a investigação tem vindo a dar atenção: à forma como ajudar os alunos a progredirem na sua aprendizagem, relativamente a erros e confusões que os alunos fazem, à sua origem e evolução; e à forma como, a partir dos erros, se pode chegar ao conhecimento.

Sowder (2007) identifica também o raciocínio dos alunos, quando procura respostas sobre como os professores adquirem o conhecimento que precisam para a prática. A análise do trabalho dos alunos sobre tarefas propostas, a planificação baseada no que eles sabem, tendo em conta às questões a colocar, o tipo de respostas e raciocínios inesperados dos alunos e o criar tarefas de acordo com o que aprendeu do raciocínio dos alunos são atividades importantes para que o conhecimento que o professor tem sobre os alunos e suas aprendizagens sejam úteis para criar tarefas adequadas e questões pertinentes, percetíveis e com significado para os alunos.

Conhecimento do currículo de Matemática

A forma como os professores interpretam o conceito de currículo é variável e influencia a maneira como agem quando planificam, gerem e conduzem as aulas, assim como avaliam. Na verdade, a visão do currículo não é a mesma em todos os professores (Ponte, Matos & Abrantes, 1998). Para alguns, o currículo é, sobretudo, uma sequência de conteúdos. Outros dão uma importância significativa às metodologias e instrumentos recomendados (por exemplo, calculadoras, trabalho de grupo). Outros, ainda, dão grande atenção aos diversos níveis de objetivos do ensino da Matemática, procurando que eles sejam contemplados de modo harmonioso pelos seus alunos. Do mesmo modo, a relação dos professores com o currículo nem sempre é a mesma. Para alguns o currículo é um documento com força e a cumprir, nomeadamente no que diz respeito de tópicos a abordar. Para outros, é mais um documento orientador que é preciso saber adaptar aos contextos da escola e às características e interesses dos alunos, assumindo uma considerável margem de autonomia, na sua interpretação, adaptação e até recriação (Pacheco, 1996).

O conhecimento sobre e do currículo está relacionado com o currículo oficial e suas orientações e o que se espera que o professor faça para que o cumpra. Muitos investigadores mostraram que tais expectativas estão longe de corresponder ao esperado pelos autores dos currículos (APM, 1998; Clandinin & Connelly, 1992; Ponte, Matos, Guimarães, Leal & Canavarro, 1991). O currículo tem sofrido muitas alterações ao longo

do tempo e os professores têm o dever de estar a par das modificações que vão surgindo de modo a interpretá-lo e pô-lo em prática da melhor forma, tendo sempre em vista o sucesso dos seus alunos e as finalidades do ensino da Matemática. Uma última alteração tem a ver com os novos programas para o ensino básico e secundário (metas curriculares), assim como o surgimento de um programa oficial para os cursos profissionais do ensino secundário.

Em Canavarro (2003) é referido que as profundas alterações curriculares relativas às finalidades da educação matemática tiveram reflexos no conteúdo e estrutura dos currículos. Durante muitos anos prevaleceram as listas detalhadas de tópicos matemáticos a ensinar. Estas deram lugar a documentos muito mais complexos, constituídos por diversas componentes. Independentemente da sua organização e estrutura, em geral os currículos apresentam finalidades e objetivos, conteúdos, orientações metodológicas e indicações sobre a avaliação das aprendizagens dos alunos (Ponte, Matos & Abrantes, 1998). No entanto, a longa tradição de currículo como lista de tópicos, ou seja, como programa, com frequência identificado com o livro de texto (Gimeno, 1989), ainda marca muito as conceções e práticas do professor e muitos são os professores que ainda seguem a lista de tópicos do programa sem o tentar interpretar, seguindo muitas vezes o manual como se do programa se tratasse.

Como afirmam Ponte e Santos (1998), o programa da disciplina tende a ser visto sobretudo como uma listagem de tópicos, com pouca atenção às suas finalidades e objetivos específicos que, por vezes, são abertamente desvalorizados. Para lidar com o atual currículo de Matemática, é necessário muito mais do que rearrumar as matérias. Para além de conhecer o texto curricular, o professor precisa de o interpretar, adaptando-o à pessoa e profissional que é e ao contexto onde exerce a profissão, reconstruindo-o para a sua sala de aula e para os seus alunos (Canavarro, 2003). Neste contexto, o professor deverá relacionar as várias componentes do currículo, seguindo as orientações metodológicas com vista a concretizar as finalidades para o ensino da Matemática.

Relativamente às finalidades para o ensino da Matemática, Canavarro (2003) refere que os professores devem ter em conta o papel da Matemática na sociedade, assim como todas as mudanças inerentes a esta e, deste modo, contemplar e preocupar-se com a lecionação dos conteúdos e sua relação com a realidade e outras áreas do saber. Quanto aos conteúdos, deverão ser abordados não só temas matemáticos, como também valorizadas as atitudes, valores e capacidades que visem não só a formação do aluno,

como também a comunicação e o raciocínio matemáticos. No que diz respeito às orientações curriculares, o professor deve ter em conta as orientações quanto à natureza das tarefas a propor aos alunos, tendo como objetivo o sucesso da disciplina, usando recurso às tecnologias e materiais manipuláveis como meio de favorecer a abordagem intuitiva e inovadora de conceitos, através de tarefas de natureza exploratória ou investigativa e também de modelação, promovendo deste modo o gosto pela Matemática. Segundo Canavarro (2003), esta é a componente mais exigente do currículo pois altera a rotina do professor, levantando vários receios:

Esta é talvez a componente mais exigente do currículo para o professor, pois para a pôr em prática, tem de se predispor a aprender e experimentar em sala de aula atividades que não são compatíveis com muitas das rotinas que já construiu e com as quais se sente confortável, prevalecendo muitas vezes o fenómeno de continuidade das práticas. (Canavarro, 2003, p. 50)

Uma outra autora, Sowder (2007) refere que os professores de Matemática competentes reconhecem as potencialidades e limitações dos materiais a usar, nomeadamente os manuais escolares, o que lhes permite ter uma perspetiva crítica sobre a forma como abordam conceitos matemáticos. No entanto ainda existem professores que usam o manual sem o questionar e o adaptar à realidade que têm à sua frente. Um outro estudo, referido pela autora, chama a atenção para um nível de desenvolvimento curricular que envolve mais ativamente os professores quando eles modificam e adequam aos seus alunos, propostas dos seus manuais escolares, adequando-as à sua visão de currículo. De acordo com Sowder (2007), através da análise das propostas dos manuais escolares, ao mesmo tempo que analisa as tarefas e o envolvimento dos alunos na sua resolução, o professor pode criar condições para que ocorram aprendizagens significativas. A autora considera que “os professores reexaminam as suas crenças e compreensões durante este processo, e ao fazerem-no, influenciam o currículo” (Sowder, 2007, p. 177). Estes resultados sugerem que usar novos manuais escolares, por si só, nada significa, a menos que o professor seja chamado a interpretá-los e a construir currículo a partir deles.

Nos exemplos de estudos apresentados por Sowder (2007), surge o conceito de reconstrução curricular tendo em vista as necessidades dos alunos e o conhecimento e interpretação que o professor faz do currículo. Neste contexto, Clark e Peterson (1986)

reconhecem que o currículo publicado é transformado durante o processo de planificação e através de questões que se acrescentam e de outras que se retiram.

Surge, por último, a componente da avaliação, que deve ser articulada com todas as outras já mencionadas, devendo contemplar, para além do uso de uma diversidade de instrumentos de avaliação, o propósito de contribuir para o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. Ponte, Matos e Abrantes (1998) chamam a atenção para este aspeto, ao referirem que a avaliação deve ser coerente com os objetivos, conteúdos e métodos usados.

Em síntese, o conhecimento do currículo toma em linha de conta o desenvolvimento do currículo, processo relacionado com outras dimensões do conhecimento didático, como o conhecimento da Matemática, o conhecimento dos alunos e suas aprendizagens e também o conhecimento instrucional que passarei a descrever seguidamente.

Conhecimento instrucional

Segundo Canavarro (2003), é o conhecimento instrucional que organiza a prática letiva, nomeadamente no que diz respeito à planificação, criação das tarefas e a condução do processo ensino aprendizagem em sala de aula, e que responde diretamente em situação de interação com os alunos. Segundo Ponte (2011) este último conhecimento é relativo à prática letiva, e constitui, o núcleo fundamental do conhecimento didático. Inclui a planificação de longo e médio prazo bem como o plano de cada aula, a conceção das tarefas e tudo o que respeita à condução das aulas de Matemática, nomeadamente as formas de organização do trabalho dos alunos, à criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, o desenvolvimento e a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor.

Podem existir diversas razões para planificar (Clark & Peterson, 1986): para reduzir o grau de incerteza e insegurança; para aprender a seleccionar os materiais; para conseguir gerir o tempo; servir de orientação para a condução da aula. Segundo os mesmos autores, a planificação pode assumir várias formas: planificação anual, onde a preocupação é a listagem de tópicos a lecionar obedecendo a determinada ordem, possíveis tarefas a propor, materiais a produzir e recursos a usar. Uma outra forma é através da comparação entre as indicações fornecidas num manual escolar de uma determinada unidade didática com as modificações efetuadas pelo professor na

planificação e o pós aula. Neste caso, de acordo com Clark e Peterson (1986), o principal resultado que se retém da planificação é uma imagem mental da unidade, uma sequência de atividades e possíveis respostas dos alunos, com eventuais notas à margem e uma lista de pontos importantes a recordar.

A investigação refere um modelo proposto por Stein para concetualizar o trabalho dos professores quando planeiam, com o objetivo de moderar a improvisação e refere que uma das boas práticas do professor, quando está a planificar, está relacionada com a capacidade de prever possíveis respostas dos alunos a tarefas matemáticas propostas (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Segundo Ruthven e Goodchild (2008), os professores mais experientes ao planificarem identificam um conjunto de aspetos que antecipam e preveem dificuldades dos alunos, tomadas de decisão durante a aula e uma organização sistemática das ações com vista a explicar e clarificar cada novo assunto a introduzir. Estas ações podem passar por mobilizar e organizar as experiências dos próprios alunos que o professor queira solicitar, por constituírem uma ajuda para “construir uma compreensão com significado do conceito ou procedimento” (p. 571).

Um aspeto importante a decidir na planificação é a natureza e grau de estruturação das tarefas propostas pelos professores, pois esta influencia o modo como a concretização de ensino na sala de aula decorre. As tarefas refletem o modo como o professor interpreta o currículo e como o transpõe para a sala de aula. A forma como as criam, adequam aos alunos, abordam contextos e tópicos matemáticos, revelam o conhecimento que têm da matemática, dos alunos e suas aprendizagens e do currículo. O professor ao considerar uma tarefa proposta num manual, internet ou que ele próprio cria tem que ter em conta as diferentes fases por que passa essa tarefa no que diz respeito: à sua apresentação; à forma como os alunos irão a abordá-la e exploração, com vista a promover a aprendizagem e, ao longo deste processo, tem de estar atento para conseguir manter o nível de desafio cognitivo com que inicialmente pensou a tarefa (Stein & Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009). Para que todos estes aspetos sejam concretizados é necessário que o professor seja capaz de produzir boas tarefas. O que se entende por boas tarefas? Tarefas que estejam adequadas aos alunos e constituam momentos desafiadores de aprendizagem e que estejam de acordo com o currículo (Stein & Smith, 1998). Para além disso, é esperado que o professor tenha em consideração outros fatores também importantes, tais como: tempos e fases da aula, recursos necessários para as concretizar,

a apresentação da tarefa de modo a motivar e envolver os alunos na sua aprendizagem, monitorização das aprendizagens e como conduzir a aula nas várias fases (Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009).

Segundo Franke *et. al.*, (2007), tarefas capazes de levar os alunos a pensar e raciocinar sobre importantes ideias matemáticas, que podem ser resolvidas de várias maneiras formas, que envolvem várias representações, requerendo dos alunos justificações, conjecturas e interpretações e envolvendo-os em pensamento de alto nível cognitivo, são caracterizadas como boas tarefas.

O conhecimento instrucional está igualmente presente na fase de condução das aulas. Em particular, as estratégias de ensino e a forma como os professores envolvem os alunos na aprendizagem é algo complexo. À medida que o professor conduz a aula, imprevistos podem surgir e este dentro das suas possibilidades terá que fazer reajustes e adaptações à planificação inicialmente elaborada, tendo em conta as necessidades e dificuldades dos alunos (Ruthven & Goodchild, 2008). Stein *et. al.*, (2008) identificam um conjunto de práticas de condução de ensino que prevê: monitorizar respostas dos alunos a tarefas durante a fase de exploração; selecionar respostas particulares dos alunos para as apresentar durante a fase de discussão e sistematização; sequenciar deliberadamente as respostas dos alunos que serão mostradas; e ajudar a turma a fazer conexões matemáticas entre diferentes respostas dos alunos.

Santos e Ponte (2002) acrescenta a estas diversas fases da prática letiva do professor, a capacidade do professor trabalhar em conjunto com outros colegas, resolvendo problemas e tomando decisões, bem como a capacidade de mobilizar os órgãos e recursos da sua escola para a resolução de problemas de natureza mais geral. Trabalhar em conjunto de modo produtivo envolve competências que nem sempre existem à partida, sendo necessário que os participantes encontrem pontos de convergência, relativamente a objetivos, formas de pensar, personalidades e que consigam encontrar formas de trabalhar que sejam negociáveis, viáveis, compreendidas e reconhecidas por todos.

Em síntese o conhecimento instrucional é o conhecimento por excelência associado à prática letiva. Começa por estar presente na planificação, que o professor faz a diversos níveis, de onde se destaca a preparação da ação a desenvolver com os alunos e a tentativa de redução da imprevisibilidade, um dos fatores de complexidade da sala de aula e termina com a condução e avaliação do processo de ensino aprendizagem.

Uma vez que este estudo incide sobre o tema Estatística parece pertinente fazer uma abordagem entre a Educação Estatística e o conhecimento profissional do professor para ensinar este tema. Passaremos a desenvolver este assunto.

Educação estatística e o conhecimento do professor para ensinar Estatística

Modelos específicos de conhecimento estatístico para ensinar

As novas abordagens sugeridas (investigações estatísticas) para o ensino e aprendizagem da Estatística, mais exigentes e desafiadoras, exigem do professor que este seja confrontado com contextos de aprendizagem, que permitam um ambiente propício ao desenvolvimento da literacia e raciocínio estatístico dos alunos. Para isso, é necessário que o professor que ensine Estatística tenha um conhecimento próprio e distinto sobre o ensino da Matemática. Alguns autores referem que um professor de Estatística necessita de conhecimentos diferentes de um professor de Matemática, pois embora esta seja um tema do currículo da disciplina de Matemática existem diferenças a ter em conta no ensino e aprendizagem da Estatística (Burril, 2008). As diferenças apontadas são: (i) o papel do contexto; (ii) os métodos de raciocínio; (iii) a precisão; e (iv) o papel dos dados e da recolha de dados. De acordo com Scheaffer (2006) a Estatística e a Matemática podem coexistir, embora distintas. Este autor considera que pensamento matemático é distinto do pensamento estatístico. O pensamento matemático é frequentemente determinista, na medida em que “todo o resultado tem de ter uma causa explicável” (p. 310), enquanto que o pensamento estatístico é frequentemente probabilístico no qual “um resultado pode ser fruto de um de vários fatores inexplicáveis que se conjugam, cujo efeito resultante chama-se acaso” (p. 310). Este mesmo autor aponta vantagens em lecionar conteúdos estatísticos na disciplina de Matemática.

Embora já desde algum tempo, a Estatística esteja presente no programa de Matemática, nem todos os professores lhe dão a importância que esta tem na sociedade e muitas vezes não a abordam com a devida relevância que deveria ter ou abordando-a no final do ano letivo de forma rápida e pouco aprofundada.

Existindo, para vários autores (Burgess, 2007; Groth, 2007), diferenças entre a Estatística e a Matemática, são necessários quadros do conhecimento profissional dos

professores distintos para a Matemática e para a Estatística que passaremos a apresentar de seguida. Burgess (2007) baseando-se em estudos de Wild e Pfannkuch (1999) e Hill, Schilling e Ball (2004) criou um quadro conceptual (quadro 1) para estudar e analisar o conhecimento estatístico dos professores:

Quadro 1: Conhecimento estatístico para ensinar (Burgess, 2007)

Conhecimento estatístico para ensinar					
		Conhecimento do conteúdo		Conhecimento pedagógico do conteúdo	
		Conhecimento comum do conteúdo	Conhecimento especializado do conteúdo	Conhecimento do conteúdo e dos alunos	Conhecimento do conteúdo e do ensino
Pensamento	Reconhecimento e necessidade dos dados				
	Transnumeração				
	Variação				
	Raciocínio com modelos				
	Integração da Estatística e do contexto				
Ciclo investigativo					
Ciclo interrogativo					
Disposições					

Este autor reconhece a importância das quatro categorias que definem o conhecimento profissional dos professores, interpretando-as da seguinte forma: o conhecimento comum do conteúdo, está relacionado com a capacidade do professor identificar e reconhecer respostas incorretas ou imprevistas e conseguir resolver os problemas levantados pelos alunos; o conhecimento especializado do conteúdo, diz respeito à capacidade que o professor demonstra ao analisar e dar uma justificação matemática a uma resposta não esperada de um aluno; o conhecimento do conteúdo e dos alunos resulta da capacidade do professor antecipar respostas e dificuldades dos seus alunos, prevendo assim como irão resolver determinadas tarefas que o professor propusera e se serão ou não motivadoras e desafiantes para estes; o conhecimento do conteúdo e do ensino está relacionado com a capacidade do professor estabelecer uma

ordem de leção de conteúdos, reconhecendo vantagens e desvantagens do ensino de representações e ser capaz de tomar decisões e dar respostas a imprevistos de respostas de alunos.

Burgess (2007) deu extrema importância à fase do pensamento estatístico, dando exemplos para cada item inerentes a esta fase, relacionando com as quatro categorias por ele consideradas para o conhecimento profissional do professor. O quadro anteriormente apresentado aparece desta forma preenchido (alguns exemplos apresentados pelo autor):

Quadro 2: Exemplos dos diversos conhecimentos estatísticos para ensinar (Burgess, 2007)

Conhecimento estatístico para ensinar					
		Conhecimento do conteúdo		Conhecimento pedagógico do conteúdo	
		Conhecimento comum do conteúdo	Conhecimento especializado do conteúdo	Conhecimento do conteúdo e dos alunos	Conhecimento do conteúdo e do ensino
Pensamento	Reconhecimento e necessidade e dos dados				
	Transnumeração	Capacidade de reconhecer, se o aluno, por exemplo, deu a regra ou processo certo para determinar uma medida de localização.	Analisar se a representação ou medida apresentada pelo aluno é a correta tendo em conta os dados inerentes à situação real.	Capacidade de prever as respostas dos alunos, por exemplo: em relação ao entendimento dos alunos sobre os dados, sua separação e possíveis alterações à forma de os representar. Capacidade de entender as interpretações dos alunos, equívocos e erros. Capacidade de perceber se a tarefa a propor aos alunos é motivadora.	Capacidade de organizar uma sequência de aula ou conteúdos, tendo em conta as alterações nos dados e representações que podem surgir e conseguir entender quais as representações que podem ajudar ou ao invés, prejudicar o aluno tendo em conta cada situação.
	Variação	Quando o professor se refere a declarações inferenciais.	Avaliar as explicações e comunicação de resultados dos alunos e conseguir	Conseguir saber e prever as dificuldades dos alunos, por exemplo, em	Conseguir explicar aos alunos as generalizações e levar à reflexão

			avaliar se é possível tirar conclusões e generalizações para uma amostra maior, a partir dos dados iniciais.	relação à variação dos dados e como estes lidam com essa variação.	se essas generalizações serão ou não adequadas.
	Raciocínio com modelos	Fazer declarações válidas para os dados tendo por base um modelo.	Interpretar comunicações dos alunos de modo a averiguar se estas são válidas ou não.	Conseguir antecipar dificuldades ao nível do raciocínio que os alunos podem ter com modelos matemáticos.	Conseguir fazer uma abordagem explicativa e reflexiva quanto à tomada de decisões dos alunos que os leva a pensar o porquê da suas opções e das suas rejeições.
	Integração da Estatística e do contexto	Capacidade de dar sentido a tabelas, gráficas, linhas de tendência, reconhecendo a importância da representação desses instrumentos estatísticos em contextos reais para o conjunto de dados recolhidos.	O professor deve ser capaz de avaliar as explicações dos alunos com base nos resultados estatísticos obtidos e do conhecimento extra matemático que estes detêm sobre o contexto real.	Antecipar dificuldades tendo em conta o conhecimento extra matemático sobre a situação real e o conhecimento estatístico.	Saber incentivar os alunos e a usar o conhecimento extra matemático sobre a situação real a estudar e da sua importância em relação ao estudo estatístico em curso.
Ciclo investigativo		O professor e/ou alunos devem envolver-se no planeamento de: escolha de uma amostra, recolha de dados, análise de dados e a partir daí, serem capazes de validar conjecturas, resolver o problema e testar hipóteses.	Quando trata de questões referentes ao ciclo investigativo com os alunos. Quando pensa em sugestões sobre o que poderia ser investigado.	Conhecimento sobre possíveis contextos profissionais e reais que permitam aos alunos acharem uma investigação.	Ser capaz de incentivar os alunos a pensar sobre cada fase de um inquérito ou grelha de recolha de dados e como as fases de um estudo estatístico podem estar relacionadas.
Ciclo interrogativo		Análise e ponderação das possibilidades em relação aos dados obtidas e a que questões poderão dar resposta.	Perceber se as sugestões dadas pelos alunos para estudar são ou não viáveis, quer ao nível da viabilidade da recolha de dados quer ao nível dos recursos necessários. Também é importante perceber se a forma como os alunos classificam as variáveis referentes aos dados são adequadas para responder a	Conhecimento de como lidar com o desenvolvimento de questões que se revelem adequadas, por parte dos alunos, para estudar aqueles dados preferencialmente reais. Perceber como os alunos se podem envolver com os dados, nomeadamente a recolha e que os alunos por vezes ao se envolverem	Ser detentor de conhecimento que permita delinear estratégias que respondam à tendência dos alunos ignorar muitas possibilidades numa investigação e o impacto do ponto de vista estatístico que essa visão limitadora pode

		questões tendo em conta a questão ou conjectura inicial.	totalmente com os dados, muitas vezes são influenciados por ideias e pontos de vistas pré-concebidos e baseados no senso comum.	ter num estudo estatístico.
Disposições				

Groth (2007), inspirando-se em Ball (2004) e focando-se no conhecimento do conteúdo, considera que existe um conhecimento estatístico para ensinar que inclui quatro tipos de conhecimento distintos, organizando-o em conhecimento estatístico comum e conhecimento estatístico especializado, estendendo essa divisão para o conhecimento matemático e o conhecimento não matemático. Este autor menciona que para desenvolver o conhecimento matemático e o não matemático é necessário desenvolver inúmeras atividades estatísticas e para desenvolver o conhecimento comum e o especializado e necessário desenvolver muitas atividades pedagógicas.

Groth apresenta uma estrutura hipotética para o conhecimento estatístico para ensinar.

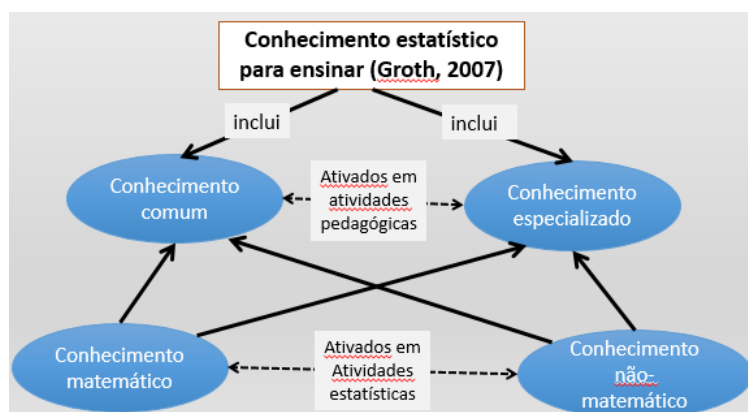


Figura 8: Estrutura hipotética de Groth (2007) para o conhecimento estatístico para ensinar

Para Groth (2007), o conhecimento estatístico para ensinar também se divide em quatro domínios:

- Conhecimento comum matemático - é o conhecimento que é sobretudo matemático, mas não é apenas exclusivo dos professores. Este

conhecimento é comum a muitas outras profissões que usam a Matemática;

- Conhecimento especializado matemático – é o conhecimento matemático específico do professor, porque é próprio e único para planear e conduzir o ensino de determinado conteúdo;
- Conhecimento comum não matemático – é o conhecimento estatístico que não é matemático e que não é apenas exclusivo dos professores, mas sim de muitas outras profissões que usam a Matemática;
- Conhecimento especializado não matemático – o conhecimento que não é necessariamente matemático, mas que é exclusivo do professor, porque é próprio e único para planear e conduzir o ensino de determinado conteúdo.

Este autor cruza este modelo com a proposta do GAISE Framework para as investigações estatísticas (Franklin *et. al.*, 2007). Divide as várias fases (formulação de questões; recolha de dados; análise de dados e interpretação dos dados), do GAISE Framework acima referido, em conhecimento matemático e não matemático e ainda em conhecimento comum e especializado, dando exemplos de tarefas para estes dois grupos e interrelacionando-os.

Quadro 3: Exemplos de Groth (2007) relativamente aos vários tipos do conhecimento estatístico para ensinar com investigações estatísticas

Fases do ciclo investigativo	Tipo de conhecimento	Conhecimento matemático: exemplos de tarefas	Conhecimento não matemático: exemplos de tarefas
Formulação de questões	Comum	Ler com precisão uma caixa de bigodes, a fim de formular questões a partir de dados.	Compreender a diferença entre uma questão de resposta única (determinista) e uma inferencial (estocástica).
	Especializado	Compreender a diferença entre a leitura que os alunos fazem entre um diagrama de dispersão e um diagrama interquartis.	Compreender a qualidade e pertinência das questões estatísticas colocadas pelos alunos.
Recolha de dados	Comum	Fazer cálculos e medições corretas de quantidades.	Construir questionários e grelhas de registo de recolha de dados reais.
	Especializado	Compreender as estratégias de medição dos alunos.	Antecipar as dificuldades dos alunos em perceber os prós e contras de

			escolherem uma amostra aleatória ou não.
Análise de dados	Comum	Calcular medidas estatísticas descritivas, como por exemplo, média, moda e mediana.	Navegar no “valor típico” (medidas de tendência central) e no “sinal no ruído” (variação) nos contextos estatísticos.
	Especializado	Identificar as propriedades matemáticas da média que podem ser difíceis de entender para os alunos.	Perceber que os alunos podem calcular a média aritmética de um conjunto de dados sem olhar para o contexto dos mesmos.
Interpretação dos dados	Comum	Interpretar corretamente o significado matemático do conceito de valor de p.	Julgar a adequação de um nível de significância escolhido por um investigador.
	Especializado	Compreender a interpretação dos alunos da conceção do valor de p.	Antecipar o excesso de generalização dos alunos da expressão <i>significativo</i> .

Uma proposta de conhecimento para ensinar Estatística com modelação

O modelo de Groth (2007) foi inspirador na presente investigação por mim desenvolvida, devido a importância que os contextos, ou seja, conhecimentos não matemáticos têm no trabalho com o ensino profissional. Assim, este modelo do conhecimento estatístico de Groth foi basilar, mas optei por o designar antes por conhecimento para ensinar Estatística, embora só seja focado no conhecimento do conteúdo. Esta opção deveu-se ao facto de o termo *conhecimento estatístico para ensinar* poder parecer redutor, podendo facilmente ser interpretado apenas como conhecimento dos conceitos e procedimentos estatísticos, o que não era o que aqui pretendia. Devido à complexidade inerente à modelação e ao estudo em si, que tem muitas dimensões, optei por focar-me no conhecimento do conteúdo que é em si mesmo bastante complexo. No entanto, o estudo tem em consideração as orientações curriculares, pois a opção foi pelas tarefas de modelação, e tem igualmente em conta conhecimento sobre os alunos e suas formas de aprendizagem, considerando a importância das expectativas e interesses dos alunos tendo em atenção as áreas profissionais.

No quadro 4 apresento uma ligação com os conteúdos que podem emergir numa tarefa de modelação estatística e os exemplos terão por base os de Groth (2007), mas

adaptados a este estudo. Neste quadro foi feito um cruzamento entre os vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística (assim por mim denominado e explicado anteriormente) (Groth, 2007) com as várias fases do ciclo de modelação (Ferri, 2006) já abordadas no capítulo anterior e que foi adotado neste estudo. Esta proposta é um modelo novo que adotei neste estudo para análise de dados.

Quadro 4: Aspetos do conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação para o estudo das distribuições bidimensionais (adaptado de Groth, 2007)

Fases da modelação	Tipos de conhecimento	Conhecimento matemático	Conhecimento não matemático
Compreender a situação para construir uma representação real da situação	Comum	Reconhece a presença de variáveis numa situação e a possibilidade de estarem associadas/correlacionadas.	Identifica situações reais em que é provável o surgimento de relações entre variáveis.
	Especializado	Reconhece eventual tendência dos alunos para lidarem com demasiadas variáveis que podem emergir da situação real, provocando dispersão; Reconhece a possibilidade de os alunos inventarem associações indiretas.	Reconhece eventual desconhecimento dos alunos sobre contextos da situação em estudo; Antecipa eventual dificuldade dos alunos em formular questões geradoras de situação de modelação.
Simplificar/estruturar a situação para construir um modelo real	Comum	Seleciona variáveis emergentes da situação real que intervêm em modelo com potencialidades para exploração; Hipotetiza sobre a natureza de eventuais relações entre as variáveis	Sabe programar uma recolha de dados eficaz a partir de fontes diversas (realidade, Web, ...) Sabe construir instrumentos de recolha de dados adequados (questionários, tabelas, ...) Operacionaliza recolha de dados.

	Especializado	<p>Proporciona oportunidade de discussão sobre a natureza das variáveis identificadas e da sua relação;</p> <p>Proporciona esclarecimento sobre variáveis dependentes/independentes;</p> <p>Esclarece sobre a decisão de medidas.</p>	<p>Reconhece possíveis incorreções dos alunos na construção de instrumentos de recolha de dados;</p> <p>Identifica possíveis erros cometidos pelos alunos que enviesam ou comprometem a recolha de dados e proporciona oportunidade de esclarecimento.</p>
Matematizar a situação para construir um modelo matemático	Comum	Constrói gráficos e modelo de regressão.	Constrói modelos matemáticos a partir de dados organizados em tabelas e com recursos tecnológicos (EXCEL, calculadora gráfica,...)
	Especializado	<p>Reconhece eventual tendência para os alunos não construírem tabelas adequadas, a partir dos dados (necessidade de limpeza de dados), a fim de serem trabalhados em sala de aula;</p> <p>Proporciona esclarecimento acerca de uma adequada organização dos dados em tabelas e de que forma influencia a construção do diagrama de dispersão e modelo matemático.</p>	Reconhece possíveis incorreções dos alunos, relativamente à organização dos gráficos e tabelas e proporciona oportunidade de esclarecimento apelando ao conhecimento da situação real.
Trabalhar matematicamente para obter resultados matemáticos	Comum	<p>Reconhece a adequabilidade da equação da reta de regressão linear ao conjunto de dados (aparecimento de <i>outliers</i>);</p> <p>Calcular o valor do coeficiente de correlação linear;</p> <p>Reconhece que duas variáveis podem estar associadas positivamente,</p>	Percebe o significado do valor do coeficiente de correlação no contexto real e se a reta de regressão linear é um modelo que se ajusta aos dados.

		negativamente e terem uma associação não clara.	
	Especializado	Reconhece dificuldades dos alunos no estabelecimento da relação entre o valor do coeficiente de correlação e a intensidade e sinal com o grau de associação entre duas variáveis; Promove esclarecimentos sobre a equação da reta do modelo de regressão linear obtida e, no caso de existirem <i>outliers</i> , que ajuste poderia ser feito e qual a alteração no valor do coeficiente de correlação.	Reconhece possíveis erros na interpretação do valor do coeficiente de correlação e proporciona esclarecimentos tendo em conta a situação real e dados recolhidos; Reconhece dificuldades dos alunos na interpretação das variáveis explicativa e resposta no contexto real e promove esclarecimentos apelando à situação real; Distingue modelo real de modelo matemático.
Interpretar os resultados para tirar conclusões sobre o que o modelo diria da realidade estudada	Comum	Reconhece a importância de testar o modelo matemático e solicitar cálculos para determinar previsões no intervalo de possibilidades.	Compreende que é necessário interpretar os resultados matemáticos obtidos a partir do modelo, tendo em conta a realidade.
	Especializado	Reconhece possíveis erros de interpretação de resultados matemáticos oriundos de uma utilização incorreta do modelo matemático.	Antecipa interpretações incorretas dos alunos a partir dos resultados matemáticos obtidos e promove esclarecimentos apelando ao sentido crítico tendo em conta o que conhecem da situação real.
Validar o modelo para apreciar a sua razoabilidade e o seu	Comum	Compreender os resultados matemáticos obtidos a partir do modelo matemático e/ou	Reconhece que os valores obtidos a partir de um modelo conduzem

valor face à situação de partida		coeficiente de correlação, tendo em conta o seu sinal e ordem de grandeza, permitindo compreender em que condições ou para que amostra um modelo matemático pode ser ou não válido.	a possibilidades e que o modelo pode apresentar algumas limitações, de acordo com o contexto.
	Especializado	Antecipa dificuldades na validação do modelo matemático e escolha de um outro, caso necessário.	Antecipa dificuldades na comparação dos resultados matemáticos com a realidade e validação do modelo; Proporciona oportunidade de discussão apelando à comparação dos resultados matemáticos com os dados reais e conclusão sobre a validação do modelo, assim como, validação ou não das conjecturas inicialmente estabelecidas.

Síntese

É importante que um professor possua competências em várias áreas e domínios. Não pode apenas ser detentor de conhecimento na sua área científica, mas possuir conhecimentos relacionados com os seus alunos e aprendizagens, contextos da escola, currículo e instrucional. A atividade do professor requer uma combinação de saberes académicos e científicos com outros gerados na prática. Para além disso, é influenciado pela sua vertente pessoal e social.

Um bom conhecimento da Matemática para ensinar implica não só conhecimento do conteúdo como também em torná-lo claro e perceptível para os alunos, de modo a permitir elaborar tarefas exigentes e promover uma atividade matemática significativa. O

conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem pode constituir uma base para planejar o ensino e desenvolver o conhecimento profissional para ensinar. Isto implica ter em conta as suas conceções, motivações e interesses, as diferentes formas de conhecimento e visão da Matemática, os aspetos da comunicação, as atitudes, normas e relações interpessoais. A análise que os professores fazem dos alunos e o conhecimento que estes têm sobre eles influencia a forma como o professor faz a gestão curricular, nomeadamente na planificação, a criação de tarefas, no que diz respeito ao grau de estruturação, natureza e sequência dessas tarefas e questões a colocar, materiais e recursos a ter em conta, condução das aulas e modos de avaliação.

O conhecimento do currículo de Matemática implica, por parte do professor, um conhecimento das ideias centrais que o orientam, que favorecem uma compreensão conceptual e lhe permite ter uma capacidade crítica acerca de recursos e manuais e que o vão influenciar na planificação e no modo como este adapta e/ou seleciona tarefas dos manuais, cria tarefas e procura na internet outros materiais e tarefas propícios ao desenvolvimento de novos ambientes de aprendizagem.

O conhecimento instrucional comporta a preparação da atividade letiva, a sua condução em sala de aula e a reflexão que sobre ela desenvolve. É este conhecimento que fundamenta e dá sentido às várias opções que toma nessas diversas fases.

O conhecimento profissional do professor estatístico para ensinar é algo a ter em conta, porque a Estatística sendo apontada por vários autores como uma disciplina distinta da Matemática, necessita de um quadro conceptual próprio sobre o conhecimento estatístico. Nas várias perspetivas sobre o conhecimento estatístico para ensinar parece existir um reconhecimento que o conhecimento estatístico, sozinho, não assegura as capacidades e competências profissionais requeridas para o ensino da disciplina, sendo necessário considerar outras componentes como o conhecimento dos alunos e os seus processos de aprendizagem, conhecimento didático específico e o conhecimento das práticas de ensino.

Neste estudo, o foco é o conhecimento para ensinar Estatística com modelação, considerado como o conhecimento estatístico para ensinar (Groth, 2007) presente nas diversas fases de desenvolvimento do ciclo de modelação (Ferri, 2006). As fases do conhecimento estatístico apresentadas anteriormente por Burgess (2007) e Groth (2007) contemplam tanto o conhecimento comum como o conhecimento especializado sendo relacionadas com as fases do conhecimento estatístico. Considerando as fases da

modelação matemática, é fácil conseguirmos encaixar e relacionar essas fases com os vários tipos de conhecimento estatístico para ensinar. Neste contexto, a Estatística é uma boa ferramenta para resolver problemas quotidianos através da realização de tarefas de modelação em sala de aula. A partir da criação de situações reais e pertinentes para os alunos e envolvimento dos mesmos na criação de conjecturas e problemas, mobilizando para isso o conhecimento extra matemático, estes conseguem fazer a recolha de dados, análise e interpretação dos mesmos, confrontando-os e comparando-os com a realidade e refletindo sobre a validação dos modelos e conjecturas iniciais. Como já foi referido, adotaremos neste estudo um modelo próprio e adaptado de Groth (2007) para a compreensão do conhecimento para ensinar Estatística, através da realização de tarefas de modelação estatística, onde se cruzam as várias fases do ciclo de modelação de Ferri (2006) com os vários tipos de conhecimento referidos por Groth (2007).

Prática de ensino da Matemática

Conhecimento profissional e práticas de ensino

Estudos iniciais sobre as práticas de ensino consideravam-nas associadas à ação, ao agir e a aspetos comportamentais (Ponte & Chapman, 2006). Esse conceito tem evoluído e Boaler (2003) descreve práticas como sendo atividades recorrentes e normas que se desenvolvem nas salas de aula ao longo do tempo, em que professores e alunos se envolvem. Neste contexto, as práticas dos professores podem ser vistas como “atividades que se realizam regularmente, levando em consideração o seu contexto de trabalho, e os seus significados e intenções. Isto inclui a estrutura social do contexto e a sala de aula, escola, comunidade, estrutura profissional e sistema educacional e social.” (Ponte & Chapman, 2006, p. 21). As práticas estão essencialmente relacionadas com o conhecimento instrucional, embora todos os outros as influenciem. O conhecimento profissional que o professor tem influencia a sua prática, em particular o modo como seleciona, cria, planifica e adapta tarefas, a forma como conduz e gere as suas aulas e a reflexão que faz. As tomadas de decisão em sala de aula e o rumo que a aula toma estão relacionadas com os vários domínios do conhecimento que o professor tem (Ponte & Chapman, 2006), destacando-se o conhecimento instrucional. O facto dos professores trabalharem colaborativamente poderá influenciar a sua prática: observar os pares, partilhar experiências, produzir materiais, planificar em conjunto, refletir sobre as aulas

leva a uma ponderação e uma comparação entre aquilo que o professor faz e a forma como os seus pares fazem, mobilizando para todo este processo o seu conhecimento profissional. Ball (2001) refere que o professor ao conhecer e compreender os seus alunos, ao conhecer matemática, ao organizar o conteúdo, ao criar tarefas apropriadas, ao ser capaz de trabalhar colaborativamente e ao refletir sobre a sua prática, influencia as suas práticas de ensino. Ponte e Chapman (2006) referem que as práticas são influenciadas pelos vários tipos de conhecimento que o professor tem, nomeadamente do currículo. Num estudo efetuado com professores, revelou que eles tinham uma visão clara das experiências matemáticas necessárias, pois foram capazes de envolver os alunos, e sentiram-se preparados para investigar o raciocínio dos alunos e compreensão. As práticas desses professores foram fortemente influenciadas pelo conhecimento que fizeram do currículo, que incluía foco na matemática, características de tarefas, materiais, ferramentas e representações, adaptações aos alunos e conexões. Também Ponte (2011) refere que os professores são capazes de aprender e alterar as suas práticas desde que as mesmas não sejam forçadas, isto é, sigam “um trajeto profissional natural de desenvolvimento” (Ponte, 2011, p. 7), onde refere algumas fases fundamentais da sua prática e que é influenciada pelo conhecimento que possui no que diz respeito à forma como planifica, como conduz as aulas e a reflexão que faz.

Quadro 5: Fases das práticas de ensino (Ponte, 2011, p.7)

Planificação	Objetivos curriculares Estrutura da sala de aula (introdução/exploração/discussão) Tarefas Materiais Organização do trabalho dos alunos Gestão do tempo Avaliação
Condução	Apresentação de tarefas e negociação do trabalho e das normas (contrato) Comunicação em sala de aula Negociação de significados matemáticos Tomada de decisões de acordo com o desenrolar da aula
Reflexão	Os objetivos do currículo foram cumpridos? Os alunos aprenderam o que foi pedido? A planificação foi adequada? As ocorrências na sala de aula foram tratadas adequadamente?

Seguidamente passarei a descrever cada uma das fases das práticas de ensino.

Planificação de aulas

Para o senso comum, e para a maioria dos professores planificar significa ter um fio condutor que o oriente durante a aula, no entanto esse fio condutor poderá ter desvios para os quais os professores deverão estar preparados. Neste contexto, a planificação deve ser entendida como uma previsão do que se pretende fazer e estar sujeita a reajustes sempre que necessários.

Para tentar compreender a construção do conhecimento profissional a partir das práticas de ensino é necessário entender como é que o professor pensa e faz. Segundo Clark e Peterson (1986), são consideradas três fases da ação do professor no que respeita às suas práticas de ensino: pré-ativo; interativo e pós-ativo. Estes autores defendem que o pensamento pelos professores durante a aula é distinto do que é feito antes e após a aula. Pacheco (1996) refere-se às fases pré-ativa e pós-ativa por “planificação do professor”, o que significa que essa planificação não só engloba os processos de pensamento que antecedem uma aula assim como o processo de reflexão sobre o que aconteceu nessa aula e implicações em aulas futuras. Daqui conclui-se que este processo de planificar não é estanque. Também Artzt e Armour-Thomas (apresentado em Leikin & Zazkis, 2007, p.122) apresentam um modelo onde são visíveis as influências entre objetivos, conhecimento e crenças nas práticas de ensino dos professores em três momentos em que esta se divide: antes, durante e após as aulas, assim como entre a prática dos professores nesses três momentos e os objetivos, conhecimentos e crenças.



Figura 9: Modelo cíclico de ensino de Artzt e Armour-Thomas (Leikin & Zazkis, 2007, p. 122)

Embora seja evidente a relação prática-conhecimento e conhecimento-prática, segundo Leikin e Zazkis (2007), os professores sabem que aprendem algo através das suas práticas, só não compreendem bem o quê. Os autores afirmam, ainda, que os professores aprendem através da sua prática de três formas distintas: planificando a aula de acordo com o que conhecem dos alunos, aprendendo com as ideias corretas e/ou inesperadas dos alunos e aprendendo com as perguntas surpreendentes dos seus alunos, sobretudo através das situações “imprevistas (e surpreendentes)” (p. 124).

Pode-se ainda dizer que planificar é “converter uma ideia ou um propósito num curso de ação” (Zabalza, 1992, p. 47), ou ainda, “planificar consiste em ordenar o curso da ação que se pretende seguir, dando-lhe um sentido prático e orientado para as direções desejáveis” (Pacheco, 1996, p. 105).

Para Zabalza (1992), no processo de planificação estão presentes:

Um conjunto de conhecimentos, ideias ou experiências sobre o fenómeno a organizar, que atuará como apoio concetual e de justificação do que se decide; um propósito, a fim ou meta a alcançar que nos indique a direção a seguir; uma previsão a respeito do processo a seguir que deverá concretizar-se numa estratégia de procedimento que inclui os conteúdos ou tarefas a realizar, a sequência das atividades e, de alguma forma, a avaliação ou encerramento do processo (p. 48).

Existem múltiplas razões que levam os professores a planificar. Clark e Peterson (1986) sugerem algumas: (i) responder a uma necessidade imediata do professor, de modo a minimizar a incerteza; (ii) como um meio para o ensino, de modo a permitir a conhecer, organizar, selecionar, criar materiais seguindo uma orientação temporal; (iii) e escolher o método de trabalho dos alunos, como organizá-los ou ainda antever como iniciar uma tarefa.

O professor costuma planificar obedecendo a uma determinada sequência e objetivo. No entanto, durante a condução da aula, muitas vezes são necessários reajustes. Por exemplo, em estudos iniciais, a planificação começava por especificar os objetivos; selecionar as atividades de ensino; organizar as atividades de ensino; e apresentar a forma como vai avaliar (Clark & Peterson, 1986). Posteriormente, Pacheco (1996) menciona que os professores começam por apresentar os conteúdos a lecionar, contemplando paralelamente aspetos como as fases da aula, o tempo para cada fase e as fontes a recorrer;

em seguida consideram as situações de ensino que passam pelas estratégias a usar, visando a motivação e envolvimento dos alunos; e por fim a análise dos objetivos a atingir.

Neste contexto, a planificação é entendida como uma componente essencial no processo ensino. Para Kraemer (2008), por um lado, os professores têm, quotidianamente e ao longo do ano letivo, a responsabilidade de selecionar e conceber experiências de aprendizagem baseadas nos conteúdos dos programas e, por outro lado, têm de estar preparados para responder às necessidades e interesses dos seus alunos, ideia esta também defendida por Pacheco (1996). Para tirar o máximo proveito de oportunidades de ensino imprevistas que possam surgir no decurso das interações educativas é necessário preparação. A planificação de uma experiência de ensino tem que ter em consideração diversos fatores que a podem influenciar. Segundo Kraemer (2008, p. 5), o professor tem que:

- (i) determinar o que é que os alunos podem aprender num determinado momento, a partir daquilo que eles já sabem e já fazem (conteúdos matemáticos a aprender); (ii) selecionar e/ou criar atividades e tarefas e encadeá-las umas nas outras de tal maneira que os alunos possam atingir os objetivos que o professor fixou para eles; e (iii) explicitar aquilo que os alunos vão descobrir/aprender nestas condições e como o vão fazer (aspeto teórico e metodológico da planificação).

De acordo com Pacheco (2001) e Canavarro (2003), os professores planificam, ou para satisfazer as suas necessidades pessoais, reduzindo assim, a incerteza e a ansiedade que o seu trabalho lhes cria, escolhendo uma orientação que permite ter confiança; ou porque a planificação permite escolher os objetivos a alcançar no termo da didática: planificam para prever que conteúdos deveriam ser aprendidos, que materiais deveriam ser escolhidos, que tarefas devem organizar, e que distribuição do tempo efetuar. A planificação funciona como o meio para rever, estudar, selecionar e organizar materiais e para pensar na sequência e tempo do curso de ação estabelecido; ou então, os professores que chamam planificação às estratégias de atuação durante o processo de instrução, planificam para saber o modo de organizar os alunos, como iniciar a atividade, que aspetos de referência utilizar na avaliação.

A maioria dos professores não segue exatamente um modelo linear e a planificação que inicialmente elabora antes da aula, muitas vezes sofre reajustes na própria aula. Muitas vezes os imprevistos da aula levam a que seja necessário o reajuste

da planificação e a sua adequação à realidade dos alunos, no que diz respeito às suas respostas, por vezes imprevistas, atitudes e comportamentos. Essas decisões que se tomam em sala de aula poderão ser bons momentos de reflexão para futuras aulas e novas planificações.

Seleção, criação e adaptação de tarefas matemáticas

A seleção de boas tarefas não constitui uma garantia para o desenvolvimento de uma aprendizagem consistente e rica. A forma de as propor, apresentar ou as conduzir em sala de aula influencia a forma como a aprendizagem se desenvolverá.

A planificação e a preparação da prática letiva a realizar na sala de aula requerem, da parte do professor, um trabalho cuidadoso para que esta seja apropriada aos objetivos a atingir. Na verdade, a seleção de tarefas é tão importante como a forma como estas são exploradas na sala de aula, pois as tarefas estão associadas às diferentes dimensões do conhecimento do professor para ensinar e colocam dois problemas: a forma como o professor as elabora e as apresenta aos alunos e a forma como o professor as integra e explora nas atividades da sala de aula (Azevedo, 2009).

O envolvimento pessoal do professor na seleção ou construção das tarefas, a aplicar em sala de aula é um passo fundamental na planificação para a sua apresentação na aula, uma vez que a sua função não deve ser só motivar os alunos para a atividade numa tarefa selecionada, mas selecionar tarefas que motivem os seus alunos para a atividade (Azevedo, 2009).

Na preparação da prática letiva elaborar tarefas motivadoras pode não chegar para promover a aprendizagem dos alunos. Não basta motivar os alunos, as tarefas deverão proporcionar momentos ricos de aprendizagem, onde seja possível apresentarem várias representações e envolverem-se em atividade matemática. Stein e Smith (1998) referem que a abordagem às tarefas se pode fazer através de diferentes níveis de exigência cognitiva, que vão desde o simples apelo à memorização ou recurso a procedimentos sem qualquer significado, até tarefas que exigem usar procedimentos, desenvolvendo conexões com os significados, explorando relações entre várias formas de pensar.

Estes autores apresentam um modelo que caracteriza as três fases por que passa uma tarefa: forma como ela surge no currículo ou em manuais escolares; forma como ela é apresentada e conduzida pelo professor; e modo como os alunos a exploram. A primeira fase corresponde às tarefas tal como aparecem nos materiais curriculares (currículo,

manuais, cadernos de fichas e outros materiais auxiliares). Numa segunda fase, em sala de aula, as tarefas são apresentadas aos alunos pelo professor. Por fim, a terceira fase corresponde à atividade matemática desenvolvida pelos alunos e sua envolvimento e motivação. Os alunos, pouco habituados a tarefas mais exigentes, exercem normalmente pressões sobre os professores, através de pedidos de ajuda, obrigando-os frequentemente a mudar a natureza da tarefa, desde a fase de apresentação até à sua implementação: “A sua tendência fortalecida por anos de experiência na escola era esperar até que alguém, normalmente o professor, lhes mostrasse como fazê-lo” (Stein & Smith, 1998, p. 271). Esta pressão para levar o professor a mostrar como se faz tem como consequência, muitas vezes, transformar um desafio que exige raciocínio, numa tarefa de baixo nível cognitivo, que pode traduzir-se na simples aplicação de um procedimento.

Apesar disto, podem existir diferentes estratégias de ensino possivelmente adequadas e, deste modo, será ao professor que cabe reconhecer as alternativas e conhecer-se a si próprio, sabendo até que ponto é capaz de usar cada uma dessas estratégias (Ponte, Matos & Abrantes, 1998), pelo que, a capacidade de decidir se determinada estratégia de ensino é a mais adequada, pode passar pela experiência que pode adquirir-se fazendo e refletindo sobre o que se faz, principalmente em relação ao ambiente de trabalho na sala de aula e à natureza das tarefas a propor aos alunos (Azevedo, 2009).

Pacheco (2001) adverte “se é difícil encontrar um modelo único de planificação, pois não haverá um estilo específico que seja mais apropriado que um outro, mais fácil será constatar que a atividade didática é a unidade básica da planificação” (p. 115). De facto, na perspectiva de Pacheco (2001) é a atividade ou a tarefa que dá o sentido prático à ação didática. Para Gimeno (1989), as tarefas “são elementos decisivos em torno dos quais os professores estruturam a sua ação” (p. 304), apresentando-se como “uma categoria significativa que os professores levam em conta quando planeiam a ação” (p. 304).

Em suma, a atividade de ensino inclui uma sequência organizada de tarefas ou ações, cujo objetivo primordial é a aprendizagem de determinados conteúdos pelos alunos. Os autores acima citados consideram que a atividade em si mesma é uma estrutura complexa de variáveis a que tem que se dar resposta às questões: que tipo de tarefa se escolhe?; qual a natureza desta?; qual o seu papel?; que tipo de conhecimento está em jogo?; e quais as motivações e obstáculos presentes no processo?

Existem vários tipos de tarefas que podem ser propostas aos alunos e cabe ao professor a decisão de escolher a que melhor se adequa, tendo em conta o objetivo que se pretende alcançar, a cada tópico matemático, alunos e turmas. A mais conhecida de todas é o exercício. Mas há outros tipos de tarefa, como os problemas e as investigações. Por vezes também se fala em tarefas de modelação e projetos. Uma mesma questão pode ser para uma pessoa um problema e para outra um exercício. Segundo Ponte (2003), as tarefas têm quatro dimensões: o grau de dificuldade, a estrutura, o contexto e o tempo necessário para a sua realização. Tendo em conta as duas primeiras dimensões referidas, os exercícios são considerados tarefas simples e de resposta fechada; os problemas são considerados tarefas fechadas, mas com um grau de dificuldade mais elevado; as tarefas exploratórias são consideradas fáceis, mas com um grau de estruturação aberto e por último, as tarefas de investigação são consideradas mais complexas e abertas. Existe por vezes uma certa dificuldade na distinção entre tarefa de investigação e tarefa exploratória (Ponte, 2003), porque:

É complicado saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos. No entanto, uma vez que atribuímos importância ao grau de dificuldade das tarefas, é preferível termos uma designação para as tarefas abertas mais fáceis e outra designação para as mais difíceis. (Ponte, 2003 p. 5)

Também é referido outro tipo de tarefa: o projeto, que é, em geral, mais prolongado no tempo do que as tarefas anteriormente referidas, pois implica uma metodologia de trabalho mais elaborada para que se consiga chegar a conclusões. Quanto à dimensão contexto, a tarefa pode ser contextualizada numa situação real ou formulada em termos puramente matemáticos. Skovsmose (2000) indica ainda um terceiro tipo de situações, a que chama de “semirreais”: situações que à primeira vista parecem reais, mas que na prática são abstratas. Existem vários tipos de tarefas formuladas em termos de situações reais ou semirreais que aparecem com frequência no ensino da Matemática: exercícios, problemas de aplicação e tarefas de modelação. São estas tarefas de modelação que foram o foco de atenção neste estudo.

O professor ao selecionar uma tarefa de um manual, por exemplo, poderá alterá-la tendo em conta os seus alunos e sofrendo alterações de natureza cognitiva diferentes. Até a forma como os alunos a trabalham pode ser de natureza diferente. Relativamente à condução da tarefa o professor deve ter cuidado com o tipo de intervenções que faz, para

que esta não perca o nível cognitivo esperado inicialmente. Uma simples “dica” poderá fazer perder o nível de exigência e desenvolvimento pretendido (Franke, Kazemi & Battey, 2007; Stein & Smith, 1998).

Para a seleção, criação e preparação das tarefas muitos aspetos devem ser tidos em conta: o tipo de tarefa nunca esquecendo qual é o objetivo a alcançar e o contexto; o grau de estruturação e as quatro dimensões já referidas por Ponte (2000); os alunos, suas motivações e aprendizagens; os recursos disponíveis; as conexões possíveis quer entre temas matemáticos, quer entre outras áreas do saber e por último, a antevisão de dificuldades. A criação ou seleção de tarefas matemáticas é complexa e deve partir de problemas de elevada exigência cognitiva, promovendo a envolvimento dos alunos na atividade matemática, permitindo diversas abordagens, estabelecimento de conjecturas e generalizações. Deste modo é possível promover bons momentos de discussão (Franke, Kazemi & Battey, 2007). Como já foi referido existem vários tipos de tarefas e todas elas cumprem um objetivo a nível cognitivo e os professores devem promover vários tipos de tarefas. No entanto, todas elas devem constituir momentos de aprendizagem desafiadores.

Para Ponte (2005) “reduzir o ensino da Matemática à resolução de exercícios comporta grandes riscos de empobrecimento nos desafios propostos e de desmotivação dos alunos” (p. 4). Por outro lado, a simples seleção de tarefas de elevado nível cognitivo não garante, por si só, que os alunos se envolvam cognitivamente na resolução da tarefa (Franke, Kazemi & Battey, 2007). Existe uma variedade de fatores que podem interferir e reduzir o nível de exigência cognitiva numa tarefa. Para que a aprendizagem dos alunos se torne rica é necessário que os alunos se envolvam regularmente, de forma ativa e produtiva, na resolução de tarefas matemáticas cognitivamente desafiadoras. A tomada de decisão sobre as tarefas a propor aos alunos cabe ao professor, pois é ele que tem a responsabilidade de proporcionar oportunidades de aprendizagem aos seus alunos. Nesse sentido, vários autores (NCTM, 2000; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009) referem-se a esta atitude reflexiva e crucial do professor. NCTM (1991) faz algumas recomendações relativamente às preocupações dos professores quanto ao processo de seleção, criação e adaptação das tarefas: o conteúdo matemático, os alunos e suas aprendizagens. Quanto ao conteúdo matemático, NCTM (1991) refere que uma tarefa deve transmitir uma ideia adequada do que é fazer matemática e incluir contextos que proporcionem o desenvolvimento de aptidões apropriadas. Relativamente aos alunos, o professor deve ter em conta as suas aprendizagens, motivações, dificuldades e vivências

anteriores. Por último, quanto às aprendizagens dos alunos, o professor deve ter em conta a forma como os alunos aprendem, proporcionando neste sentido tarefas que sejam adequadas às suas necessidades.

Segundo Canavarro (2003), as tarefas da aula constituem um aspeto fulcral da planificação, que o professor seleciona tendo em mente o conhecimento matemático e o conhecimento curricular, nomeadamente os objetivos que pretende desenvolver. Antever as reações dos alunos é uma preocupação do professor nesta fase, que procura adaptar as suas propostas e estratégias às respetivas turmas. Para além dos alunos, o professor tem em conta constrangimentos como os horários, os recursos disponíveis, materiais, e o próprio currículo e sistema de avaliação.

Para Ponte (2001), “a planificação não se esgota na escolha da tarefa envolvendo outros aspetos, tais como, depois de decidir a tarefa, ainda há mais que planificar. Isto inclui tomar decisões acerca do tempo, organização e gestão da turma, e avaliação. Quanto tempo deve a turma trabalhar sobre a tarefa? Irão trabalhar individualmente, em grupos pequenos ou em grande turma? Como é que os alunos obterão feedback do trabalho realizado? Estas decisões dependem da tarefa apresentada, do currículo e dos constrangimentos do contexto, e dos objetivos valorizados pelo professor” (p. 56).

Para finalizar, há que pensar num aspeto crucial: como gerir e conduzir as aulas de modo a cumprirem e satisfazerem todos os requisitos já mencionados? A forma como um professor gere e conduz uma aula, tendo em conta, as tarefas, alunos, conteúdos a lecionar e avaliação estão diretamente relacionados com o papel que o professor assume e leva os alunos a assumir no processo ensino aprendizagem.

Gestão e condução de aulas

O professor é o protagonista na condução da aula, é a ele que compete decidir quais as tarefas a desenvolver, como orientar a condução na sala de aula, que diálogos estabelecer com os alunos e como organizar o trabalho na sala de aula para que os alunos desenvolvam uma atividade matemática significativa. O professor quando pensa nas suas aulas e nos materiais que vai construir ou usar, não pensa só nas tarefas. Quando planifica, existem várias ações que dependem do professor e outras dos alunos que influenciam a concretização temporal das tarefas.

Na gestão e condução das aulas, os professores devem ter em conta aspetos como: as fases, tempo, recursos, gestão de conflitos e de imprevistos, reajustes em tarefas e planificações e organização dos alunos. Segundo Canavarro (2003, p. 49):

Na condução de aula são os alunos que mais parecem estar na origem das decisões interativas do professor, nomeadamente a sua predisposição para a aula, a adesão à tarefa, o seu envolvimento na atividade, as dúvidas que colocam. Manter os alunos envolvidos na atividade da aula constitui a principal preocupação do professor, que em simultâneo tem de gerir todos os imprevistos que nela surgem e fazer opções pelo curso de ação a seguir, nomeadamente, na organização da aula, gestão do tempo letivo, formas de trabalho dos alunos. Este curso de ação é muitas vezes infletido em relação ao previsto, fruto de um processo de aproximações sucessivas em que o professor vai avaliando o sucesso das opções que toma na orientação que pretende dar à aula. A criação de um ambiente de trabalho propício à aprendizagem é uma das suas responsabilidades principais na aula. Para além disso, compete-lhe promover um discurso compatível com o tipo de atividade matemática a desenvolver, e que no enquadramento curricular atual, passa essencialmente por reservar aos alunos um papel importante na construção do conhecimento matemático.

Entende-se que o professor na gestão e condução das aulas deve propor aos alunos tarefas que os envolvam no seu próprio processo de aprendizagem, criando deste modo, um ambiente propício a este, fazer a gestão de conflitos e de imprevistos que possam surgir durante a aula e assim tomar decisões que o levem a reajustes da planificação inicialmente prevista.

Passemos seguidamente a desenvolver os vários aspetos inerentes à gestão e condução das aulas.

Estrutura das aulas

A estrutura das aulas pode contemplar várias fases de modo a favorecer a aprendizagem matemática dos alunos. Tendo em conta o tipo de aula, assim o número de fases de aula que podemos contemplar. Se o professor optar por uma aula expositiva, existe uma fase única que corresponde ao expor de ideias e apresentação de exemplos por parte do professor, assumindo desta forma os alunos um papel passivo. Se ao invés a opção recair sobre uma aula exploratória, onde se irão desenvolver tarefas exploratórias, de investigação ou de modelação, as fases de aula poderão ser quatro: a fase introdutória e de apresentação da tarefa, a fase de implementação e produção de trabalho por parte dos alunos, a fase que corresponde à comunicação e discussão de resultados partilhada por

todos e por último, uma fase onde o professor proceda a uma sintetização de resultados e conceitos (Stein *et. al.*, 2008).

Segundo Stein e Smith (1998), qualquer aula deve iniciar-se com um momento introdutório, onde o professor poderá fazer uma breve revisão de conteúdos lecionados na aula anterior com a resolução de alguns exercícios por parte dos alunos. Pode ainda por optar que sejam lecionados tópicos matemáticos novos, ou ser proposta uma tarefa que leve o aluno à descoberta e neste sentido, inicialmente essa tarefa terá que ser bem explicada para que os alunos a compreendam e entendam o seu objetivo. Caso opte por propor uma tarefa, numa primeira fase (introdução da tarefa), o professor deve em alguns minutos ler a tarefa, explicar o que se pretende com esta e as fases que os alunos terão que passar. Deve indicar os recursos a usar, como os alunos se vão organizar e tempo de duração para cada fase de trabalho, explicando desta forma que a tarefa é desafiadora porque serão os alunos a assumir o papel mais ativo na construção do seu conhecimento, assumindo o professor um papel mais de orientador ou de guia (Anghileri, 2006). Os professores devem ter a preocupação em precaver-se quanto à compreensão que os alunos têm da tarefa e se sintam motivados para a realizar (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). Numa fase seguinte, o desenvolvimento da aula, diz respeito ao trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em grupos. Os alunos deverão envolver-se no processo de aprendizagem e para isso é necessário que o professor planifique a aula nesse sentido, apresentando tarefas que levem o aluno a descobrir por si mesmo, assumindo o professor, um papel de guia (orientador). Existindo uma tarefa, nesta segunda fase que corresponde ao desenvolvimento da tarefa, o professor deverá atender às solicitações dos alunos, tendo o cuidado de não direccionar respostas e não dar indicações que conduzam a respostas, mas sim dando dicas e colocando questões no sentido destes, refletirem, discutirem com os colegas, caso o trabalho seja desenvolvido em grupo, para que os alunos progridam e consigam chegar a resultados, tirar conclusões, apresentando-as posteriormente à turma. Durante esta fase o professor deve ter em conta aspetos que passam pela gestão do tempo, pois terá que garantir que seja realizada a fase de discussão. Ao colocar questões aos alunos, estas deverão ser desafiadoras e com o objetivo de ajudar a estruturar o pensamento para que a fase de discussão seja enriquecedora e um momento de partilha e de reflexão para todos. Ao ouvir as respostas dos alunos durante esta segunda fase, cabe ao professor o papel de organizar a ordem de apresentação dos grupos de modo a que todas as contribuições sejam positivas e importantes para a discussão (Stein *et. al.*, 2008).

Numa fase posterior, a conclusão da aula, se for apresentada uma tarefa, o professor deverá promover uma discussão coletiva da tarefa, intervindo no sentido de promover um debate onde sejam apresentadas e discutidas as conclusões a que os alunos chegaram e deste modo sintetizarem as ideias matemáticas mais importantes. Na fase de discussão da tarefa, o professor deve organizar a turma, tendo em conta o que foi vendo e ouvindo, estabelecendo uma ordem para as apresentações e acima de tudo, durante a discussão, assumir o papel de moderador gerindo as intervenções, colocando questões aos vários alunos e promovendo a discussão de modo a que se consiga comparar resultados, discutir e chegar conjuntamente a conclusões. Deste modo o professor promove não só a comunicação matemática, como também o desenvolvimento do sentido crítico e poder de argumentação dos seus alunos, explicitação de ideias matemáticas, ajudando-os a construir o seu próprio conhecimento de uma forma mais consciente, crítica e de maior qualidade (Ruthven, Hofmann & Mercer, 2011). Pode acontecer o surgimento de novos conceitos, estabelecimentos de conexões com conteúdos já aprendidos anteriormente, assim como o reforço de processos matemáticos transversais como: a resolução de problemas, a comunicação e raciocínio matemático. Mais do que a comparação e o confronto das resoluções dos alunos, é imprescindível contribuir para que realizem novas aprendizagens relevantes, quer a nível de conceitos e de procedimentos, quer a nível do modo de fazer matemática (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). Por último, é importante que o professor faça uma síntese das ideias matemáticas apresentadas e discutidas e sistematize as conclusões principais, levando os alunos a estabelecer conexões com outros conceitos e aprendizagens anteriores.

Caso não tenha sido proposta uma tarefa, o professor deverá tentar perceber se os alunos compreenderam o que foi explicado através do questionamento e resolução de exercícios de aplicação da matéria lecionada. Neste contexto, alguns autores mencionam que o tipo de tarefas que é proposto influencia o pensamento dos alunos. Stein e Smith (1998) referem que o modo como os alunos aprendem a pensar matematicamente é influenciado pelo tipo de tarefas que lhe são propostas.

A fase de discussão em sala de aula é apresentada por alguns autores (Stein *et. al.*, 2008) como bastante importante para as discussões matemáticas e comporta um conjunto de cinco práticas: antecipar, monitorizar, seleccionar, sequenciar e estabelecer conexões. A prática antecipar realiza-se ainda durante a planificação e passa pela previsão e antecipação de respostas dos alunos e como propor a tarefa de modo a alcançar o

pretendido, delineando estratégias e relacionando essas estratégias com os conceitos, procedimentos ou representações de modo a que os alunos trabalhem. Antecipando as resoluções dos alunos, os professores ficam mais aptos para explorar todo o potencial das tarefas para as aprendizagens dos alunos e tomar decisões com base em critérios relacionados com a aprendizagem matemática (Canavarro, Oliveira & Menezes (2012). Ainley e Lutley (2007) referem que os professores mais experientes, possuem um repertório de “competências de atenção” que lhes permite identificar os aspetos cognitivos e afetivos dos seus alunos. A prática monitorização, é realizada em sala de aula e está relacionada com o acompanhamento que o professor realiza ao trabalho dos alunos, observando o que fazem os grupos, colocando questões que levem à reflexão sobre a evolução da produção matemática e à exploração de novas ideias em discussão com os colegas. A prática de selecionar surge no final da realização do trabalho autónomo. O professor tendo em conta o que observou, seleciona os alunos e ideias matemáticas que lhe parece mais pertinente para partilhar, procurando pontos de vista, estratégias de resolução e diversidade de respostas que cumpram os objetivos da tarefa. A prática de sequenciar decorre simultaneamente com a anterior, uma vez que cabe ao professor estabelecer uma ordem de apresentação de ideias que permitam um encadeamento lógico e perceptível do trabalho matemático desenvolvido. O estabelecimento de conexões poderá ocorrer durante ou após a discussão.

Cengiz, Kline e Grant (2011) apresentam um modelo de questionamento que requer a utilização criteriosa de perguntas, durante a discussão, por parte do professor, de modo a que os alunos participem ativamente nesta fase. Essas questões visam a reflexão matemática de modo a encorajar o pensamento matemático.

Práticas de utilização de tecnologias no ensino da Matemática

As calculadoras gráficas e os sensores estão vinculados ao ensino/aprendizagem da Matemática no ensino secundário (ME, 2004) que os sugere como “meios incentivadores do espírito de pesquisa”, sendo “o seu uso obrigatório” (ME, 2004, p. 15). Estes recursos tecnológicos possibilitam a exploração de tarefas matemáticas, onde se incluem:

Modelação, simulação e resolução de situações problemáticas, condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas e investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática. (ME, 2004, pp. 15-16)

O uso dos computadores:

Permite atividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória. (ME, 2004, p. 16)

Com o aparecimento do quadro interativo, o computador tornou-se, cada vez mais, uma mais-valia na sala de aula. E, por sua vez, este é mais um instrumento que aumenta a motivação dos alunos e até do próprio professor. Relativamente a questões relacionadas com atividades de modelação, Matos (1997) considera que o computador constitui um passo decisivo para trabalhar com os alunos uma matemática mais *realista* na medida em que se reduzem os obstáculos que têm a ver diretamente com o cálculo e com operações rotineiras, dando mais tempo para a realização da tarefa. A utilização de dados obtidos a partir de situações reais proporciona à de resolução de problemas algo que tem que ver não apenas com aspetos de motivação, mas sobretudo com o facto de serem percebidas relações entre a matemática e o mundo que nos rodeia. Refere ainda que a facilidade com que os computadores podem ser manipulados contribui para encorajar uma abordagem experimental e indutiva da matemática, desenvolvendo a construção de generalizações a partir de múltiplas observações e criando subsequentemente a necessidade da demonstração matemática (Matos, 1997).

É fundamental, em primeiro lugar, conhecer as ferramentas computacionais e atender às suas limitações, características e requisitos próprios, quando se pretende utilizá-las na modelação matemática. Ao professor cabe ainda o papel decisivo de avaliar a adequação das ferramentas computacionais às propostas pedagógicas. São diversas as ferramentas com grandes potencialidades para o apoio a atividades de modelação matemática a nível do ensino básico e secundário. A escolha das tecnologias poderá influenciar fortemente a qualidade da produção dos alunos quando trabalham com modelação matemática. Por exemplo, se numa tarefa de modelação, os conteúdos a emergir forem relacionados com as distribuições bidimensionais, certamente será mais enriquecedor, recorrer ao EXCEL, que é sem dúvida mais vantajoso relativamente à calculadora gráfica. Permite em simultâneo traçar várias linhas de tendência nos diagramas de dispersão, calcular o coeficiente de determinação e solicitar a construção da função correspondente ao modelo de regressão, permitindo deste modo e tendo em conta

o contexto real, escolher com maior facilidade o modelo que melhor se ajusta à nuvem de pontos. No entanto, a questão que se coloca é: quais são as práticas do uso das tecnologias na sala de aula? Muitos professores ainda se mostram apreensivos e receosos em usar tecnologias na sala de aula. Embora todos os programas de Matemática enfatizem o uso das tecnologias, nomeadamente calculadoras e computadores, muitos são os professores que tentam ignorar estas indicações. Ponte e Serrazina (1998, p. 3) refere que:

Não deixa de ser significativo constatar que a calculadora, um instrumento de trabalho muito valorizado pelo atual programa (2007) tanto para a realização de cálculos simples como para efetuar explorações, não tem qualquer expressão no discurso de muitos professores.

No que diz respeito à utilização de *software* educativo, na generalidade os professores raramente o fazem, alegando mesmo que teriam que perder muito tempo para explicar o funcionamento dos programas aos alunos, perdendo assim tempo de aula, necessário e imprescindível para preparar os alunos para o exame. Muitas vezes e na grande maioria das situações, os próprios professores não dominam essas ferramentas e como tal evitam-nas. Num estudo apresentado por Fernandes (2004) no ProfMat é mesmo referido que alguns professores desconhecem estes meios. Muitos professores não optam por usar tecnologias porque não têm recebido formação nessa área e como tal preferem não introduzir essa vertente na sua prática. Em suma, podemos adiantar que o facto de os professores não recorrerem à tecnologia em sala de aula, implica não implementarem tarefas de modelação, uma vez que modelação e tecnologia estão fortemente relacionadas.

Reflexão sobre as práticas de ensino

Numa sociedade em constante transformação, competitiva e exigente, torna-se complicada a adaptação a essas mudanças. Cabe a qualquer pessoa desenvolver capacidades de intervenção crítica que se traduzam numa verdadeira transformação da sociedade.

O precursor do conceito de *reflexão*, ou *pensamento reflexivo* em educação, foi John Dewey. De acordo com Dewey (1910), a função do pensamento reflexivo, é o de transformar uma situação complexa numa *situação que seja clara, coerente, ordenada, harmoniosa*. Significa que, a melhor forma de pensar é pela reflexão uma vez que o pensamento reflexivo permite tornar uma situação mais clara, através de um encadeamento ordenado de ideias com vista a um fim comum. Dewey (1910) considera

a existência de dois momentos no ato de pensar: 1) quando ocorre um problema e se impõe a necessidade da sua resolução (chamada fase pré-reflexiva); 2) quando pesquisa o material necessário para a solução do problema (chamada fase pós-reflexiva). Entre estas fases, este autor identifica cinco fases inerentes a todo este processo. São elas designadamente: 1ª *Situação problemática* de incerteza e de dúvida, a qual este autor considera o primeiro momento de questionamento, surgindo de modo vago, uma ideia como resolvê-la; 2ª *Intelectualização do problema*, que implicará o desenvolvimento dessa ideia através do raciocínio; 3ª *Observação e experiência*, procurando-se provar as várias hipóteses e descobrir ou não a sua adequação; 4ª *Reelaboração intelectual* das primeiras sugestões; 5ª *Verificação*. Dewey considera igualmente, três atitudes necessárias promotoras da ação reflexiva:

a) *Abertura de espírito*, capacidade para ouvir outras opiniões, de perceber que pode haver possíveis alternativas e de admitir a possibilidade de erro; b) *Responsabilidade* implica a aceitação das consequências de uma determinada ação; c) *Empenhamento*, ou seja, adesão, entusiasmo e vontade de participar. Estas três atitudes são na opinião do autor, as componentes centrais da vida do professor reflexivo, que deverá ser responsável pela sua aprendizagem. A prática e a reflexão estabelecem uma interligação, uma vez que é no ato de refletir que o professor consegue identificar problemas e tentar arranjar soluções na perspetiva de melhorar a sua prática. Esta ideia é defendida por Dewey (1991) que chama a este ato pensamento reflexivo.

Também Schön (1991, 2000) defende uma forte componente de reflexão a partir de situações práticas reais, a que se designa *a epistemologia da prática*. Só desta forma, o profissional poderá sentir-se capaz de enfrentar as situações sempre novas e diferentes com que se vai deparar e, de tomar as decisões apropriadas. Este autor atribui grande relevância à prática de reflexão, estabelecendo alguns níveis de reflexão: conhecimento na ação; reflexão na ação, reflexão sobre a ação e reflexão sobre a reflexão na ação. O conhecimento na ação é definido como resultante da experiência e de reflexões anteriores. A reflexão na ação surge durante a ação e poderá levar a outras ações. Ocorre quando o professor reflete no decorrer da própria ação e a vai reformulando, ajustando-a assim a situações novas que vão aparecendo. O processo reflexivo pode caracterizar-se por movimentos constantes entre os acontecimentos e a tentativa de os compreender, procurando atribuir significado às experiências vividas. Para Schön (1992), embora este

processo ocorra em lapsos de tempo muito curtos, podem ser identificados vários momentos:

Existe, primeiramente, um momento de surpresa; um professor reflexivo permite-se ser surpreendido pelo que o aluno faz. Num segundo momento, reflete sobre esse facto, ou seja, pensa sobre o que o aluno disse ou fez e, simultaneamente, procura compreender a razão por que foi surpreendido. Depois, num terceiro momento, reformula o problema suscitado pela situação; talvez o aluno não seja de aprendizagem lenta, mas, pelo contrário, seja exímio no cumprimento de instruções. Num quarto momento, efetua uma experiência para testar a sua nova hipótese; por exemplo, coloca uma nova questão ou estabelece uma nova tarefa para testar a hipótese que formulou sobre o modo de pensar do aluno (Schön, 1992, p. 83).

A reflexão sobre a ação leva à reconstrução e reformulação: “Refletir sobre a reflexão na ação é uma ação, uma observação e uma descrição, que exige o uso de palavras” (Schön, 1992, p.83) e desenvolve-se após o acontecimento, isto é, no momento em que: “o professor pode pensar no que aconteceu, no que observou, no significado que lhe deu e na eventual adoção de outros sentidos” (Schön, 1992, p, 83). O olhar *a posteriori* sobre o momento da ação ajuda o professor a perceber melhor o que aconteceu durante a ação e como resolveu os imprevistos ocorridos. Por último a reflexão sobre a reflexão na ação surge também após a ação, mas apresenta um poder de reflexão analítico superior e uma capacidade retrospectiva aprofundada que influenciará a sua ação e prática futura. Trata-se de um tipo de reflexão “orientada para a ação futura, é uma reflexão pró-ativa, que tem lugar quando se revisitam os contextos políticos, sociais, culturais e pessoais em que ocorreu, ajudando a compreender novos problemas, a descobrir soluções e a orientar ações futuras” (Oliveira & Serrazina, 2002, p. 32). É um processo que fomenta a evolução e o desenvolvimento profissional do professor, levando-o a construir a sua própria forma de conhecer. Este tipo de reflexão podemos definir como meta-reflexão, leva o professor a desenvolver novos raciocínios, novas formas de pensar, de compreender, de agir e equacionar problemas. No entanto, Perrenoud (1993) apresenta um modelo alternativo a Schön, que se baseia na construção do saber profissional através da prática, de rotinas e de improvisação regulada. Para Perrenoud (2002), a prática reflexiva é a chave da *profissionalização do ofício*. No entanto, no seu entender, “não poderá haver profissionalização do ofício de professor se esta não for desejada, desenvolvida ou sustentada continuamente por numerosos atores coletivos, durante décadas, para além das conjunturas e das alternâncias políticas” (p.10). Perrenoud enuncia três argumentos a

favor da profissionalização: 1) Atendendo à evolução das condições e dos contextos de ensino, o professor deve tornar-se alguém que concebe a sua própria prática para enfrentar eficazmente a variabilidade e a transformação de suas condições de trabalho; 2) Se queremos que todos alcancem os objetivos, não basta mais ensinar, é preciso fazer com que cada um aprenda encontrando o processo apropriado; 3) As competências profissionais são cada vez mais coletivas no âmbito de uma equipa ou de um estabelecimento, o que requer sólidas competências de comunicação e de regulação reflexiva. Por outro lado, na opinião do autor, a atitude e a competência reflexiva apresentam diferentes modos de expressão: a) “Na ação, a reflexão permite desvincular-se da planificação inicial, corrigi-la constantemente, entender o que traz problemas, descentralizar-se e regular o processo em curso”; b) “*A posteriori*, a reflexão permite analisar mais tranquilamente os acontecimentos, construir saberes que cobrem situações comparáveis que podem ocorrer”; c) “Num ofício em que os problemas são recorrentes, a reflexão desenvolve-se também antes da ação, não somente para planificar e construir os cenários, mas também para preparar o professor para acolher os imprevistos e guardar maior lucidez”. (Perrenoud, 2002, p.199). Perrenoud (2000) apresenta algumas das características que o professor deve possuir no decorrer da sua prática reflexiva. São as seguintes: saberes metodológicos e teóricos; atitudes e uma relação autêntica com o ofício e o real; competências que se apoiam sobre esses saberes e atitudes, permitindo mobilizá-los em situação de trabalho e aliá-los à intuição e à improvisação, como na própria prática pedagógica. Na perspetiva de Perrenoud, (2002) o desenvolvimento de uma prática reflexiva, traz diversos benefícios. Nesse sentido, Santos (2000) refere:

Ano após ano, a realidade do professor pouco ou nada é alterada: os programas pouco evoluem, os alunos não mudam significativamente e as condições de trabalho são sensivelmente as mesmas. Deste modo, à força de serem interiorizadas, há um conjunto de ações que não são pensadas, nem escolhidas ou verdadeiramente controladas. (Santos, 2000, p. 41)

Santos (2000) menciona que o professor estabelece rotinas de modo a sobreviver no seu quotidiano na sala de aula, pois existem inúmeras variáveis a ocorrer. Neste mesmo contexto, Eraut (1994) refere que existe um número tão elevado de variáveis presentes em cada momento na sala de aula que, sem elas, dificilmente seria possível manter um esforço mental aceitável. No entanto, existem situações que levam o professor a não saber como atuar e neste caso há que ajustar os modelos já existentes. Nestas situações Perrenoud (1993) recorre ao modelo elaborado por Bordieu (1972), referindo-se aos

benefícios de um desenvolvimento de uma prática letiva: *habitus*. O *habitus* do professor é constituído por esquemas que face a situações diversas permite aos professores fazer reajustes. Para Perrenoud (1993), a ação pedagógica está constantemente sobre o controlo do *habitus*, de acordo com quatro mecanismos: uma parte daquilo que o professor faz são rotinas, que não exigem a mobilização explícita de saberes e de regras; mesmo quando se aplicam regras ou se mobilizam saberes, a identificação da situação e do momento oportuno provêm do *habitus*; a parte menos consciente do *habitus* intervém na micro regulação de toda a ação intencional e racional; na gestão de situações de urgência a improvisação é gerida por esquemas de perceção, decisão e ação que mobilizam de forma fraca o pensamento e os saberes explícitos.

A ação racional também faz parte do *habitus*. Assim, o professor conseguirá enfrentar situações imprevistas na sala de aula, apesar da planificação e preparação realizadas anteriormente. Estes imprevistos conduzem a um enriquecimento da sua prática, constituindo um novo patamar do *habitus*, resultante de uma situação de sala de aula. Podem surgir situações na sala de aula que advêm dos atores presentes e que exigem, por vezes, resposta imediata e que segundo Perrenoud (1996) não são fruto da reflexão, mas sim da espontaneidade. Essa espontaneidade não surge por acaso, mas sim como resultado do *habitus* do professor, pois este não improvisa, o que faz é mobilizar esquemas já interiorizados a que se pode chamar, segundo Santos (2000) de carácter, personalidade ou intuição. Perante estas situações não previstas, a postura de Schön é distinta da de Perrenoud. Enquanto um faz um apelo a um certo grau de reflexão, o outro explica este fenómeno através do *habitus*. Para Santos (2000), a reflexão pode ou não ser questionável, tendo em conta o sentido com que está a ser usada:

Se encararmos a reflexão como um ato consciente inerente ao ser humano, que reinterpreta permanentemente o passado, trazendo-o para o presente, isto é, um conceito alargado de reflexão, então compreendemos os pressupostos avançados por Perrenoud. No entanto, se nos estivermos a referir à reflexão como uma meta cognição, a garantia de ser uma realidade constante não é muito realista, se tivermos em conta a prática usual das nossas escolas. Se é possível aplicar-se em situações muito particulares, estamos ainda longe de que seja generalizada para as múltiplas situações que ocorrem no dia-a-dia do professor. (Santos, 2000, p. 44).

O conhecimento profissional do professor tem por base a experiência e a reflexão sobre essa experiência. A reflexão na ação e sobre a ação faz com que os professores decidam acerca do currículo e que eles próprios o construam, abandonando o papel de

simples executores das diretrizes provenientes do ministério e dos materiais curriculares, nomeadamente manuais escolares (Apple, 1997; Roldão, 1999). Através da reflexão sobre a prática, os professores podem alterar, intervir e reconstruir os currículos, de forma a conseguirem chegar a metas desejadas. Bound e Walker (1998) apresentam um esquema que traduz a influência entre o conhecimento e a prática, incluindo como aspeto primordial a reflexão:

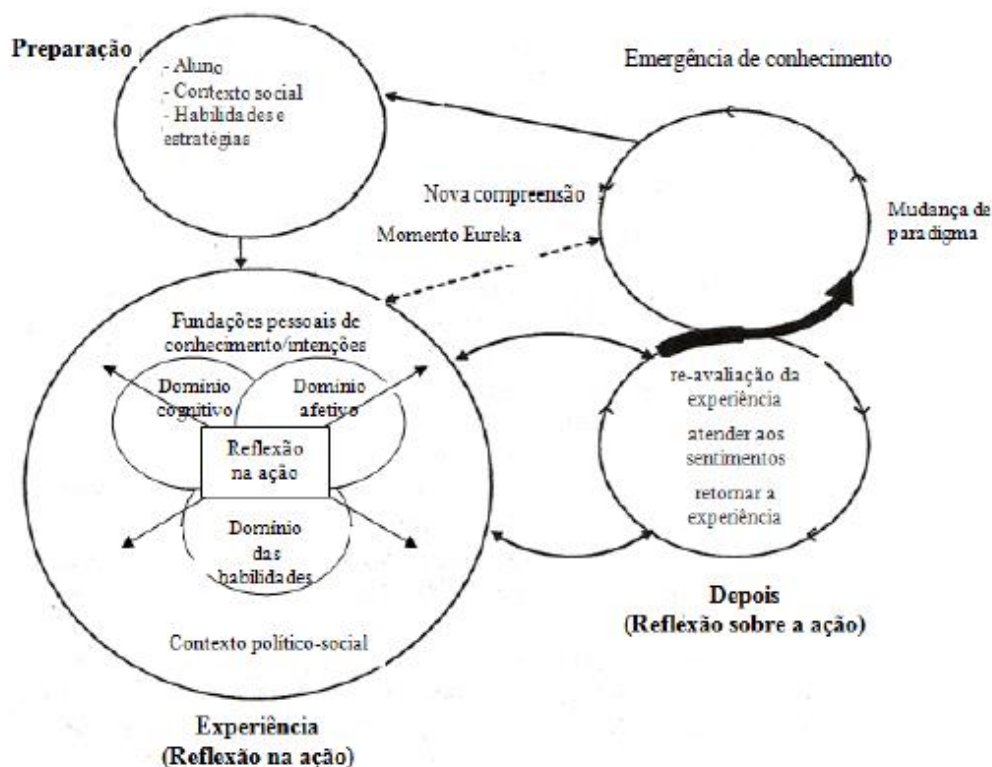


Figura10: Modelo do processo reflexivo para aprender com a experiência de Bound e Walker (1998)

No presente esquema, de Bound e Walker (1998) a reflexão aparece como meio desencadear do desenvolvimento do conhecimento e das práticas, devendo ser a reflexão realizada na ação e sobre a ação.

Assim uma prática reflexiva proporciona aos professores oportunidades para o seu desenvolvimento, tornando-os profissionais mais competentes e melhores. Para que este desenvolvimento aconteça é preciso assumir riscos, tomar decisões, mobilizar recursos, assumir as nossas fragilidades e dificuldades, o que implica exposição face aos outros.

De que forma, como e quando refletem os professores?

A reflexão não se dá num único momento e nem sempre ocorre da mesma forma e é uma capacidade que deve ser desenvolvida. Perrenoud (2002), considera que nem todos os professores refletem da mesma forma. Esta diversidade de reflexão depende do desenvolvimento cognitivo de cada um e da circunstância. O autor apresenta alguns fatores motivadores da reflexão, tais como: problemas a resolver; decisões a tomar; avaliação das ações; compreender o que está a acontecer; luta contra a rotina; melhoria da prática; trabalho em equipa. Essa reflexão pode ocorrer em vários momentos da vida de um professor: antes da aula e ainda antes de a preparar; em conversa com outros colegas; num momento de sala de aula; após a aula e vários outros momentos. As circunstâncias que levam o professor a refletir são variadas. Entre outras, podemos encontrar as seguintes: situações de conflito; casos de indisciplina; dificuldades de aprendizagem; objetivos que não se atingem; discussões em grupo; conversas entre colegas; entrevistas com pais (Perrenoud, 2002 p.42). No entanto, algumas circunstâncias da vida pessoal ou uma rotina na sala de aula podem levar à falta de reflexão. Um professor reflexivo é um professor que sente necessidade de criticar, avaliar-se, e procurar formas de melhorar. É importante que seja capaz de reconhecer os seus erros, falar e discutir com os colegas e a partir de diálogos e observações de outros, aproveitar para melhorar e enriquecer a sua prática, nunca deixando de vista a preocupação de como saber ensinar aos seus alunos. Só desta forma o professor estará aberto à mudança e corresponder às exigências da sociedade em que vive.

Síntese

Vários fatores influenciam as práticas dos professores, nomeadamente: as conceções, crenças, as orientações presentes nos programas, as vivências, os alunos, a escola, os exames nacionais, a comunidade educativa, os pares e o trabalho que realizam com eles, a avaliação, o tipo de formação e a reflexão que fazem sobre a sua prática. As práticas são vistas como sendo atividades recorrentes e normas que se desenvolvem nas salas de aula ao longo do tempo, em que professores e alunos se envolvem. As práticas dos professores podem ser vistas como atividades e ações que se realizam regularmente, tendo em conta o seu contexto de trabalho, nomeadamente sala de aula, escola e

comunidade escolar. A prática é constituída por várias fases e todas elas são influenciadas pelo conhecimento profissional que o professor possui. As várias fases inerentes às práticas de ensino são a planificação das aulas, seleção e preparação de tarefas, gestão e condução das aulas e reflexão. Muitos professores recorrem à planificação e interpretam-na como um fio orientador para os guiar antes e durante as aulas. A maior dessas planificações comporta aspetos como: objetivos curriculares, estrutura das aulas ou unidades didáticas (fases e tempo), tarefas, materiais e recursos, organização dos alunos e avaliação. Essa planificação poderá estar sujeita a reajustes na aula e mesmo alterações posteriores. Na seleção e elaboração de tarefas outras questões se levantam: que tarefas propor? Com que objetivos? O tipo de tarefas que o professor propõe aos alunos pode influenciar o modo como eles aprendem e por essa razão alguns aspetos deverão ser tidos em consideração: objetivos a alcançar, alunos e suas aprendizagens, tópicos matemáticos envolvidos, grau de estruturação da tarefa, recursos a usar, conexões, previsão de respostas e dificuldades e avaliação da mesma. Na gestão e condução das aulas a forma como as tarefas são apresentadas, a comunicação em sala de aula, a negociação de significados matemáticos e as tomadas de decisão podem influenciar o rumo da aula. Muitas vezes surgem imprevistos e as tomadas de decisão e gestão de conflitos são alguns dos fatores que poderão influenciar o normal decorrer de uma aula, assim como o saber gerir estes aspetos. A forma como o professor reflete e se o faz influencia a sua prática. Os professores deverão ponderar acerca do cumprimento dos objetivos, quanto ao que foi aprendido, a adequação das planificações e tarefas e também sobre as ocorrências em sala de aula e a forma como as geriu. Todos estes aspetos e preocupações são elementos que deverão fazer parte das práticas de ensino de cada professor e que são influenciados pelo conhecimento profissional que possui e mobiliza.

Capítulo 4 - Metodologia

Opções metodológicas

Este estudo segue um paradigma interpretativo, com uma abordagem de natureza qualitativa.

Paradigma interpretativo

Se assumirmos um plano de análise mais global, em concordância com o que é defendido por Matos e Carreira (1994a), este estudo enquadra-se num paradigma interpretativo, interrogando a situação em estudo e procurando confrontá-la com outras situações conhecidas, bem como com teorias existentes, com o intuito de ajudar a gerar novas teorias e novas questões para a investigação (Ponte, 2006). O estudo enquadra-se no paradigma interpretativo dado que fundamentalmente visa compreender de que modo professores de Matemática de cursos profissionais evidenciam o seu conhecimento para ensinar Estatística, no ensino das distribuições bidimensionais, através da realização de tarefas de modelação, quando inseridos num grupo de trabalho colaborativo a criar, planificar, gerir e refletir sobre as tarefas.

Nesta investigação foi adotada uma metodologia que estuda os professores, num contexto de trabalho colaborativo e de sala de aula, de modo a compreender os seus pontos de vista e reflexões relativamente à implementação de tarefas de modelação estatística e de que forma estas poderão contribuir para o desenvolvimento do seu conhecimento para ensinar Estatística na gestão curricular do programa para os cursos profissionais. Na investigação interpretativa importa analisar não apenas o que é observável, mas também a sua conjunção com os significados, atribuídos pelos participantes e por aqueles com quem interagem, sem esquecer a dimensão social de construção desses significados (Erickson, 1986). A investigação interpretativa, no caso do ensino e aprendizagem, envolve considerar a sala de aula nas suas várias dimensões, analisar as influências recíprocas, observar cada ação, tendo em conta o contexto e a

perspetiva de quem a desenvolveu (Erickson, 1986). Isto pressupõe que o investigador se desloque para esse contexto e estabeleça relações de proximidade e confiança com os participantes cujas ações quer compreender. Uma investigação desta natureza procura, portanto, reconstruir a experiência social em que cada um vai elaborando significado, recorrendo-se para isso de métodos baseados diretamente nessa experiência ou próximos dela (Ponte, 2006). De acordo com estas ideias, o paradigma interpretativo enquadra-se nos objetivos desta investigação, permitindo o meu envolvimento, enquanto investigadora, no fenómeno em análise, a partir do trabalho colaborativo com as professoras. Pretendo também, compreender e descrever a partir dos pontos de vista das professoras, o seu trabalho orientado para a criação de tarefas de modelação estatística como parte impulsionadora na construção e evolução do conhecimento para ensinar Estatística, que é um dos objetivos do presente estudo. O desenvolvimento deste projeto com professoras remete para a escolha de uma abordagem compatível com a perspetiva interpretativa, possibilitadora de um envolvimento ativo e significativo do investigador no próprio fenómeno que é objeto de análise (Boavida, 2005).

Na investigação de carácter interpretativo o que está a ser observado é a noção que cada participante tem da realidade em estudo, sendo a validade interna conseguida através de vários procedimentos de triangulação. A triangulação consiste na utilização de várias técnicas de recolha de dados, para conseguir explicar o fenómeno de forma aprofundada, tentando compreender toda a sua riqueza e complexidade (Burns, 2000).

Abordagem qualitativa

Segundo Bogdan e Biklen (1994), as características da investigação qualitativa resumem-se a: (a) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal de recolha de dados. Nesta investigação, muitos dos dados são recolhidos em ambiente natural, na sala de aula de Matemática, já que é nesse contexto que se implementam as tarefas de modelação estatística e em reuniões de trabalho colaborativo, ambiente privilegiado no que diz respeito às observações e registos inerentes ao papel que cada professora desempenhou; (b) os dados recolhidos são de natureza descritiva. Os dados recolhidos assumem essencialmente a forma de palavras, incluindo transcrições de entrevistas a professoras, aulas, sessões de trabalho colaborativo e notas de campo. Além disso, os dados foram usados para ilustrar e sustentar resultados escritos, ricos em pormenores descritivos. Ao recolher dados descritivos procurei abordar

as situações em estudo de forma minuciosa, na tentativa de compreender de forma mais esclarecedora o meu objeto de estudo e assim dar resposta às questões de investigação formuladas; (c) os investigadores preocupam-se mais com o processo do que com o produto. Neste estudo, é fundamental identificar e interpretar o conhecimento específico para ensinar Estatística, no quadro de uma experiência de ensino com recurso a tarefas de modelação, sobre as distribuições bidimensionais, desenvolvida em contexto colaborativo por professoras de Matemática do ensino profissional. Desta forma, não se têm em consideração apenas os resultados finais, mas acima de tudo as opções, as atividades, os procedimentos e as interações desenvolvidas ao longo do estudo, nomeadamente em contexto de sala de aula e das sessões de trabalho colaborativo e ainda durante as entrevistas realizadas; (d) a análise dos dados foi realizada de forma indutiva. Com este estudo procurei, através dos dados recolhidos em contexto, aprofundar a compreensão da problemática em estudo, neste caso compreender como professores de Matemática que lecionam cursos profissionais convocam o conhecimento para ensinar Estatística no ensino das distribuições bidimensionais. Embora recorra a conhecimento prévio, suportado por investigações anteriores e modelos teóricos, não pretendo testar nenhuma hipótese, mas antes, contribuir para a construção de conhecimento novo/mais sólido sobre a temática abordada. Assim, só com o desenrolar do processo de recolha e de análise de dados foi possível construir “abstrações” relativamente ao objeto de estudo (Bogdan & Biklen, 1994); (e) o significado assume uma importância central, isto é, as perspetivas dos participantes têm importância crucial. Neste estudo, as perspetivas das professoras têm uma enorme importância no desenvolvimento de todo o trabalho colaborativo, na conceção, implementação de tarefas de modelação estatística contextualizadas e adequadas a cada curso profissional do 10.º ano, assim como a reflexão e avaliação que fazem desta experiência, desafios e dificuldades que surgiram no decorrer deste trabalho no que diz respeito à evolução do seu conhecimento profissional no âmbito da Estatística. A forma como a construção desse conhecimento se processou passou por uma primeira fase em que foram discutidos textos sobre a temática da modelação matemática de modo a proporcionar uma análise, reflexão e discussão conjunta visando a evolução de conceções e uma outra em que construímos tarefas que traduziram situações problemáticas trazidas do mundo real e que foram possíveis de ser modeladas matematicamente. As entrevistas foram úteis para questionar os participantes no sentido de perceber as suas perspetivas e tomar em consideração as experiências, do seu ponto de

vista, assim como a evolução dessas mesmas perspectivas e do próprio conhecimento para ensinar Estatística.

Qualquer que seja a opção metodológica, em particular a que segue uma abordagem qualitativa, é necessário considerarem-se critérios de qualidade. Como afirma Ponte (1994, p. 11):

A existência de padrões de qualidade é necessária, tanto por razões de ordem interna à comunidade de investigação, como por razões de ordem externa. De facto, para que os investigadores possam ser capazes de sentir confiança na relevância e valor da investigação, tanto para prosseguir e aprofundar o seu trabalho, como para influenciar todos aqueles que possam ter interesse nas suas questões, resultados e argumentos, precisam de ter segurança quanto à base teórico empírico da atividade.

Tal significa que para que os estudos tenham credibilidade e lhes seja reconhecida pertinência é necessário que tenham qualidade. Que critérios devem então ser considerados? Vários autores apontam critérios a ter em conta em estudos deste tipo. Por exemplo, Goetz e LeCompte (1984) indicam cinco critérios: (a) adequação, que diz respeito à formulação do problema e ao modelo geral do estudo, que nesta investigação são sustentados pela literatura existente; b) clareza, critério relacionado com a forma como o estudo de caso é relatado, garantido pelo respeito pelas opiniões das professoras, interpretando as suas ações e formulando as conclusões; (c) carácter completo, diz respeito ao estabelecimento de estratégias de recolha de dados (através de entrevistas, produção de materiais, observação de aulas e sessões de equipa colaborativa) e técnicas de análise de dados (procurando regularidades, padrões ou aspetos distintos nas professoras, através do uso de cores ou tabelas para identificação de padrões); (d) credibilidade, que se subdivide em dois critérios: validade e fidedignidade. A validade tem a ver com a precisão dos resultados. Por um lado, diz respeito ao modelo geral do estudo exigindo fundamentação dos conceitos essenciais, definição dos dados a recolher, e dos processos de recolha, organização, análise e interpretação dos dados. Por outro lado, tem a ver com os instrumentos utilizados. Os subcritérios da validade são: validade conceptual, validade interna e validade externa. Alguns autores discutem mais pormenorizadamente o critério da credibilidade. Goetz e LeCompte (1994) e Merriam (1988) assumem que a validade está relacionada com a previsão de resultados e o modelo geral do estudo. A validade conceptual diz respeito à caracterização dos seus conceitos chave e dos critérios operacionais para classificar dados como exemplos deste ou daquele

conceito. Neste estudo, diz respeito à identificação e clarificação dos conceitos chave: modelação matemática, conhecimento matemático e não matemático, conhecimento comum e especializado. Só há validade interna se as conclusões apresentadas corresponderem verdadeiramente a alguma realidade reconhecida pelos próprios participantes não sendo unicamente uma construção da imaginação do próprio investigador. Neste estudo, a validação interna dos casos foi realizada através da devolução das transcrições das entrevistas inicial, final e pré e pós aulas e, transcrições das sessões de trabalho colaborativo, com o objetivo de serem revistas pelas professoras. Deste modo, pude recolher a opinião sobre o seu grau de identificação com a imagem global que se revela dessa leitura, corrigindo alguns aspetos menos entendidos por mim e clarificando outros. Este processo de verificação pelos intervenientes é considerado por Stake (2007) como um mecanismo de verificação e triangulação, que pode contribuir com “observações” e interpretações importantes, fazendo às vezes sugestões quanto às fontes de dados. A validade externa diz respeito ao grau com que as representações obtidas podem ser legitimamente comparadas com outros casos. Este aspeto foi tido em conta, quando as conclusões que surgiram tiveram por base a comparação entre dois casos. Finalmente, a fidedignidade refere-se à questão de saber se as operações do estudo (recolha e análise de dados) poderiam ser repetidas, com resultados semelhantes. Diz essencialmente respeito aos instrumentos usados e à forma como são analisados os dados, mas é preciso ter em conta que os objetos que se estudam são multifacetados e sempre em evolução. Neste estudo, a análise e recolha de dados nos dois casos foi igual e no mesmo contexto, produzindo resultados semelhantes.

Segundo Ponte (1994), a credibilidade é um critério importante para a investigação porque se, por um lado, o problema em estudo deve ser pertinente e perceptível, por outro, a investigação deve ter qualidade e estar bem fundamentada:

Não se deve exagerar nem desvalorizar a importância do problema da credibilidade. Trata-se de um critério entre outros, que são igualmente importantes. De pouco serve uma investigação que se apresenta como muito credível, mas cujo problema é irrelevante, que é incompreensível, que está gravemente incompleta ou que é desadequada em relação ao problema proposto. Mas de nada serve, igualmente, uma investigação que não é minimamente credível. Muito especialmente, devemos valorizar a investigação criativa e de qualidade. (p. 13)

Para o caso dos estudos de caso, as autoras Goetz e LeCompte (1984) apontam ainda dois possíveis critérios adicionais, a utilizar para os estudos de caso de natureza

excepcional: a criatividade e o carácter único. Estes sete critérios estão relacionados com oito fases fundamentais do estudo: problema e objetivos do estudo; base teórica; modelo geral da investigação; seleção dos participantes, locais e circunstâncias; a experiência e os papéis do investigador; estratégias de recolha de dados; técnicas de análise de dados; apresentação, interpretação e aplicação das conclusões. Na sua grande maioria, são critérios que se aplicam não só a estudos de caso, mas a toda a investigação qualitativa.

Em suma, os critérios de qualidade de uma investigação, que siga uma abordagem qualitativa, têm que se preocupar com vários aspetos cruciais para que esta possa ser considerada pertinente, relevante, adequada ao problema e credível perante a comunidade científica de modo a ser tomada em conta.

Design de estudo

Como se pretendia estudar uma entidade bem definida, neste caso identificar e interpretar o conhecimento específico para ensinar Estatística evidenciado por professoras no quadro de uma experiência de ensino, com recurso a tarefas de modelação que envolvem distribuições bidimensionais, desenvolvida em contexto colaborativo por professoras de Matemática do ensino profissional de diversos cursos, a opção metodológica recaiu sobre dois estudos de caso, que foram duas professoras que lecionaram cursos profissionais distintos a turmas do 10.º ano de escolaridade. Um estudo de caso é uma descrição analítica intensiva e globalizante de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa, uma unidade social, visando conhecer os seus “como” e os seus “porquê”. É uma investigação com um forte cunho descritivo, que se efetua para descobrir o que existe de essencial, único e característico, no respetivo objeto de estudo (Merriam, 1988; Yin, 2003).

A nível ético, toda a investigação foi realizada, nomeadamente no que diz respeito às entrevistas e aulas áudio e vídeo gravadas, respetivamente, e assentou num consentimento informado, preservando o anonimato dos envolvidos. Para isso, foram contactados o órgão de gestão da escola (apêndice 1), o grupo disciplinar de Matemática da escola e os professores envolvidos, assim como foram pedidas autorizações aos Encarregados de Educação dos alunos das turmas envolvidas neste estudo (apêndice 2). Esses contatos tiveram como objetivo clarificar, de forma rigorosa, o projeto de trabalho

que se pretendeu desenvolver, apresentando sempre alternativas negociáveis (Cohen, Manion & Morrison, 2000).

Contexto colaborativo

Dado que pretendia compreender de que forma os professores evidenciam o seu conhecimento para ensinar Estatística através da realização de tarefas de modelação, procurei identificar contextos profissionais que fizessem emergir saberes profissionais das professoras envolvidas no estudo e partilhas dos mesmos. A forma facilitadora de o conseguir foi através do desenvolvimento de relações colaborativas que permitiram a partilha, a reflexão sempre baseada na confiança e respeito mútuos entre todas as envolvidas (investigadora e professoras). Neste sentido, Krainer (2011) considera como uma boa hipótese de trabalho manter a colaboração e a confiança mútua entre investigadores e professores como forma de promover o desenvolvimento de ambas as partes.

Sendo possível agrupar elementos de diferentes paradigmas, tais como sugere Boavida (2005), de modo a que se constituam como linha orientadora de uma investigação, considero que este estudo, para além de se inserir num paradigma interpretativo, também se integra num “paradigma de pesquisa cooperativa” (Reason, 1988a, p. 9) ou, no mesmo sentido, “paradigma colaborativo” (Reason, 1988b, p. 18).

Segundo Reason (1988a) e Heron e Reason (1997), uma pesquisa colaborativa é feita pelas pessoas *umas com as outras* e não pelos investigadores *sobre* as pessoas. Bednarz, Desgagné, Couture, Lebuis e Poirier (1999, p. 3) reforçam que essa é uma “investigação com os profissionais (em vez de sobre eles)”, que integra os seus pontos de vista na investigação. Neste tipo de investigação, a natureza do envolvimento dos participantes é abertamente negociada. Todos contribuem para o pensamento criativo, que é parte da investigação, e as relações estabelecidas são autenticamente colaborativas (Reason, 1988a).

Os professores, mais do que participantes na investigação empírica, são parceiros na investigação para o desenvolvimento do ensino e envolvem-se também na pesquisa, interessados “em pensar sobre o ensino e explorar formas de melhorar a aprendizagem” (Jaworski, 2002, p. 23).

Segundo Reason (1988a), o paradigma colaborativo pressupõe, ainda: (a) um processo de conhecer participativo e holístico, sendo fundamental construir relações de autêntica colaboração e desenvolver uma compreensão dos fenómenos em profundidade, no contexto da sua participação no sistema total; (b) uma subjetividade crítica, sendo necessário desenvolver uma consciência crítica e integradora que possibilite o uso da experiência subjetiva do investigador, sem se deixar obscurecer por ela; e (c) um conhecimento na ação, valorizando o conhecimento com base na prática. Isto não significa que a reflexão seja desvalorizada, mas antes que a pesquisa cooperativa envolve uma interação entre ação e reflexão (Reason, 1988b).

Uma investigação enquadrada neste paradigma pode, de acordo com Reason (1988a, 1988b), ser conduzida através do estabelecimento de grupos de pesquisa colaborativa, isto é de “grupos constituídos inteiramente para o propósito da investigação” (Reason, 1988a, p. 2). Nesses grupos, os processos de colaboração são negociados e reaprendidos continuamente, pelo que, à partida, apenas é possível estabelecer um grupo “no espírito da colaboração” (Reason, 1988a, p. 19), que poderá, eventualmente, evoluir para um grupo de pesquisa colaborativa, através de um conjunto de fases que incluem: a identificação de objetivos comuns a investigar e a aprofundar; o desenvolvimento de um modelo de prática; a implementação desse modelo; a reflexão sobre a experiência e a procura de sentido na globalidade da experiência. Os procedimentos adotados na presente investigação revêem-se nos aqui descritos, na medida em que, com o propósito de desenvolver um projeto que tem por objetivo compreender o conhecimento para ensinar Estatística das professoras que lecionam cursos profissionais e como fazem a gestão curricular deste programa com tarefas de modelação estatística, constituiu-se um grupo de trabalho colaborativo entre mim e três professores de Matemática, a partir da minha iniciativa enquanto investigadora. De facto, um grupo de investigação constituiu-se, usualmente, a partir da iniciativa de uma ou mais pessoas que pretendem desenvolver um projeto, que identificam um problema a explorar e procuram a colaboração de outros (Reason, 1988b).

Reason (1988b) salienta que poderão surgir algumas tensões na fase de estabelecimento do grupo, sendo necessário assegurar algumas condições: (i) o projeto concebido pelo iniciador deve fazer sentido para os restantes membros do grupo, que devem manifestar interesse pelo projeto; (ii) deve haver margem para a negociação, um contrato aberto; (iii) devem explorar-se as expectativas dos diferentes elementos do grupo

e analisar se há possibilidades de desenvolver um trabalho conjunto. Reunidas essas condições, pode avançar-se para a definição de um contrato entre todos os elementos do grupo, clarificando-se quais as exigências da investigação, como será operacionalizada, e qual o envolvimento de cada um. Nesta fase, é importante que o iniciador do projeto combine clareza com flexibilidade, garantindo que o projeto vai ao encontro dos seus desejos e necessidades, mas sem perder a possibilidade de negociação e de desenvolvimento de uma colaboração autêntica (Reason, 1988b). Numa fase seguinte, importa delinear um plano geral de investigação, que integre adequadamente ação e reflexão. A elaboração desse plano passa pela negociação dos papéis a desempenhar pelos vários participantes e pela possibilidade de esses papéis serem renegociados ao longo do projeto. Uma pesquisa colaborativa “é um empreendimento pluralista, em que diferentes pessoas com diferentes competências e interesses se juntam para colaborar” (Reason, 1988b, p. 27), pelo que se admitem papéis diferenciados entre os participantes, podendo haver diferenças, quer na qualidade, quer na quantidade das contribuições (Reason, 1988b; Reason, 1994). Em particular, o iniciador do projeto poderá agir como principal facilitador do processo de investigação (Reason, 1994).

Neste estudo, enquanto investigadora, apoiei as professoras a pensar sobre a natureza da pesquisa, envolvendo-as na discussão de leituras e tópicos matemáticos, respondendo às suas necessidades e na procura conjunta de caminhos. Tratou-se de implementar uma cultura de colaboração orientada para o desenvolvimento, que pretendeu desafiar as professoras a refletir sobre o sentido e as consequências daquilo que faziam, desafiando as suas práticas e pressupostos (Hargreaves, 1998). A colaboração identifica-se com um processo de aperfeiçoamento contínuo, construído através do diálogo e na ação, o que incentiva os professores a refletirem sobre a sua própria prática.

Frequentemente em sessões de trabalho colaborativo as relações assumem a forma de conversas (Olson, 1997). Neste sentido, a minha opção recaiu na criação de um contexto de trabalho onde houvesse lugar à partilha, discussão e elaboração de tarefas de modelação estatística para implementar em sala de aula, assim como à reflexão sobre episódios decorrentes da prática da sua implementação, esperando que daí decorresse uma maior compreensão sobre o conhecimento para ensinar Estatística das professoras. As conversas que se estabeleceram entre todas não foram um mero processo de troca em que cada um conta o que sabe, mas um processo que “evolui em torno dos objetos e situações no mundo dos participantes e conduz a conhecimento partilhado (...) onde cada

participante traz significado e questões para a conversa” (Olson, 1997, p. 21). Isso só é possível se garantirmos um sentido de igualdade entre todos os participantes, com oportunidades iguais, permitindo que cada professora se faça ouvir e ouça, descrevendo situações e partilhando vivências, dúvidas, sugestões. Segundo Duarte (2011), nem sempre é fácil, na medida em que o investigador traz normalmente consigo a voz da autoridade daquele que conhece mais e melhor, baseada em argumentos e explicações (Olson, 1997) e por vezes identificado pelos professores como tendo propósitos avaliativos (Erickson, 1986). Olson fala-nos de um “espaço” na conversa colaborativa, onde ocorre a transação de ideias e a negociação de significados, o *middle ground*, onde as pessoas se sintam seguras e arrisquem tornar público o seu conhecimento narrativo, mesmo verbalizando posições diferentes das socialmente aceites ou das visões do investigador. Tal implica confiança, disponibilidade para ouvir e saber que se é ouvido e respeitado, nas suas dimensões pessoal e profissional, criando laços progressivamente mais fortes com o grupo e diálogo, um entrelaçar de vozes que trazem mais compreensão e que informam cada vez mais as conversas (Boavida & Ponte, 2002).

No presente estudo, o grupo de trabalho colaborativo foi constituído por quatro professoras. Três delas são as participantes, duas constituem os estudos de caso deste estudo, e a outra professora é a investigadora. A Sara e Patrícia são as professoras caso deste estudo. Três destas professoras, investigadora, Sara e Filipa têm em comum a experiência de já terem lecionado, em anos anteriores, turmas de cursos profissionais e de, nesse ano letivo continuarem a fazê-lo. Patrícia teve, pela primeira vez, turmas de cursos profissionais, o que suscitou ainda maiores dúvidas e anseios por parte da docente. Para as professoras que já lecionaram cursos profissionais, a dificuldade maior surgiu quando, no programa, as orientações curriculares referem a realização de tarefas de modelação adequadas e contextualizadas a cada curso profissional e a cada conteúdo programático. Muitas questões se levantaram nesse sentido: Como planificar? Que recursos usar? Como abordar os vários tópicos? Relativamente às orientações metodológicas, os problemas que se levantam ainda são mais complexos, pois é sugerido a implementação de modelação matemática e eis que surgem mais questões: o que são? Como se aplicam? Como se criam tarefas contextualizadas? Como planificá-las tendo em conta o contexto? Que papel assumir? Quais os melhores recursos? Como avaliar?

A criação deste grupo de trabalho colaborativo não teve por objetivo apenas a criação de tarefas de modelação estatística contextualizadas a cada curso, que por si só já

seria bastante exigente, mas algo de maior dimensão. A importância de constituirmos um grupo de trabalho colaborativo começou por pretendemos compreender, em conjunto, o que é modelação matemática e o que são tarefas de modelação, refletir sobre os contextos e conexões e compreender como se planifica e interpreta este programa contemplando modelação matemática. Houve a intenção de conseguirmos clarificar conjuntamente vários aspetos como: planificar, papel a assumir pelo professor e pelos alunos, condução das aulas e fases que teriam de ser tidas em conta, e recursos. Todos estes aspetos foram cruciais e alvo de reflexão conjunta e anterior à criação das próprias tarefas a implementar em cada curso e por cada professora.

O grupo de trabalho colaborativo funcionou durante todo o ano letivo e as reuniões tiveram uma periodicidade mínima obrigatória quinzenal, sendo esse número alargado, sempre que se justificou. Todas as reuniões seguiram guiões previamente elaborados por mim e todos os materiais necessários para cada sessão foram organizados em ficheiros e identificados por datas e temas. As reuniões iniciaram-se em outubro de 2011, e foram realizadas 20 sessões de trabalho colaborativo (apêndices 3-21), com o objetivo de clarificar, num primeiro momento, o objetivo da investigação, entender expectativas e negociar um plano de trabalho aceite por todas. Numa primeira fase do trabalho de equipa, foram apresentados e discutidos artigos acerca do que se entendia por modelação matemática, tarefas de modelação, fases de modelação e ciclos de modelação, tendo por objetivo apresentar um enquadramento teórico que fundamentasse e sustentasse o trabalho que se iria desenvolver *a posteriori*. Posteriormente, durante o segundo período e até o início da lecionação do módulo Estatística, previsto para final de março/início de abril de 2012, as reuniões foram usadas numa primeira fase, para discutirmos propostas de conexões com as várias áreas profissionais que pudessem ser modeladas em sala de aula, visando o uso da Estatística como ferramenta auxiliar. Numa segunda fase, as reuniões tiveram como objetivo principal discutirmos e refletirmos sobre propostas de tarefas de modelação, baseadas nas conexões acordadas em sessões anteriores, por parte das professoras, tendo em conta os cursos profissionais e a utilização da Estatística como ferramenta auxiliar. Numa terceira fase, procurámos criar, elaborar e planificar as tarefas de modelação a propor aos alunos.

A partir de abril de 2012, momento onde se iniciou a observação de aulas com modelação estatística, as reuniões foram realizadas logo após a observação das aulas com o intuito de fazermos uma reflexão conjunta sobre a gestão da mesma, necessidade de

reajustes na planificação, em particular na tarefa e nas práticas de ensino na sala de aula. No final de junho, após a avaliação modular e antes da entrevista final e individual, a última reunião foi realizada com o objetivo de fazer uma reflexão conjunta sobre o ensino da Matemática com modelação estatística a cursos profissionais. Pretendeu-se assim, que também existisse uma reflexão sobre o que foi este desafio, o que aprenderam e de que modo a participação neste projeto contribuiu para que houvesse evolução no seu conhecimento para ensinar Estatística e alterações das práticas de ensino.

Nas reuniões colaborativas foram feitas reflexões conjuntas sobre a implementação das tarefas nas aulas e teria sido ideal que todas as professoras, para além da investigadora, tivessem observado algumas aulas das colegas com o intuito de melhor refletir sobre o que sucedeu e prováveis alterações e ajustes na planificação, assim como na forma como a aula decorreu, mas tal não aconteceu. Neste sentido e como já foi referido, foram visualizados episódios de aula vídeo gravados. A reflexão conjunta foi bastante importante para que todas compreendessem que conhecimento para ensinar Estatística evidenciaram e como evoluiu, comparativamente a anos anteriores e início do ano e o modo como passaram a encarar os cursos profissionais e a gestão curricular. Neste tipo de cursos, a carga horária inicial atribuída a cada turma é fixa, mas os professores têm a flexibilidade de puderem lecionar essas horas em outros dias e em outras horas, o que tornou possível a minha observação de aulas. O importante é que seja concluída a leção de todas as horas de modo a ser cumprido o elenco modular. Os professores podem antecipar aulas sempre que assim o desejarem e estas podem ser lecionadas num horário acordado entre o professor, alunos e diretor de curso. Neste contexto, a observação de aulas foi viável em qualquer altura que nos foi favorável e oportuno. Assim sendo, o trabalho colaborativo, teve a colaboração participativa da investigadora, dado que a própria já lecionou turmas de cursos profissionais e teve também turmas no ano letivo onde decorreu o estudo.

É apresentada, em apêndice (apêndice 22), uma tabela que sintetiza os assuntos tratados e o calendário de todas as reuniões de trabalho colaborativo, visando desta forma responder às questões de investigação.

O papel da investigadora

Numa investigação desta natureza, o investigador constitui o principal instrumento de recolha e análise de dados. Segundo Duarte (2011, p. 224),

a tolerância para a ambiguidade, procurando e infletindo caminhos em busca de significado, mais do que seguindo procedimentos óbvios ou protocolos pré-determinados, a sensibilidade ao contexto, aos espaços e aos tempos no processo de recolha de dados, estar a par das várias formas de que se pode revestir a sua interferência no estudo e ser um bom comunicador, constituem algumas das características a serem acauteladas pelo investigador (Merriam, 1988).

O meu papel enquanto investigadora variou consoante o contexto de trabalho. Nas sessões de trabalho colaborativo fui participante observadora, mas nas aulas de implementação das tarefas fui uma simples observadora, muito pouco participante. Nas sessões de trabalho colaborativo assumi dois papéis, tendo em conta as fases dessas mesmas sessões. Numa primeira fase, de cariz mais teórico, onde foram apresentados e discutidos textos e artigos sobre modelação matemática e ciclos de modelação, assumi um papel mais de “formadora”, no sentido que dei a conhecer artigos e textos sobre a literatura necessária, mas nunca impondo caminhos, pois foi discutido e escolhido conjuntamente o ciclo de modelação que foi adotado neste estudo. Numa segunda e terceira fases o meu papel foi de observadora participante, envolvendo-me nas discussões, colocando questões orientadoras, moderando o debate e lançando temas de discussão. Tive o cuidado de não dar opiniões já concebidas por mim no sentido de todas terem a oportunidade de discutir, partilhar e refletir sem constrangimentos. No primeiro caso (sessões de trabalho colaborativo), trabalhei em conjunto com as professoras, discutindo ideias e propostas de tarefas de modelação criadas por todas, orientando a discussão e reflexão sobre episódios das práticas de ensino a partir de clips de vídeos, procurando perceber os aspetos do conhecimento para ensinar Estatística que evidenciaram no planeamento, elaboração, implementação das tarefas, nas práticas de ensino e consequente reflexão sobre as ações.

Relativamente à observação das aulas, assumi o papel de observadora, mas pouco participante. O meu papel foi o de me tornar familiar e pouco intrusiva, de modo a limitar a minha interferência no ambiente de trabalho. Estive atenta ao ambiente de aula, registando ocorrências e acontecimentos, centrando-me sempre na professora e na forma como geria e conduzia a aula, prestando particular atenção à forma como lidava com

imprevistos, como fazia reajustes ao plano de aula e por vezes até à própria tarefa, baseando-me para isso num guião orientador.

Participantes no estudo

A escola

A escola escolhida fica situada no litoral Algarvio e está inserida num contexto socioeconómico que abrange classes sociais muito diferentes e de nacionalidades distintas. Para além disso, desde o ano letivo 2009/2010 que a escola faz parte de um mega agrupamento sendo constituído por uma escola secundária, uma escola básica 2,3, duas escolas do 1.º ciclo e duas escolas básicas integradas com jardim-de-infância. A escola, no ano letivo em que se desenvolveu o trabalho colaborativo, tinha cerca de 200 docentes e 1600 alunos dos vários ciclos de ensino. A sua oferta formativa contempla o pré-escolar, 1.º, 2.º. e 3.º. ciclos do ensino regular, CEF, ensino vocacional no 3.º. ciclo, ensino secundário regular, profissional e vocacional. Para além disso, ainda oferece Português Língua não materna, EFAS e ensino recorrente noturno. A escola dispõe de serviços de apoio e orientação, associação de estudantes e associação de pais e encarregados de educação. Devido à sua recente formação, o agrupamento de escolas ainda não tinha o projeto educativo de escola elaborado. Este começou a ser construído durante o ano letivo 2010/2011. No entanto, o agrupamento de escolas possuía um documento (anexo 6) onde constavam os seguintes princípios orientadores das linhas estratégicas de ação.

Existe uma preocupação acrescida sobre o sucesso dos alunos e para isso considerando, também, a Estratégia 2015, definida no PROGRAMA EDUCAÇÃO 2015, no que diz respeito aos objetivos, metas e indicadores de avaliação das escolas foi estabelecido para o ano letivo 2010/2011 um conjunto de objetivos e metas a atingir de modo a promover uma reflexão sobre a melhoria das aprendizagens dos alunos (anexo 6).

O agrupamento de escolas acolhe vários projetos de modo a envolver toda a comunidade educativa. Passo a destacar alguns: Jack Petchey Escxel; Um jornal mensal; Um espaço aberto aos alunos no âmbito da Matemática que presta apoio à disciplina de Matemática, prepara alunos para exames e explora *software* matemático; Desporto Escolar; Educação para a Saúde (este projeto insere-se no Programa Nacional de Saúde Escolar (PNSE); Centro de Aprendizagem (o centro de aprendizagem é um espaço onde

se pretende que o aluno possa estudar e realizar os seus trabalhos com possibilidade de acesso a materiais diversificados e apoio especializado e individualizado).

As turmas e cursos profissionais

As turmas selecionadas foram do 10.º ano de escolaridade do ensino profissionalizante. Porque o único módulo comum aos vários cursos é o de Estatística esse foi o tema escolhido. Durante esse ano letivo funcionaram vários cursos profissionais, tendo sido atribuídos três desses cursos às professoras Patrícia, Sara e Filipa, nomes fictícios.

Em conversas informais que fomos tendo no início do ano letivo, Sara referiu que a sua turma era constituída por 24 alunos, sendo muitos deles oriundos de turmas CEF e outros inscreveram-se neste curso devido à falta de aproveitamento escolar no ensino secundário regular. Sara mencionou que, pela conversa que teve com os alunos, estes tomaram esta opção, relativamente ao curso, porque gostavam de desporto e, uma grande maioria deles praticar atividades desportivas. Relativamente à Matemática, Sara disse que a primeira impressão que teve foi que os alunos não gostavam muito desta disciplina. Relativamente à avaliação diagnóstica, Sara demonstrou preocupação porque muitos alunos deixaram o teste em branco. Apenas os alunos oriundos do 9.º ano é que obtiveram classificações razoáveis neste teste. Sara embora se mostrasse apreensiva pelo facto dos alunos não terem feito o teste diagnóstico, mostrou otimismo, porque acreditava que com ajuda das colegas iria desenvolver estratégias e tarefas que promovessem motivação e gosto pela disciplina.

A turma de Patrícia era constituída por 17 alunas e pela conversa que teve com elas, a motivação para frequentarem este curso era muito grande. Inclusive, existiam alunas que frequentaram no ano letivo anterior o ensino secundário regular. Contudo, quando souberem que este curso iria abrir, não hesitaram em voltar ao 10.º ano. Todas as alunas referiram que gostavam imenso de crianças. Quanto à Matemática, a postura era bastante positiva, pois as alunas demonstraram que tinham pena que só tivessem Matemática no 1.º ano, pois achavam a disciplina interessante e útil. Quanto ao teste diagnóstico, embora Patrícia não tivesse na altura ainda os resultados, fez a correção e não lhe pareceu que as alunas tivessem grandes dificuldades.

Segundo Filipa, os seus alunos optaram por este curso por variadas razões: uns porque gostavam de cozinha e outros por ausência de outro tipo de oportunidades. A

maior parte destes alunos era oriundo de cursos CEF, o que se refletiu na realização do teste diagnóstico, pois passado pouco tempo já o tinham concluído, por não saberem responder às questões. Desta forma, a docente sentiu que a relação com a Matemática talvez não fosse a melhor.

As professoras

Foi o desejo compreender o conhecimento para ensinar Estatística dos professores, do ensino secundário profissional, quando integrados numa equipa de trabalho colaborativo a criar tarefas de modelação estatística, que esteve na base da minha opção. Daí a minha preocupação por ter procurado pessoas que pudessem desenvolver comigo o projeto, esperando, por esta via, alargar o meu entendimento acerca de um assunto que me interessava e com o qual me identificava enquanto também professora do ensino secundário profissional. A escolha das professoras foi facilitada porque eu já as conhecia de anos anteriores. Através de conversas informais, fui constatando as suas dificuldades, potencialidades e expectativas profissionais. A escolha destas professoras, para a equipa, recaiu sobre o facto de duas delas já terem lecionado turmas de cursos profissionais, em anos anteriores. A escolha da outra professora teve a ver com o facto de esta manifestar muito interesse em lecionar cursos profissionais e referir ser do seu agrado trabalhar em contexto colaborativo. Para além disso, todas elas quando souberam deste projeto, manifestaram voluntariamente vontade em integrar esta equipa de trabalho colaborativo, revelando bastante entusiasmo.

Durante o desenvolvimento do trabalho colaborativo e já numa fase posterior que coincidiu com a análise dos dados, optei por escolher apenas duas professoras para os estudos de caso. Essa decisão esteve relacionada com o trabalho limitado no tempo para obtenção de um grau académico e a profundidade da análise. Em síntese os critérios de seleção das professoras caso deste estudo foram: a) uma delas já ter lecionado a turmas de cursos profissionais e outra manifestar especial interesse em fazê-lo; b) serem da mesma escola; c) manifestarem, após conhecimento do objetivo do projeto, vontade em participar num trabalho desta natureza; d) demonstrarem vontade em trabalhar em equipa.

A decisão de contactar com três professoras prende-se com razões de vários tipos. Reason (1988a, 1988b, 1994) recomenda que os grupos de pesquisa colaborativa, na terminologia que usa, sejam pequenos, o que nestas condições o grupo constituído é adequado e propício à reflexão das práticas de ensino de cada uma, levando a novas

práticas. Este tipo de trabalho é propício à possibilidade de uma compreensão aprofundada sobre a prática de cada uma das professoras e a compreensão do conhecimento para ensinar Estatística. Existindo um grupo de trabalho pequeno, este desencadeia mais facilmente uma maior proximidade, confiança e contribui para a continuação de uma boa relação interpessoal entre todas nós, solidificando a relação já existente. Também, foi possível para cada uma das professoras confrontar-se e refletir sobre práticas que não eram suas, o que contribuiu para a interrogação sobre a sua própria prática e levou a um enriquecimento profissional e consequentemente evolução do conhecimento para ensinar Estatística.

A escolha definitiva destas três professoras, para integrar a equipa, iniciou-se no final do ano letivo 2010/2011, depois de saber concretamente o número de turmas/cursos que abriria no ano letivo 2011/2012, e foi facilitada porque o número de cursos que abriu coincidiu com o número de professoras que eu gostaria que integrasse a equipa de trabalho. Pelos motivos já apresentados anteriormente e após o grupo disciplinar no final do ano letivo 2010/2011 ter ficado a par do projeto, as três professoras mostraram de imediato vontade em participar no trabalho e a intenção passou finalmente a algo de concreto e certo. Nesse sentido e juntamente com a Diretora do agrupamento de escolas onde iria desenvolver-se este projeto foi formalizada por escrito a intenção destas três professoras virem a lecionar os três cursos profissionais a abrir. Tendo sido aceite este pedido por todas, as três professoras selecionadas foram a Sara, a Patrícia e a Filipa.

Recolha de dados

Merriam (1988) aconselha que nos estudos de caso qualitativos sejam utilizadas as três técnicas indicadas por Patton (1987) para a investigação qualitativa: entrevistas, observações diretas e recolha documental. Neste estudo procedi a registo não diferido e diferido. O registo não diferido, sob a forma de notas de campo, foi realizado durante e após a observação das aulas, durante as reuniões de trabalho com o intuito de anotar, de forma imediata, alguns aspetos do discurso, reações, opiniões, atitudes e ideias dos participantes, assim como interpretações e opiniões destes. As notas de campo, em particular, são entendidas neste estudo como um registo daquilo que o investigador “ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150) e pode mostrar-se muito útil durante as

entrevistas e a observação das aulas, como complemento ao gravador, para captar gestos, expressões dos intervenientes e outros aspetos eventualmente relevantes. As notas de campo revelaram-se úteis para registar várias observações, questões e comentários pertinentes para a investigação, que surgiram durante a recolha de dados, imediatamente após a observação das aulas e das sessões de trabalho colaborativo ou após as entrevistas.

O registo diferido foi realizado em áudio durante as entrevistas e, em vídeo durante as reuniões de trabalho colaborativo e vídeo durante as aulas de implementação das tarefas de modelação.

A recolha de dados iniciou-se em setembro de 2011 (conversas informais sobre as turmas) e decorreu até julho de 2012, com recurso a várias fontes de informação: professores, aulas, sessões de trabalho colaborativo e notas de campo, o que se revelou adequado numa modalidade de estudo de caso (Yin, 2003).

Entrevistas

A entrevista permite obter informações relativas a aspetos que não são diretamente observáveis numa dada situação e é um método apropriado às investigações qualitativas (Goetz & LeCompte, 1984). Há vários tipos de entrevista que se distinguem entre si quanto ao grau de estruturação e controle do discurso, profundidade, extensão e abertura das questões. Questões abertas ou de resposta aberta permitem ao entrevistado liberdade em tomar o rumo da resposta e mostrar a compreensão do assunto tal como ele o vê e o interpreta. Entrevistas semiestruturadas situam-se entre as que são orientadas pelo entrevistador por questões previamente redigidas e colocadas na situação de entrevista respeitando integralmente a sua formulação e sequência (entrevistas estruturadas) e aquelas em que a maior parte das questões emergem do fluxo da conversação e em que existe uma flexibilidade máxima para seguir qualquer direção que pareça apropriada (não estruturadas) (Patton, 2002).

Em particular, a entrevista longa, semiestruturada (Bogdan & Biklen, 1994; Fontana & Frey, 1994), é especialmente adequada para aceder ao mundo mental dos participantes, permitindo conhecer as suas conceções e perspetivas sobre o(s) tema(s) abordado(s). Registe-se, ainda, o carácter cumulativo da informação obtida através de entrevista na investigação qualitativa, já que cada momento de recolha de dados é enriquecido pela análise dos dados recolhidos em momentos precedentes (Bogdan & Biklen, 1994). A entrevista, tendo em conta o modo como é elaborada e conduzida, leva

a um melhor ou pior resultado. Segundo Patton (1987), na condução da entrevista é fundamental que o entrevistador não induza respostas pré-determinadas, faça perguntas claras e de aprofundamento, coloque questões e dê respostas de apoio e reconhecimento, comunique neutralidade e sensibilidade.

As entrevistas semiestruturadas pressupõem o recurso a um guião orientador, previamente construído, onde são especificadas as questões a colocar. Assim, no presente estudo, foi usado, para cada entrevista, um guião (apêndice 25 e 26), procurando-se garantir que os temas fundamentais fossem abrangidos e, simultaneamente, fosse possível a alteração da ordem das questões, bem como a integração de novas questões de acordo com o rumo do diálogo com o entrevistado. Estas características permitiram manter um ambiente natural de conversa, sem se ter deixado de fazer uma recolha de dados sistemática (Santos, 2000). As questões foram abertas e reflexivas e as entrevistadas foram encorajadas a clarificar e ilustrar as suas opiniões, permitindo o acesso a pormenores e detalhes particulares de cada professora.

Este estudo incluiu duas entrevistas semiestruturadas a cada uma das professoras participantes do estudo: uma no início do ano letivo (meados de outubro de 2011), e outra no final, já depois de todos os módulos terem sido lecionados (julho de 2012). Optei pelas entrevistas semiestruturadas devido à reconhecida importância de possibilitar às professoras seguir o seu discurso e integrar novas questões que pudessem emergir da conversa resultante das respostas às questões, de modo a melhor entender e complementar os seus pontos de vista.

A entrevista inicial foi realizada no sentido de: a) caracterizar a professora; b) perceber as razões que a levaram a desejar integrar uma equipa de trabalho colaborativo no âmbito deste projeto, assim como expectativas inerentes ao trabalho que seria desenvolvido; c) perceber de que forma preparava e planificava as suas aulas para este tipo de cursos, no que diz respeito ao tipo de tarefas, recursos, conteúdos e tópicos matemáticos, fases da aula e dificuldades; compreender de que forma conduzia as aulas, qual o ambiente de sala de aula e que reflexão fazia sobre a sua prática; d) perceber como interpretava o programa e o seu ponto de vista acerca da adequabilidade do programa aos cursos profissionais, assim como dificuldades na sua implementação, gestão e forma como via e seguia as orientações metodológicas no que diz respeito aos temas transversais, tais como: aplicações e conexões com realidade com recurso à modelação matemática e tecnologia e se o conhecimento profissional que possui lhe era suficiente na

gestão curricular deste programa; e) compreender se a professora tinha conhecimento sobre o que é modelação, que importância lhe atribui e se já utilizou nas suas aulas e como o fez, como planificou e preparou as aulas, que conclusões retirou acerca da sua aplicabilidade aos cursos profissionais, que recursos usou, como avaliou e que ajustes fez à planificação; por último, f) perceber o que a professora entendia por trabalho colaborativo; que importância lhe atribuía no que dizia respeito à elaboração da planificação, elaboração e criação de tarefas, elaboração de recursos e reflexão sobre o trabalho desenvolvido no âmbito da gestão curricular do programa para os cursos profissionais; e compreender do ponto de vista da professora a importância que o trabalho colaborativo poderia ter na planificação, preparação e criação de tarefas de modelação estatística.

A segunda e última entrevista teve por objetivo primordial uma reflexão sobre alguns aspetos a destacar e que foram objeto de estudo: compreender a evolução do ponto de vista da professora relativamente à entrevista inicial, em cada dimensão abordada e perceber como evoluiu o seu conhecimento para ensinar Estatística no que diz respeito à lecionação das distribuições bidimensionais recorrendo à modelação estatística e num contexto de trabalho colaborativo. Permitiu analisar e compreender a interpretação e valorização atribuída pelos participantes à implementação das tarefas de modelação na aula de Matemática, tentando perceber qual a importância que passaram a atribuir à adequação ao programa de Matemática e ao curso profissional que lecionaram e que competências, do seu ponto de vista, julgaram ter adquirido com o desenvolvimento destas tarefas, assim como as consequências para a construção e evolução do seu conhecimento para ensinar Estatística. O guião previamente feito para esta entrevista foi por vezes sujeito a ajustamentos no decorrer do desenvolvimento do estudo.

Na preparação e no decurso das entrevistas, também, tive em conta os seguintes aspetos: a *duração*, que não deve exceder as expectativas do entrevistado, nem a sua resistência física; o *número de assuntos* a tratar, que não deve ser elevado, caso contrário, deverão ser realizadas várias entrevistas; o *local* da entrevista, que deve ser acordado entre o entrevistado e o entrevistador e não deve constituir um fator inibidor; e as *relações estabelecidas* entre o entrevistado e o entrevistador (Bogdan & Biklen, 1994; Fontana & Frey, 1994; Goetz & LeCompte, 1984; Erickson, 1986). Em particular, relativamente às relações estabelecidas entre mim e o entrevistado, tentei criar um clima de confiança, desenvolvendo atitudes de compreensão, empatia, facilitação e abertura ao outro (Poirier,

Clapier-Valladon, & Raybaut 1999). Nesse sentido, procurei colocar a entrevistada à vontade, deixando-a falar livremente, com as suas próprias palavras; adotar gestos ou expressões sonoras, que confirmassem que estava a ouvi-la, sem interferir nas suas ideias e interrompendo o mínimo possível; e não emitir juízos de valor ou sugerir uma determinada resposta (Bogdan & Biklen, 1994).

No quadro 6 apresento a data, duração e local de cada entrevista inicial às professoras.

Quadro 6: Primeiras entrevistas semiestruturadas individuais realizadas

Professoras	Primeira entrevista individual
Filipa	Data: 20 de outubro de 2011 Local: Escola – Gabinete de Matemática Duração: 43m
Patrícia	Data: 15 de outubro de 2011 Local: Residência da investigadora Duração: 1 h 22m
Sara	Data: 15 de outubro de 2011 Local: Residência da investigadora Duração: 50 min

Como o quadro ilustra, a duração das entrevistas oscilou entre quarenta e três minutos e uma hora e vinte e dois minutos. Os locais e datas foram acordados pelas professoras de acordo com as suas preferências. A entrevista de Filipa foi realizada posteriormente às outras, por impossibilidade a nível familiar, tendo sido agendada para a semana seguinte e na escola. O ambiente foi sempre sossegado e agradável, o que permitiu que a conversa fluísse naturalmente, com à vontade e sem interferências, à exceção da entrevista de Filipa, que em alguns momentos e por estarmos na escola e em período de almoço dos alunos ter havido algum ruído, o que, no entanto, não impossibilitou o decorrer normal da entrevista. Procurei assumir uma atitude de “neutralidade empática” (Patton, 2002, p. 50), o que não significa distanciamento ou abstenção de resposta a algumas interpelações que as professoras me dirigiram: “neutralidade (...) significa simplesmente que o investigador não parte para provar uma perspectiva particular ou manipular os dados de modo a chegar a verdades preestabelecidas. (...) Empatia combina compreensão cognitiva com ligação afetiva” (Patton, 2002, pp. 51-52).

No quadro 7 apresento a data, duração e local de cada entrevista final às professoras:

Quadro 7: Últimas entrevistas semiestruturadas individuais realizadas

Professoras	Última entrevista individual
Filipa	Data: 27 julho de 2012 Local: Residência da professora Duração: 55 min
Patrícia	Data: 25 de julho de 2012 Local: Residência da investigadora Duração: 58 min
Sara	Data: 25 de julho Local: Residência da investigadora Duração: 1h 13 min

Como o quadro ilustra, a duração das entrevistas oscilou entre cinquenta e cinco minutos e uma hora e treze minutos. Os locais e datas foram acordados pelas professoras de acordo com as suas preferências. O ambiente em que ocorreram todas as entrevistas foi sempre sossegado e agradável, o que permitiu que a conversa fluísse naturalmente, com à vontade e sem interferências.

Para além destas entrevistas inicial e final, foram realizadas, a cada professora, entrevistas de reflexão pré aula e pós aula de modelação. Estas entrevistas foram apoiadas num guião (anexos 22 e 33) elaborado por mim, relacionados com as tarefas implementadas nas aulas, que serviram como objeto de análise. Serviram como suporte para a minha reflexão e permitiram compreender de que forma a implementação deste tipo de tarefas contribuem para o entendimento do conhecimento estatístico. A entrevista pré-aula teve por objetivo compreender de que forma a professora planificou a aula, como a estruturou e o que teve em conta para a criação da tarefa. Esta entrevista serviu para compreender se a professora considerou, na criação da tarefa as várias fases do ciclo de modelação, as antevisões de respostas e dificuldades inerentes e quais os materiais e recursos usados; e pós aula, uma reflexão imediata sobre o sucedido na aula de modelação, de modo a que não se perdessem pormenores e não houvesse uma reflexão ponderada sobre a gestão e condução da aula. Estas entrevistas às professoras tiveram também como objetivo compreender os desafios e os constrangimentos com que as professoras se defrontaram e como podiam ser ultrapassados/minimizados, no contexto do projeto colaborativo.

Todas estas entrevistas tiveram uma duração média de 5 minutos e foram uma constante durante todas as aulas em que foram implementadas tarefas deste tipo. As entrevistas pré e pós-aula foram gravadas em áudio e transcritas integralmente. Logo após cada entrevista, foram realizados registos de memória sobre aspetos considerados relevantes em particular as minhas impressões relativamente a aspetos não discursivos, especialmente pertinentes nas entrevistas aos professores.

Observação

Nesta investigação a observação foi um importante instrumento de recolha de dados, uma vez que permitiu fazer uma descrição rica e completa do ambiente de sala de aula criado. Foi desenvolvida quando implementadas tarefas de modelação estatística em turmas de cursos profissionais e permitiu descrever pormenorizadamente as reuniões de trabalho colaborativo.

A observação permitiu compreender o fenómeno em estudo, ver aspetos não identificáveis diretamente pelos participantes, favorecer uma abordagem indutiva e fornecer elementos que suportaram a discussão nas sessões de trabalho conjunto e nas entrevistas (Patton, 1987). Apesar da observação ter inerente algumas limitações, nomeadamente a possibilidade de provocar alterações no comportamento das pessoas observadas e de o investigador distorcer o fenómeno observado, estas podem ser minimizadas através de uma ação prolongada no tempo e do confronto das expectativas do investigador com o que está a ser observado (Ludke & André, 1986). De facto, a observação deve ser um ato intencional, conduzido de forma sistemática (Guimarães, 2003), de forma a permitir “uma proximidade continuada no tempo com os fenómenos a estudar” (Santos, 2000, p. 209). A observação foi do tipo naturalista, uma vez que a observação dos fenómenos em estudo foi feita no contexto natural em que ocorreram, existindo interação da investigadora com os participantes.

Nesta investigação, recorreu-se à observação de aulas e à observação das sessões de trabalho colaborativo. Em ambos os casos, a observação decorreu ao longo do ano letivo 2011/2012. Eu como investigadora constituí o instrumento principal de observação e interagi com os indivíduos sujeitos a observação com o intuito de recolher dados sobre as suas ações, opiniões e perspetivas (Lessard-Hébert, Goyette, & Boutin, 2005). De facto, a observação participante é das estratégias mais representativas na investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). Durante e/ou após a observação, procedi a registos

que assumiram a forma de notas de campo, registadas nos guiões de observação de aulas e reuniões de trabalho colaborativo. Essas notas de campo constituíram um sistema narrativo de registo de dados de observação, contemplando o registo escrito detalhado de acontecimentos com uma duração vasta (Evertson & Green, 1986). Nas notas de campo, descrevi o ambiente envolvente e acontecimentos considerados relevantes, vivenciados durante a observação. Além dos registos escritos, procedi à gravação em vídeo das aulas e das sessões de trabalho observadas, que foram posteriormente transcritas. Estes registos tiveram, entre outros, o objetivo de complementar a recolha de dados com outros instrumentos (Lessard-Hébert, Goyette e Boutin, 2005).

Observação de aulas

A observação de aulas iniciou-se no princípio do 2.º período, janeiro de 2012. Procurei observar como a professora fazia a gestão curricular deste programa e que tipo de tarefas implementava, assim como conhecer as turmas proporcionando aos alunos alguma familiaridade comigo e com materiais de gravação, nomeadamente, câmara de filmar, objeto este que poderia constituir um fator significativamente obstrutivo de naturalidade (Boavida, 2005). Estas aulas são designadas “aulas de familiarização” (Boavida, 2005). As primeiras observações foram em número de três para cada professor caso.

As outras observações foram realizadas a partir de abril e em todas as aulas onde foram implementadas tarefas de modelação estatística, perfazendo um total de quatro/cinco aulas de 90 minutos para cada caso. Estas observações de aulas foram ao encontro, quer das necessidades de recolha de dados para dar resposta às questões de investigação, quer das solicitações do projeto colaborativo.

A observação das aulas foi orientada por um guião de observação (apêndice 27), definido tendo em conta os objetivos da observação e a especificidade da aula a observar. As notas de campo incluíram registos que procuraram ir ao encontro do guião predefinido. Durante a observação da aula, procurei prestar especial atenção e proceder ao registo de situações entendidas como relevantes, especialmente ações, comportamentos, intervenções orais, opções do professor, em contexto de sala aula. Para facilitar a “localização” desses dados nos registos vídeo, tomei nota da hora da ocorrência e momento da aula.

Como instrumentos de registo, utilizou-se uma câmara de vídeo, de modo a captar uma perspetiva geral da sala de aula e da professora. Estes recursos justificaram-se, dadas as exigências impostas pela natureza dos objetivos e questões da investigação.

Os registos em vídeo das aulas foram utilizados, em particular, como objeto de discussão e reflexão pelos professores no âmbito do projeto colaborativo (com este propósito não são considerados os registos relativos especificamente ao trabalho dos alunos, no seio do seu grupo).

Os dados recolhidos através da observação das aulas, e respetivos registos, contribuíram para uma descrição do sucedido em cada aula, por cada professora, bem como para a identificação de dificuldades sentidas e eventuais formas de serem ultrapassadas. Contribuíram, ainda, em triangulação com outros dados, para a identificação e interpretação do conhecimento para ensinar estatística, no quadro de uma experiência de ensino com recurso a tarefas de modelação, sobre as distribuições bidimensionais, desenvolvida em contexto colaborativo por professoras de Matemática do ensino profissional.

Reuniões de trabalho colaborativo

A observação das reuniões de trabalho colaborativo foi uma observação participante ativa, dado que estive envolvida nos acontecimentos do meio, procedendo ao seu registo escrito durante e após o período de observação (Everston & Green, 1986) e participando nos debates, reflexões e na pesquisa e criação das próprias tarefas levando a que todas contribuíssem para o pensamento criativo inerente a este tipo de investigações. A observação destas sessões teve como propósito central contribuir para a compreensão de como os professores evidenciam o conhecimento para ensinar Estatística quando: fazem a gestão curricular do programa de Matemática para o ensino secundário profissional, ao pesquisar e estudar; ao planificar e conceber aulas onde foram implementadas tarefas de modelação estatística contextualizadas e adaptadas a cada curso profissional; identificar e entender as dificuldades, receios e desafios que surgiram e que puderam ser minimizadas num ambiente de trabalho colaborativo. Para além disso, a observação das sessões de trabalho colaborativo, dedicadas à reflexão sobre as práticas desenvolvidas na sala de aula, permitiram reajustar planificações e estratégias e contribuir para a evolução do conhecimento para ensinar Estatística. O registo das sessões de trabalho colaborativo foi feito em vídeo e áudio.

Recolha Documental

A recolha documental incidu sobre: materiais produzidos pelas professoras, como, por exemplo: planificações, enunciados das tarefas, materiais pedagógicos (por exemplo, critérios de avaliação, guiões, tabelas de recolha de dados), para cada aula onde foram implementadas tarefas de modelação estatística e resolução das tarefas de modelação realizadas pelos alunos. A partir da sua análise foi possível dar resposta mais aprofundada às várias questões de investigação.

Análise de dados

A análise dos dados é um processo complexo que contempla várias atividades do investigador, de modo a dar sentido aos dados recolhidos. Estas atividades incluem organizar e subdividir os dados, sintetizá-los, procurar regularidades, identificar o que é relevante e o que se vai comunicar aos outros (Bogdan & Bicklen, 1994).

A análise dos dados e a construção do caso, num trabalho de natureza interpretativa, acontece à medida que vão sendo recolhidos, devendo obedecer a um critério de organização e de síntese. Este trabalho foi organizado de modo a que a recolha dos dados e a sua análise se desenvolvessem em paralelo, num processo iterativo. Este processo mostra-se de aplicação mais complexa, mas também mais eficiente e eficaz, permitindo introduzir reajustes, caso se mostrem pertinentes (Bogdan & Bicklen, 1994). Neste contexto, a primeira fase de análise decorreu durante a recolha dos dados, primeiro com as primeiras entrevistas e início das reuniões de trabalho colaborativo, no início de outubro de 2011. Dada a natureza das questões de investigação, a tipologia de análise utilizada foi de análise de conteúdo. Este aspeto relaciona-se com a constituição do *corpus* (Bardin, 1997), ou seja, com o conjunto de todos os documentos provenientes do trabalho de campo. Esta primeira fase de análise foi ao encontro da transcrição das entrevistas às professoras permitindo, deste modo, organizar e clarificar ideias quanto às questões de investigação e definir categorias de análise já contempladas nos guiões das entrevistas. Durante esta fase de análise, e à medida que foram transcritas as entrevistas, houve registo de observações, ideias, interpretações e comentários em função dos constructos teóricos estruturantes deste trabalho. O objetivo não foi prever resultados, mas sim interpretar e investigar significados, uma vez que neste estudo pretendeu-se entender as visões de

outras pessoas para além das minhas, levando-me a fazer análise de conteúdo (Fiorentini & Lorenzato, 2006).

Depois de concluída a recolha de dados, deu-se início à segunda fase de análise. Este momento de análise consistiu na procura de relações entre as concepções sobre tarefas de modelação, e o modo como foram interpretadas e valorizadas ao longo deste ano letivo, assim como identificar e interpretar os vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística convocados na preparação e condução das aulas de modelação no ensino das distribuições bidimensionais. Para além disso, pretendeu-se compreender de que forma, estas tarefas, contribuíram para o desenvolvimento desse mesmo conhecimento e se ajudaram as professoras a ultrapassar as dificuldades iniciais, nomeadamente na gestão curricular deste programa tão particular. A segunda fase de análise decorreu entre junho de 2012 e junho de 2015. Neste período foram definidas, definitivamente, as categorias de análise e a estrutura de abordagem dos casos, de forma a permitir a compreensão e a análise de cada caso e a comparação entre eles. As categorias de análise dizem respeito à identificação e interpretação do conhecimento matemático e não matemático, especializado e comum convocado durante a preparação e condução das tarefas de modelação, ao longo das várias fases do ciclo de modelação. Na caracterização e interpretação do conhecimento das professoras foi usado como referência o quadro de análise definido no capítulo de revisão de literatura, que cruza as fases de modelação (Ferri, 2006) com os vários tipos de conhecimento estatístico para ensinar propostos por Groth (2007), sintetizados no quadro 4.

Capítulo 5 – O contexto de trabalho colaborativo

Este capítulo tem por objetivo apresentar o projeto de trabalho colaborativo de suporte ao desenvolvimento do estudo, durante o ano letivo 2011/2012. O contexto de trabalho colaborativo promoveu e suportou o estudo sobre modelação matemática, a criação de tarefas de modelação relativamente às distribuições bidimensionais e apoiou a recolha de dados. Este capítulo está dividido em duas partes: a primeira sobre a constituição do grupo de trabalho colaborativo e a segunda descreve a dinâmica das sessões de trabalho colaborativo, explica de que modo as sessões foram divididas, qual o cariz que assumiram, objetivos e desenvolvimento do trabalho, assumindo quatro fases às quais denominei de cariz teórico, cariz criativo, cariz reflexivo e reflexão final.

Constituição do grupo de trabalho colaborativo

Uma das preocupações de qualquer investigador quando ainda está na fase de construção do seu projeto e cuja investigação depende de uma equipa de trabalho colaborativo é saber como escolher os participantes do estudo. Da escolha dos participantes e da compreensão do seu envolvimento e papel num estudo deste tipo depende o sucesso de qualquer investigação. Há sempre o risco de alguém a meio do processo desistir ou da sua participação ou mesma personalidade não se adaptar à equipa. Neste estudo isto não aconteceu porque o primeiro passo que dei foi no sentido de compreender se as professoras que já conhecia e com as quais estava habituada a trabalhar estariam interessadas em fazer parte de um projeto com estas características e com este tema, sabendo de antemão as suas dificuldades já comigo partilhadas, as suas motivações e a grande vontade de aprender e melhorar as suas práticas de ensino e evoluir como profissionais que são.

As três professoras escolhidas para este projeto não foram selecionadas entre outras. Elas próprias ao tomarem conhecimento das minhas vontades e intenções, ainda muito antes de se tornar um projeto, voluntariaram-se mostrando total disponibilidade para trabalharmos conjuntamente caso eu avançasse com esta temática, o que vai contra

ao que Reason (1988b) defende quanto à possibilidade de existirem tensões na fase de estabelecimento do grupo de trabalho. A vontade delas foi o impulso que me faltava para ganhar coragem e passar o que tinha em mente para o papel e assim chegar à apresentação do projeto. Nessas conversas informais entre colegas fui dando e apresentando a ideia que tinha em mente, qual seria o papel de todas nós na equipa, e como pretendia recolher dados para esta investigação. Todas elas se mostraram à vontade e compreenderam que as suas práticas de ensino e aulas iriam ser observadas e ser alvo de reflexão conjunta. Este facto que poderá constituir um fator inibidor, pois muitos professores não se sentem à vontade em serem observados e sentem-se muito expostos e de certa forma inseguros (Boavida, 2005), não aconteceu neste estudo.

No momento em que tudo foi formalizado e o tema do estudo ganhou força, expliquei a relevância e importância que os seus pontos de vista, vozes e perspetivas poderiam assumir neste trabalho, levando-as a perceber os seus papéis e compromissos, tal como Bednarz, Desgagné, Couture, Lebuís e Poirier (1999, p. 3) reforçam, pois esta é uma “investigação com os profissionais (em vez de sobre eles)”, que integra os seus pontos de vista na investigação. Este trabalho implicava disponibilidade de tempo e sessões de trabalho presenciais obrigatórias de quinze em quinze dias e sempre que se justificasse. No entanto, mencionei que todas estas sessões seriam acordadas e negociadas entre todas, sendo mesmo estabelecida e elaborada uma calendarização das sessões numa primeira reunião para que nada fosse imposto por mim, mas sim, tudo negociado.

Desde o início que as três professoras participantes deste estudo demonstraram interesse pelo tema, pois tinham imensa curiosidade em perceber o que era modelação matemática, tema transversal referido no programa de Matemática para o ensino secundário profissional, e saber como criar tarefas de modelação. O que tentei foi estabelecer o desenvolvimento de relações colaborativas que permitissem a partilha, a reflexão sempre baseada na confiança e respeito mútuos entre todas as envolvidas (investigadora e professoras). Por outras palavras, procurei manter a colaboração e a confiança mútua entre investigadores e professores como forma de promover o desenvolvimento de ambas as partes (Krainer, 2011). Em conversas informais tidas no ano anterior ao do presente estudo, apercebi-me da dificuldade que a maior parte dos professores, inclusive eu, em criar tarefas suficientemente motivadoras para alunos do ensino profissional e que realmente constituíssem no futuro profissional uma mais-valia. Este projeto foi encarado pelas professoras como um desafio que lhes levantava questões,

tais como: “Como vamos fazer isto? Como vamos começar?” e ao mesmo tempo lhes desse vontade de tentar e experimentar algo novo.

Sara, Patrícia e Filipa, nomes fictícios escolhidos pelas próprias, são professoras contratadas na mesma escola e no ano anterior apenas Filipa tinha lecionado turmas do ensino profissional. Sara, a mais jovem do grupo e com menos experiência, já tinha tido essa oportunidade no início da sua ainda curta “vida” como professora. Patrícia ainda não tinha tido essa oportunidade e manifestou desde sempre vontade em participar neste projeto porque também seria uma forma de vir a ter uma turma do ensino secundário profissional, o que para ela era encarado ainda como mais um desafio.

Assim que todo o grupo manifestou vontade, foi feito o contacto com a diretora do agrupamento de escolas onde foi implementado o projeto para aferir da disponibilidade e aceitação por parte da escola para dar andamento a este estudo, uma vez que implicaria por parte da diretora ter que atribuir a cada professora envolvida uma turma do 10.º ano do ensino profissional. Este aspeto crucial implicaria uma distribuição de níveis de ensino por todos os professores do grupo 500 distinto do que era habitual. Tal como as colegas, a diretora da escola aceitou de bom agrado a ideia e de imediato perguntou-nos que turmas queríamos que nos fossem atribuídas no ano letivo seguinte. Apenas manifestámos vontade em lecionar turmas do ensino profissional que cobrissem cursos de área profissional distinta de modo a garantir diversidade de contextos. Para além disso, informámos que seria de extrema importância que fosse contemplado, no nosso horário, componente não letiva que visasse a possibilidade de nos reunirmos.

Desde modo, não existiu no momento inicial do estudo qualquer tipo de constrangimento e foi fácil organizarmos o trabalho inicial (calendarização e estrutura das sessões ao longo do ano letivo). Foi desta forma que se constituiu a equipa de trabalho colaborativo com início em setembro de 2011. Posso avançar que este projeto foi visto com bons olhos e tivemos a nível logístico todo o apoio necessário, quer da direção, quer de outros colegas que estiveram envolvidos. Relativamente às turmas, no início do ano letivo e nas primeiras reuniões de conselho de turma, ainda antes da primeira sessão de trabalho colaborativo, as professoras envolvidas no projeto apresentaram ao conselho de turma o tema e objetivos do estudo que iria ser realizado na escola. O diretor de curso e de turma foi advertido para a importância de passar essa informação aos encarregados de educação e também aferir a receptividade destes ao facto dos seus educandos virem a ser filmados durante um período de aulas.

Sessões de trabalho colaborativo

Este projeto teve a duração de um ano letivo, iniciando-se em setembro de 2011, com a apresentação do projeto, justificação do tema e discussão de um plano de trabalho que respeitasse e fosse acordado por todos os elementos da equipa. Ficou acordado que as reuniões seriam quinzenais e discutimos o dia e hora que melhor satisfizesse a todas. Embora tenha sido atribuído a todas as professoras, inclusive eu, dois tempos comuns de 45 minutos à quarta-feira à tarde, por motivos pessoais decidimos encontrar um outro dia em que todas tivessem disponibilidade. Como tal, ficou acordado as terças ou quintas-feiras durante a nossa hora de almoço. Este facto implicaria prescindirmos do almoço e trabalharmos em prol de um objetivo e interesse comum, o que em nada nos impediu de pôr mãos à obra e iniciarmos as nossas sessões de trabalho colaborativo. De quinze em quinze dias reuníamos obrigatoriamente, em dia a acordar entre todas de modo a respeitar a vida familiar e outros deveres profissionais na escola. Houve sempre da minha parte o cuidado de nunca impor nada, permitindo que as professoras sugerissem os dias das reuniões, mas alertando-as e consciencializando-as para a importância da sua envolvimento e papéis uma vez que tinham manifestado interesse em fazer parte deste projeto. O papel e compromisso assumido por todas foi claramente entendido e em momento algum o projeto esteve em risco, pois foi por mim referido que todo o plano de trabalho delineado para o ano letivo poderia sofrer reajustes e ser renegociado sempre que achassem necessário, desde que fossem respeitadas vontades, interesses e constrangimentos de todas as professoras envolvidas (Reason, 1988a, 1988b).

A dinâmica das sessões de trabalho colaborativo

Esta secção serve para descrever e ilustrar o desenvolvimento e relação entre as ações do trabalho colaborativo assumido pela equipa de trabalho, assim como papéis e compromissos, seguindo o que os autores Hargreaves (1998), Olson (1997), e Reason (1988a, 1988b) defendem. Houve sempre lugar para a voz de cada professora se fazer ouvir, sem que a minha voz ou vontade prevalecesse, dando lugar a um conhecimento partilhado. O contributo individual de todas influenciou o desenvolvimento do trabalho conjunto. A pesquisa, reflexão e partilha de ideias de todas contribuiu para um plano de trabalho conjunto que levou à criação de várias tarefas de modelação para cada curso

profissional. O esquema de trabalho ao qual obedeceu o trabalho colaborativo pode ser apresentado no quadro 8:

Quadro 8: Estrutura da dinâmica da equipa de trabalho colaborativo e sua relação com a atividade individual dos membros

Exterior às sessões	Investigadora	Equipa de trabalho colaborativo	Sara, Patrícia e Filipa	Exterior às sessões
Documentos de natureza diversa; Currículo; Tarefas de aplicações matemáticas e de modelação matemática já existentes; Guiões de trabalho.	Documentos (seleção); Exemplos de tarefas (seleção). Experiência e saberes profissionais. Gravação vídeo das aulas e análise da gravação para seleção de episódios de aula.	Discussão de documentos; Planificação conjunta do tema Estatística. Discussão de contextos profissionais; Discussão de ideias para recolha de dados reais; Planificação conjunta do número, características, formato e grau de estruturação das futuras tarefas; Criação de tarefas. Análise de episódios de aula (narrativas das professoras e vídeos de aulas) Reflexão sobre as aulas de modelação vídeo gravadas.	Propostas de ideias para contextos profissionais; Propostas e criação de tarefas de “pré-modelação” e modelação adequadas a cada curso profissional; Propostas de ideias para preparação e planificação de aulas de modelação. Preparação das aulas de modelação e reajustes das novas tarefas. Gestão e condução das aulas de modelação. Reflexão individual pré e	Tarefas de modelação novas; Currículo.

			pós aulas de modelação.	
--	--	--	-------------------------	--

A coluna referente à equipa de trabalho colaborativo diz respeito a todas as atividades desenvolvidas em conjunto e que resultaram da partilha individual e conjunta de todas. Numa das colunas aparece o meu papel enquanto investigadora e indica o que levei para as sessões de trabalho conjunto, ora com a apresentação de documentação sobre modelação e exemplos de tarefas, ora como a apresentação de episódios de aula vídeo gravadas. Numa outra coluna aparece o nome das professoras de modo a demonstrar o que cada uma, individualmente, levou para as sessões e qual o seu contributo para a equipa. As colunas designadas por exterior dizem respeito ao meio envolvente à equipa feita em vários recursos e que levou à criação das novas tarefas de modelação, assim como a leitura e interpretação do currículo para o ensino profissional. As várias setas indicam a relação entre os vários momentos e de que forma uns levaram aos outros.

Muitas outras interações existiram entre mim e as professoras que não consigo retratar no esquema anterior, pois muitas foram as conversas informais entre aulas, a horas de almoço, através de emails com e sem a minha presença ou conhecimento. Muitas vezes apercebi-me de conversas que elas tinham sobre como tinham decorrido as aulas e pedido de sugestões para as próprias aulas.

Passarei a descrever as quatro fases das sessões de trabalho colaborativo para que melhor se perceba o trabalho desenvolvido em cada uma delas e o seu propósito. Em apêndice (apêndice 28) apresento uma tabela que retrata uma síntese do trabalho desenvolvido durante esse período.

A primeira fase das sessões – cariz teórico

A primeira fase das sessões de cariz teórico foram cinco, iniciando-se a primeira a 20 de outubro de 2011 e a última a 6 de dezembro de 2011. Em apêndice (apêndice 29) apresento uma tabela que retrata uma síntese do trabalho desenvolvido durante esta fase. Neste período de trabalho colaborativo foram usados documentos de natureza variada: documentos teóricos e teórico/práticos, guiões que serviram de apoio para descrever narrativas e anotar emoções, intervenções e hesitações das professoras. De seguida, apresento alguns aspetos que retratam os campos de colaboração, os pontos de vista,

concepções e evolução das mesmas, assim como as interações entre as intervenientes neste estudo nesta fase inicial “mais teórica” do trabalho colaborativo.

Na primeira sessão procedi à apresentação do projeto e qual o seu propósito e lancei o desafio de estabelecermos um plano de trabalho que respeitasse as motivações e disponibilidades de todas as participantes, sendo segundo Reason (1988b), uma das condições no estabelecimento do grupo colaborativo. Nesta reunião, o principal objetivo foi o de apresentar e clarificar, junto das professoras, o objetivo, relevância e metodologia do estudo.

Comecei por lhes dizer o tema do projeto e o porquê de ter surgido este meu interesse. Revelei os meus medos e inseguranças quando, há 2 anos, comecei a lecionar a turmas de cursos profissionais, relativamente à gestão do programa e seleção de tarefas adequadas aos vários cursos profissionais. Essas dificuldades foram também partilhadas por elas, por Filipa há já 3 anos, por Sara e Patrícia, nesse ano. Ambas referiram que embora sentissem essas dificuldades, nesse momento sentiam-se tranquilas porque faziam parte deste projeto e esperavam aprender e conseguir gerir o programa:

Filipa: Eu às vezes não sei muito bem que tarefas hei-de propor que motivem os alunos. Não é fácil, e por vezes acabo por fazer a mesma coisa para os cursos todos.

Patrícia: Eu nunca tinha dado aulas ao ensino profissional e fiquei com um curso onde sou eu que tenho de decidir os módulos que vou dar. Isso já é difícil! Ora escolher tarefas para elas não tem sido fácil e têm de ser coisas mais práticas. Eu espero conseguir melhorar este aspeto e ter mais ideias durante este trabalho.

Sara: Eu acho que vamos conseguir ter várias ideias juntas e vamos conseguir! Mas reconheço que a escolha de tarefas que se adequem a cada curso e para dar o mesmo conteúdo não é fácil. É mais fácil ir ao livro e dar os exemplos que lá estão. No entanto, não é isso que o programa sugere. (Sessão de trabalho colaborativo, 20/10/11)

Passei a referir o objetivo do estudo, assim como questões orientadoras e todas perceberam que estas questões iam ao encontro do que lhes tinha sido perguntado na entrevista individual. Foi explicada a pertinência do estudo e implicações/contribuições que daqui poderiam surgir quer para todas nós como para outros colegas, quer lecionem estes cursos, quer lecionem outros. Referi ainda como estava programada a metodologia relativamente à gravação e observação de aulas e, tal como em conversas informais anteriores, não houve qualquer objeção nesse sentido.

Foi apresentada, por mim, uma proposta de calendarização e planificação das reuniões de trabalho colaborativo e que foi aceite por todas. Expliquei que em reuniões futuras iria assumir um papel de “formadora” no sentido de clarificarmos o que se entende por modelação, modelação em sala de aula, ciclos de modelação e distinção entre tarefa de modelação e tarefa de aplicações da matemática. Sara pediu que eu enviasse com algum tempo antes da reunião os artigos que iríamos estudar conjuntamente, a fim de rentabilizar melhor essa reunião e darmos todas contributos. Eu referi e enfatizei o papel importante que elas iriam desempenhar neste processo, pois seriam as professoras que trariam para as reuniões propostas de tarefas e todas trabalharíamos essas ideias. Sara e Patrícia mostraram confiança neste processo, pois afirmaram que o mais complicado seria a criação e planificação da primeira tarefa:

Sara: Eu acho que o mais complicado vai ser pensar na primeira tarefa, ter as primeiras ideias e...

Patrícia: E a estrutura, pensar na planificação da primeira aula, mas em equipa vamos conseguir! Tem de ser!

Sara: Depois de surgir a primeira tarefa, as ideias vão surgindo e eu acho que vai correr bem! (Sessão de trabalho colaborativo, 20/10/11)

Todas as colegas manifestaram que o trabalho lhes agradava e que esperavam aprender muito e ao trabalharem em conjunto sentiam-se mais confiantes e estavam com esperança de corresponder às expectativas. Ficou bem claro que era sempre possível renegociar o dia e hora das sessões e que seria sempre tido em conta as motivações e disponibilidade de cada uma, mas sem comprometer ou inviabilizar o trabalho, o que cada uma anuiu que concordava e compreendeu o seu papel e responsabilidade.

A segunda sessão teve por base um guião (apêndice 4) cujo objetivo foi analisar o documento oficial referente ao programa de Matemática para o ensino secundário profissional, dando-se principal destaque à análise do programa do módulo A3-Estatística. Por último, e não menos importante, fizemos uma reflexão conjunta sobre as orientações metodológicas sugeridas pelo programa oficial, no que diz respeito às aplicações da Matemática e modelação matemática.

Antes da terceira sessão, foram enviados, às colegas, documentos teóricos e teóricos práticos, assim como o guião dessa sessão (apêndice 5) de modo a rentabilizar a reunião. Nesta sessão o objetivo foi tentar compreender e conhecer as conceções iniciais de cada professora sobre o que entendiam por modelação matemática e tarefa de modelação matemática; distinguir entre tarefa de modelação e tarefa de aplicações da

matemática, através da apresentação de tarefas; definir (informalmente) modelação matemática, através da identificação de tarefas de modelação; caracterizar uma tarefa de modelação matemática; resolver uma tarefa de modelação matemática (identificada pelas professoras) e identificar (informalmente) as várias fases de modelação matemática. Por último foi apresentado o ciclo de modelação de Kerr e Maki (1979) e foi conformada uma das tarefas (apêndice 30) de modelação matemática ao esquema de modelação.

Ao verem o ciclo as professoras deram-se conta que a construção de uma tarefa de modelação tem que partir do mundo real e ser transportado para a sala de aula, o que as levou a refletir sobre os cuidados que terão que ter relativamente a vários pontos, nomeadamente: problematizar a situação retirada do mundo real; como, onde e quem recolherá os dados? Se é viável ou não? Esta reflexão entusiasmou-as e começámos entre nós a discutir possíveis conexões para cada curso e até mesmo entre os três cursos e possibilidades de recolhas de dados. As colegas lançaram possíveis ideias o que demonstrou que já começavam a pensar num passo mais adiante do trabalho.

Todas as professoras mostraram abertura em ouvir as opiniões de cada uma, esperando umas pelas outras para intervir, o que resultou numa partilha cuidada, calma e rica de ideias e opiniões, podendo-se deste modo, complementar e afinar ideias, resultando num trabalho enriquecedor e de aprendizagem para todas, com um cariz reflexivo, tal como defende Krainer (2011).

Facilmente identificaram as fases de modelação e ao ser apresentado o ciclo de modelação de Kerr e Maki (1979), todas identificaram e conformaram (anexo 7) a tarefa 3 com o ciclo apresentado e perceberam claramente o ciclo, destacando a sua importância para base de sustentação aquando da criação das nossas futuras tarefas e que as fez refletir sobre a sua prática.

Para a sessão 4 (guião 4, apêndice 6) foram enviados, com uma semana de antecedência, textos e artigos sobre o que se entende por modelação matemática e o guião de suporte a essa sessão. O objetivo foi: analisar e discutir artigos sobre modelação matemática e modelação matemática em sala de aula, visando a reflexão conjunta sobre as várias definições presentes e selecionar conjuntamente uma definição.

Destaca-se nesta reunião o trabalho realizado por todas e que antecedeu esta sessão. Os artigos vinham muito bem estudados e analisados pelas três professoras, o que permitiu um debate rico que resultou numa reflexão conjunta, permitindo mais rapidamente compararmos os dois autores estudados e estabelecer diferenças entre eles.

Unanimemente, as professoras identificaram-se mais com as ideias de Swetz (1992) pela clareza do discurso e por acharem mais completo no que dizia respeito à modelação matemática.

Esta reflexão permitiu avançar com uma pré definição de modelação matemática em forma de tópicos, mas já com evolução de conceções bastante significativa. Com estes artigos, todas as professoras disseram que nesse momento a ideia que tinham era que modelação matemática era muito mais do que inicialmente tinham imaginado e tarefas que julgavam não ser de modelação matemática, afinal eram e agora compreendiam o porquê:

Patrícia: Para mim e daquilo que li, modelação matemática é uma metodologia de ensino. Tem de partir da realidade. Eu julgava que só havia modelação matemática se os dados fossem recolhidos pelos alunos. Percebi que isso é a situação ideal, mas podem surgir dados hipotéticos, logo a modelação pode ter várias entradas.

Sara: Eu concordo. Mas o ideal é partir da realidade e conseguir levar essa realidade para a sala de aula, envolvendo os alunos na recolha de dados e que sejam temas do interesse destes. E depois têm de chegar aos modelos matemáticos!

Filipa: Eu nem fazia ideia do que era! Mas entendi que a realidade é crucial para o início e só depois vem a Matemática.

Patrícia: Eu olhava para uma tarefa e nem diferenciava uma tarefa de modelação de uma outra de aplicações da Matemática. Na modelação começa com a realidade e...

Sara: Só depois é que aparece a Matemática e depois comparamos outra vez com a realidade, certo?! (Sessão de trabalho colaborativo, 24/11/11)

Neste contexto, entenderam que a modelação matemática pode ter várias entradas e mostraram-se bastante ansiosas para dar início ao processo de criação das nossas próprias tarefas.

Na quinta sessão (apêndice 7) foram enviados textos sobre ciclos de modelação, tendo por objetivo: analisar vários e compreender a interpretação dos mesmos pelas professoras; conformar a tarefa apresentada na sessão 3 com cada um dos ciclos; refletir sobre a adequabilidade de cada ciclo de modelação à tarefa apresentada e seleccionar um ciclo de modelação para base de sustentação à criação, planificação e implementação das futuras tarefas de modelação matemática.

Todas gostaram mais do ciclo de modelação de Ferri (2006) e apresentaram as razões pela preferência:

Sara: Eu acho que, uma vez que queremos trabalhar com a realidade, o ciclo que eu gosto mais e acho que se adapta melhor ao que pretendemos é de Borromeo, porque ela fala no conhecimento extra matemático, como algo crucial nas várias fases.

Patrícia: E para além disso, percebe-se muito bem no esquema, a importância que dá no final à comparação entre a matemática e a realidade, para ver se o modelo é válido ou não.

Filipa: Para mim, acho que este se encaixa bem na Estatística!

Patrícia: Pois eu também acho! Na Estatística estudam-se problemas sociais, relacionados com outras áreas e esse conhecimento extra matemático referido neste ciclo é mesmo o que se pretende! (Sessão de trabalho colaborativo, 07/12/11)

Conseguiram facilmente interpretar o ciclo e conformar facilmente a tarefa 3. Todas interpretaram e deram extrema importância ao conhecimento extra matemático referido no ciclo e deram exemplos claros sobre o entendimento que dele fizeram.

Em síntese, o trabalho prévio que as professoras foram sistematicamente realizando contribuiu de forma bastante positiva para a rentabilização das reuniões e da forma como o debate emergiu. As reuniões resultaram em conversas, onde cada uma ordenadamente apresentou as análises e reflexões que iam fazendo e em conjunto complementando ou discutindo pontos divergentes, levando sempre a um consenso e a conclusões. Coube-me a responsabilidade de ir lançado os temas e questões e todas nós fomos revelando as nossas reflexões em forma de conversa sem nunca tentar tomar protagonismo na reunião.

A segunda fase das sessões – parte criativa

A segunda fase das sessões, que denominei de criativa, foi dividida em nove sessões, iniciando-se a primeira a 15 de dezembro de 2011 e a última a 17 de abril de 2012. Em apêndice (apêndice 31) apresento uma tabela que retrata uma síntese do trabalho desenvolvido durante esse período. Nesta fase, assumi o papel de moderadora na promoção de debates que tiveram por base um guião previamente elaborado. Nesta fase, foram discutidas colaborativamente propostas de conexões e situações reais, formas de recolha de dados, planificação do tipo e número de tarefas que seriam criadas no módulo Estatística e que conteúdos estatísticos iriam ser abordados.

A pesquisa de contextos: No final do 1.º período, dedicámos uma sessão de trabalho colaborativo (sessão 6, apêndice 6) à análise de perfis profissionais dos cursos profissionais envolvidos neste estudo de modo a melhor compreender as saídas

profissionais destes cursos. Esta análise teve por objetivo identificar prováveis contextos profissionais que pudessem ser modelados em sala de aula, tendo em conta o que as professoras até ao momento tinham compreendido acerca do que é modelação matemática, ciclo de modelação de Ferri (2006) e tarefa de modelação e que respeitassem as motivações e expectativas destes alunos relativamente ao curso que frequentam. Para além disso, e como esta sessão correspondeu à última antes da interrupção letiva do Natal, foi assumido por todas que iríamos pesquisar propostas de conexões de situações reais relacionadas com os cursos. Os documentos que serviram de suporte para esta análise e debate de prováveis propostas encontram-se em anexo (anexo 8, 9 e 10). Todas as professoras já tinham analisado atempadamente os perfis dos cursos e trouxeram para a reunião ideias de propostas que foram discutidas entre todas. As ideias foram um excelente ponto de partida para o debate de ideias e consequentemente seus ajustes por parte de todas nós. O aspeto mais relevante teve a ver com o facto de ter surgido uma proposta que permitiria a recolha de dados reais e os três cursos lecionados pelas professoras e que será descrita posteriormente. Esta proposta comum levou no futuro a imensas tarefas (“pré-modelação” e de modelação) visando deste modo o surgimento de vários tipos de variáveis que levassem a ser abordados todos os conteúdos estatísticos contemplados no programa, com principal destaque para o estudo de relação entre variáveis.

As propostas de situações do mundo real: Numa sétima reunião logo a seguir à interrupção letiva do Natal, as professoras trouxeram para a reunião várias ideias e propostas que tinham surgido a partir dos seus próprios alunos. Todas elas optaram por dizer aos seus alunos que o módulo Estatística iria ser abordado a partir das suas motivações e tendo em conta as saídas profissionais dos seus cursos. Segundo elas, todos os alunos apresentaram propostas que complementaram as ideias surgidas aquando da primeira sessão de trabalho colaborativo desta fase. Este facto revelou a preocupação que estas professoras manifestaram ao respeitar as motivações dos seus alunos, tentando abordar áreas do seu interesse profissional, conduzindo-os a uma outra visão da Estatística e da sua utilidade enquanto ferramenta, para resolverem situações reais do seu dia-a-dia e tomadas de decisão. Esta reunião teve por objetivo ouvirmos todas as propostas vindas dos alunos e apresentadas pelas professoras e discuti-las conjuntamente quanto: aos recursos a utilizar e disponíveis na escola; à possibilidade da recolha de dados; à pertinência e interesse da possível tarefa para os alunos e área profissional; ao tempo de

duração da possível tarefa; e aos conteúdos estatísticos envolvidos. Esta sessão, tal como todas as outras, obedeceu a um guião previamente elaborado (apêndice 9).

Todas as professoras envolveram-se de igual modo na discussão das propostas. Para a recolha de dados foi sugerido, por todas, que seria interessante desenvolver uma atividade comum e transversal aos três cursos, que permitisse a recolha de dados a partir de uma mesma amostra. Começámos então a traçar as linhas gerais e a pensar na amostra ideal para a recolha de dados. Ficou decidido que a amostra iriam ser alunos do pré-escolar. Pensámos nesta possibilidade porque os cursos envolvidos foram: Cozinha/Pastelaria, Apoio à infância e Gestão desportiva. Deste modo e de forma a envolver o curso de Apoio à Infância pensámos de imediato em crianças do pré-escolar, pois estas futuras técnicas irão desempenhar atividades em jardins-de-infância e para isso teriam que conhecer as crianças com quem iriam trabalhar; relativamente ao curso de gestão desportiva, como uma das funções era organizarem eventos desportivos, para isso precisavam de conhecer o público-alvo para que todas as atividades desportivas se adequem à faixa etária destinada; quanto ao curso de cozinha, como futuros cozinheiros teriam que desenvolver ementas saudáveis e caso trabalhassem com crianças, criarem ementas apelativas e saudáveis. Partindo desta ideia base, tivemos que fazer contatos com a direção da escola, coordenadora do pré-escolar e respetivas educadoras para pôr em prática o plano de trabalho e respetivas autorizações. Esta recolha envolveu todos os cursos e tivemos que contactar o grupo de educação física no sentido de nos ajudar à organização de um evento desportivo (corrida ou outras hipóteses) e também com os técnicos de cozinha no sentido de nos fornecerem os custos e quantidades de alimentos que envolveria um lanche para as crianças.

A oitava reunião (apêndice 10) foi bastante importante porque com a ideia da sessão anterior, as professoras lançaram o desafio às respetivas turmas e, de forma muito natural, os alunos apresentaram propostas interessantes de atividades a integrar na atividade comum, assim como questões a introduzir num questionário aos encarregados de educação. Esses questionários visavam a recolha de dados de modo a levar ao surgimento de vários tipos de variáveis, e que no futuro pudessem ser feitas conjecturas que suscitasse curiosidade.

O que mais destaque nesta reunião foi o facto de todas as professoras, de igual modo, terem falado das suas possíveis tarefas e terem trazido atividades a desenvolver com os três cursos com o objetivo de recolherem dados. Nenhuma delas se limitou a

apresentar atividades unicamente para a sua turma, pois as atividades para recolha de dados foram pensadas tendo em conta o envolvimento de todas as turmas. Essas propostas estão em documento anexo (anexo 11) e foram tidos em conta vários aspetos já contemplados na sétima sessão.

As tarefas de “pré modelação” e de modelação matemática

Os dados: A fase da recolha de dados foi crucial para o surgimento de várias variáveis estatísticas relacionadas com os cursos profissionais. Logo após a diretora do agrupamento ter acolhido com satisfação a nossa ideia, reunimos com a coordenadora do pré-escolar, no sentido de apresentarmos o objetivo e propósito do projeto, clarificarmos ideias, explicarmos a nossa envolvência e dos nossos alunos e com ajuda da coordenadora percebermos qual seria a educadora que estaria disponível para participar no projeto e disponibilizar a sua turma. A coordenadora do pré-escolar indicou-nos o nome de uma educadora que em princípio estaria receptiva a participar e disponibilizou-se para entrar em contacto com ela nesse sentido. Passados poucos dias fui contactada pela educadora a fim de me reunir com ela e apresentar a atividade que as professoras tinham pensado realizar com o seu grupo de crianças do pré-escolar. A ideia foi acolhida com muito agrado e entusiasmo pela educadora e a partir desse momento e em reuniões de trabalho colaborativo e muitos outros momentos começamos a colocar em prática a nossa ideia conjunta.

De seguida passarei a descrever todo o conjunto de atividades propostas pelos alunos e professoras com o objetivo de operacionalizar a recolha de dados. Todas essas atividades resultaram numa atividade comum que envolveu durante dois dias todos os cursos profissionais em simultâneo.

A recolha de dados por parte dos alunos dos cursos profissionais passou por duas fases, tendo em conta as ideias que surgiram: uma através da elaboração de um questionário para entregar aos encarregados de educação dos alunos do pré-escolar e outra através da recolha de dados direta durante a realização das atividades organizadas pelos alunos do ensino profissional. É de destacar que nesta fase, a recolha de dados foi feita por eles. Em reunião de trabalho colaborativo e tendo em conta o que iríamos realizar com as crianças do pré-escolar resolvemos denominar essa atividade comum aos três cursos de “Saúde, alimentação e desporto na infância”. O objetivo era, com o envolvimento dos alunos dos cursos profissionais, que estes apresentassem propostas de

atividades/jogos adequados às crianças dos 3 aos 6 anos e que a partir daí fosse possível recolher dados que permitissem emergir vários tipos de variáveis e que os levassem a conjecturar sobre possíveis relações, recorrendo à Estatística como ferramenta útil e crucial para interpretação do real. Para além disso, e como era necessário conhecer os hábitos e características dessas crianças, para melhor organizar jogos/atividades e refeições, todas as turmas, por sugestão das professoras, elaboraram questionários que lhes permitissem recolher informações sobre as crianças e desta forma refletirem melhor sobre a adequabilidade das atividades que iriam desenvolver para esse público-alvo. Os alunos sugeriram questões e desses conjuntos, discutidos e reajustados em reunião de trabalho colaborativo, resultou um questionário comum que entregámos à educadora e que esta por sua vez os fez chegar aos encarregados de educação, recolheu e entregou-nos preenchidos (anexo 12). Passado pouco tempo e depois da recolha dos questionários, a Patrícia disponibilizou-se para organizar a informação numa tabela (anexo 13) de modo a que fosse menos moroso o tratamento de informação. Até esse momento não tínhamos presente o número de variáveis que iríamos usar nas tarefas. O refinamento dos dados recolhidos foi um trabalho posterior e durante o desenrolar da criação das tarefas. O objetivo inicial era que todo o módulo de Estatística fosse trabalhado a partir de dados reais e motivadores pelos alunos e que surgissem todo o tipo de variáveis.

Planificação das tarefas: A dois de fevereiro de 2012 (sessão nº 9, apêndice 11) e após termos acordado como iríamos recolher os dados e com que objetivo começámos então a discutir como iríamos planificar as tarefas e os conteúdos a considerar. Nessa sessão, a minha ideia inicial era que começássemos a partir das propostas discutidas em reuniões anteriores, criar a primeira tarefa, mas o rumo da reunião tomou outro caminho que se revelou crucial para a organização do nosso trabalho. Patrícia sugeriu que, antes de pensarmos na estrutura da primeira tarefa, era preferível planificarmos o módulo de Estatística, quanto ao número de tarefas e conteúdos a abordar em cada uma delas. Esta organização e planificação foram cruciais, porque todas se sentiram mais organizadas e com pontos em comum acordados e que serviriam de base de sustentação para a criação das primeiras tarefas. Ficou acordado que a primeira tarefa e segunda iriam ser comuns aos três cursos, uma vez que os dados que iríamos recolher iriam numa ou outra tarefa cruzar-se e seriam do interesse para os alunos dos três cursos envolvidos. As outras tarefas iriam ser criadas por cada uma delas, tendo em conta o curso que estavam a lecionar, sendo posteriormente e antes de implementadas em sala de aula, discutidas e reajustadas

em reuniões de trabalho colaborativo. Desta forma afinaríamos as questões que seriam colocadas nas tarefas, uma vez que em cada tarefa os conteúdos a abordar e os objetivos a atingir seriam os mesmos.

Criação das tarefas pelas professoras: Passados poucos dias, e tendo agora um plano de trabalho negociado e acordado por todas, decidimos reunir (sessão nº 10, apêndice 12) e colocar em prática o que eu tinha em mente para a sessão anterior: criar a primeira tarefa. Partimos do princípio que todas tinham entendido o que era modelação matemática, tarefa de modelação e que a tarefa teria que passar por todas fases do ciclo de modelação adotado pelo grupo colaborativo. Em linhas muito gerais, o que fizemos nessa reunião, em que o sentimento era um misto de nervosismo com entusiasmo, foi fazer uma planificação da estrutura da primeira tarefa que servisse como modelo para todas as professoras e todas as tarefas a criar. Discutimos a estrutura, objetivo, título, conteúdos e recursos.

A reunião foi dedicada à estrutura da tarefa e possíveis questões a considerar. Com essa estrutura já pensada, cada uma começou a criar a primeira tarefa, respeitando a planificação feita conjuntamente e que posteriormente seria discutida. A estrutura da tarefa foi: Título alusivo ao tema a abordar; objetivos; conteúdos a abordar; materiais; fotos ou imagens relacionadas com a situação real, diálogos estabelecidos pelos alunos durante a observação da realidade, e as questões que tinham por objetivo não só abordar os conteúdos a ensinar, como fazer passar pelas várias fases do ciclo de modelação de Ferri (2006).

Na sessão seguinte (sessão 11, apêndice 12) dedicada também à criação das tarefas, começámos por analisar as tarefas que as professoras apresentaram. Todas as professoras resolveram fazer uma tarefa muito simples tendo em conta que constituía uma nova experiência, quer para si, quer para os alunos. De um modo geral, as tarefas criadas foram bastante criativas e tiveram em conta as motivações dos alunos e surgiram a partir da recolha de dados reais. As tarefas serão apresentadas nos capítulos dedicados aos estudos de casos.

Discutimos conjuntamente a forma de organizar os alunos e a forma como os iriam avaliar nesse módulo. Ficou decidido por unanimidade que não iriam realizar testes, mas sim trabalhos de grupo, isto é, em todas as aulas os alunos teriam que entregar a produção escrita da tarefa trabalhada na aula e a fase de discussão das tarefas serviria para avaliar a comunicação matemática oral. Quanto a estas tarefas, na altura e na opinião das

professoras estas pareciam cumprir e passar por todas as fases de modelação, no entanto esta ideia com o decorrer da implementação das tarefas e consequente reflexão sobre as fases de modelação e quanto ao que se entende por modelo real e modelo matemático, sofreu alterações e as tarefas posteriores também.

Reajustes das tarefas: Numa fase inicial e ainda antes da implementação das tarefas em sala de aula, tivemos uma reunião de trabalho com o objetivo de analisar as primeiras tarefas criadas e levar as professoras a refletir sobre o tipo de tarefas que tinham criado, com o intuito de perceber se estavam de acordo ou não com o ciclo de modelação de Ferri (2006). Essa reunião, sessão nº 12, decorreu no dia 13 de março de 2012 e teve por base um guião (apêndice 13) com algumas questões orientadoras que as levassem a refletir sobre esta temática. Nesta primeira fase, os reajustes deram-se ao nível da estruturação das tarefas e uniformização entre as várias tarefas apresentadas, no sentido de aplicarem o mesmo tipo de tarefa para o mesmo conteúdo estatístico. A preocupação foi de acertarmos a forma como organizaríamos os alunos, os recursos que seriam usados, discutir as possíveis dificuldades dos alunos e discutirmos as fases de aula. Todas as professoras mostraram entusiasmo e nervosismo. Entusiasmo associado à experimentação de algo novo e nervosismo relacionado com o não conseguir prever muito o que iria suceder e de que forma os alunos iriam aprender e como reagiriam às tarefas:

Patrícia: Eu estou curiosa para ver como vão as alunas reagir com este tipo de tarefa! Isto é tudo novidade, para mim e para elas! Elas não estão habituadas a serem elas a fazer as coisas e não sei até que ponto não haverá alguma resistência!

Sara: Eu acho que eles vão gostar do tema, porque é a área deles, mas o que vão produzir matematicamente já não sei bem. Estou um pouco nervosa com esta primeira aula, pois não sei como vai ser!

Filipa: Eu acho que vai correr bem, mas lá está, também não sei o que me espera! (Sessão de trabalho colaborativo, 13/03/12)

A discussão das tarefas já produzidas passou pelo debate quanto às fases de modelação e, segundo a opinião de todas as professoras, os alunos iriam passar por todas as fases de modelação de Ferri (2006), opinião essa que em outros momentos de discussão se modificou. Nesta primeira fase, tentei não intervir propositadamente muito na discussão quanto à classificação e tipo das tarefas, com o intuito de compreender se com o passar do tempo e discussões em sessões de trabalho colaborativo e implementação das

tarefas em sala de aula quais os reajustes que sofreriam e que evolução deste tipo de conhecimento se daria.

A terceira fase das sessões – as aulas

A terceira fase das sessões foi dividida em cinco sessões, iniciando-se a primeira a 17 de abril de 2012 (esta sessão também faz parte do final da segunda fase) e a última a 31 de maio de 2012. Nesta seção foi feita uma breve descrição do que aconteceu durante as sessões de trabalho colaborativo durante a fase de implementação das tarefas e observação dessas aulas. Nesta etapa assumi o papel de observadora participante e moderadora na promoção de debates que tiveram por base um guião previamente elaborado (apêndice 27). Foram visionados episódios de aulas das três professoras que levaram a uma reflexão conjunta sobre as aulas no que diz respeito à sua gestão e condução e sobre o que é uma tarefa de modelação. Em apêndice (apêndice 32) é apresentada uma tabela que retrata uma síntese do trabalho desenvolvido durante esse período de tempo.

No seguimento do que já foi descrito no ponto anterior, a discussão e análise das tarefas continuou numa outra sessão (sessão nº 14, apêndice 15) no dia 17 de abril de 2012, antecedendo a implementação das primeiras tarefas, tendo seguido o mesmo guião da sessão anterior. O que diferiu esta reunião da outra é que nesta planificámos conjuntamente uma aula de Sara, onde seria implementada uma tarefa “Conhecer melhor o grupo” (anexo 14). Foi acordada a estrutura e o recurso informático que iríamos usar, ficando decidido que seria o EXCEL. Ficou acordado que os alunos seriam organizados em grupos. Em conjunto foram feitos alguns reajustes à estrutura da tarefa apresentada. Não foram contempladas pelas professoras a fase de discussão e de sistematização da tarefa na planificação que fizeram para essas duas aulas, o que revelou a pouca importância que atribuíam a essas fases ou então não são uma prática recorrente quando implementam tarefas em sala de aula.

A planificação das aulas em que foram implementadas tarefas foi da responsabilidade de cada professora. Não foi por mim imposto nenhum modelo de planificação de aula. Cada professora elaborou um plano de aula para cada momento e entregou-mo atempadamente. Conjuntamente ficaram acordados os recursos a serem usados, o tipo de tarefa para cada conteúdo estatístico a lecionar, os materiais necessários, a forma de recolha de dados e a organização dos alunos. A forma como colocaram em

prática esse plano e o modelo usado ficou a cargo de cada uma das professoras, sendo notória a evolução da preparação das aulas sempre que conversavam umas com as outras sobre o que tinha sucedido, assim como após o visionamento de episódios de aula. Esses episódios serão descritos posteriormente nos capítulos inerentes a cada professora, analisando-se em cada momento das fases das práticas de ensino, o conhecimento para ensinar Estatística evidenciado.

Na sessão nº 18 (apêndice 19), foi discutida a planificação das aulas de modelação para as distribuições bidimensionais.

Reflexões sobre a observação das aulas e tipo de tarefas: A observação das aulas iniciou-se em finais de abril de 2012 e finalizou-se em meados de junho de 2012. Em sessões de reflexão sobre as aulas, sessão 15,16 e 17, foram visionados episódios de aula das professoras. Nessas sessões baseei-me no visionamento dos vídeos e, tendo em conta as minhas notas de campo, selecionei episódios de modo a promover e provocar um debate sobre o que tinha ocorrido e que fases de modelação emergiam dessas tarefas. Para estas reuniões não foram elaborados guiões, uma vez que utilizei o guião de observação de aulas preenchido por mim, com notações e referência a episódios de aula que eu desejava que fossem visionados e debatidos na sessão de trabalho colaborativo. Essas questões e visionamento de vídeos serviram para refletirmos sobre o modo como as aulas tinham sido conduzidas e geridas e, nesse sentido, foram feitos pelas professoras reajustes em planos de aula que ainda iriam implementar. Isto é, o visionamento desses episódios, permitiram que as professoras através da partilha de experiências, inquietações, imprevistos e sucessos, levassem a que as outras professoras repensassem na forma como iriam conduzir e gerir as suas aulas para aquelas mesmas tarefas, estando já preparadas para dar respostas a solicitações de alunos porque já tinham observado o ocorrido com outras colegas, nomeadamente nas fases e tempo da aula.

A sessão nº 15 foi no dia 8 de maio de 2012, a sessão nº 16 no dia 16 de maio de 2012 e a sessão nº 17 no dia 21 de maio de 2012 e tiveram como objetivo principal visionar episódios de aula de Patrícia, Filipa e Sara, respetivamente, no tema da Estatística. Em cada uma das sessões comecei por solicitar às professoras que descrevessem a sua aula, fizessem um balanço, que identificassem dificuldades sentidas pelos alunos e por elas e surpresas que tiveram. Ao longo do visionamento dos episódios de aula, foram feitas algumas paragens e colocadas algumas questões no sentido de as levarem a refletir sobre a gestão e condução da aula e sobre o tipo de tarefa que

implementaram e identificação das fases de modelação, tais como: “que importância atribuem a esta fase de introdução da tarefa, quanto à apresentação e intervenção da professora? Qual a gestão do tempo e forma como se dirige à turma, diretrizes que fornece à turma? Simplificou a tarefa ou achou necessária a quantidade de informação inicial? A informação fornecida foi dada com que objetivo? Qual a reação dos alunos? Era o esperado? O que têm a dizer acerca da postura da professora quanto às solicitações dos alunos? Fariam de igual forma? Com que objetivo não eram esclarecidas dúvidas acerca dos conceitos esquecidos? O que pensam da intervenção da professora? E que influência pode ter tido no envolvimento matemático dos alunos? Tomariam a mesma atitude? O que pensam da envolvimento dos alunos? O que discutem? O papel da professora influencia o papel dos alunos? Eles estão envolvidos matematicamente? Os alunos estão em que fase da modelação? Esta aula foi de modelação? Na vossa opinião houve debate de ideias e conclusões? Que importância atribuem à discussão de conclusões no final da aula de modelação? Vantagens/desvantagens? O que mais poderia ter sido feito? Na vossa opinião correu bem? Há alterações propostas para a tarefa ou gestão/condução da aula?”. Estas questões são exemplos de pontos de partida para a discussão e reflexão sobre o tipo de aula e tarefa. Não foram sempre as mesmas em cada sessão e nem sempre seguiram a mesma ordem, pois cada professora é um caso e como tal as aulas não foram iguais.

No início deste estudo e ainda durante algum tempo, mesmo após as reflexões anteriores, as professoras consideravam que as tarefas eram todas de modelação, alterando-se essa conceção numa reunião de trabalho colaborativo em que foi promovido um debate com questões orientadoras que as levou a refletir sobre o tipo de aulas e tarefas até ao momento criadas e implementadas. No dia 31 de maio de 2012, sessão nº 18, e seguindo um guião (apêndice 19) com questões orientadoras, foram lançadas várias questões que levou à reflexão sobre o tipo de tarefas que tinham sido criadas até esse momento. As questões lançadas foram, por exemplo: “As tarefas que criámos até ao momento são mesmo tarefas de modelação ou são tarefas de preparação à modelação estatística? Chegamos ao modelo matemático ou ao modelo real? Afinal o que é mesmo uma tarefa de modelação? Quais as potencialidades da tecnologia na modelação estatística? Quais as diferenças ao nível da modelação que encontram nas tarefas criadas até agora e nas que vão criar ou criaram sobre as distribuições bidimensionais?”

Esta sessão foi crucial e uma viragem na compreensão por parte das professoras do que afinal era um modelo matemático e consequentemente uma evolução quanto ao

entendimento do que era uma tarefa de modelação estatística. A principal conclusão a que chegaram foi: todas as tarefas criadas até momento e que antecederam as tarefas sobre as distribuições bidimensionais, não foram “bem” de modelação, pois após esta reflexão conjunta e pensando nas fases de modelação do ciclo de Ferri (2006) referiram:

Patrícia: Vendo bem, nem todas as tarefas que fizemos, e agora falando de tarefas de modelação, nem todas as tarefas que criámos foram de modelação completas! Pensando no ciclo de modelação, só as últimas.

Sara: Eu acho que nas outras também houve modelação, porque eles cumpriram parte do ciclo ...porque a partir do modelo real, a que eles tinham que construir, pedíamos para interpretar e houve alguma organização matemática ao tirar conclusões...havia ali coisas que não eram cumpridas (refere-se às fases do ciclo de modelação) mas há uma aproximação do modelo matemático!

Patrícia: Nas outras tarefas eles chegaram ao modelo real, tabelas e gráficos, mas o modelo matemático não apareceu, não tínhamos nenhuma função.

Sara: Sim, pode ser, mas nas primeiras houve alguma modelação, embora nem todas as fases tivessem presentes. (Sessão de trabalho colaborativo, 31/05/12)

Concluíram que até então os alunos só tinham chegado ao modelo real e não ao modelo matemático. Tinham construído tabelas, gráficos e até feito previsão de resultados matemáticos e alguma reflexão sobre a sua adequabilidade à situação real, mas não tinham chegado exatamente a um modelo matemático, porque não tinham solicitado muitas interpretações e apenas organização dos dados. No entanto, durante a sessão, nem sempre a opinião foi partilhada por todas, mas evoluiu no final para um consenso. Estas tarefas foram denominadas, pelas professoras, por tarefas de “pré-modelação” porque segundo elas passaram por algumas fases do ciclo de modelação. Justificaram ainda que conclusões a que os alunos tinham tirado, conseguiram estabelecer relações interessantes e conjecturas que serviram de suporte para a criação das tarefas de modelação para as distribuições bidimensionais.

Reajustes das planificações das tarefas e aulas: Os reajustes das aulas e tarefas aconteceram ao longo de todo o ano letivo e foram influenciados por vários aspetos: uns relacionados com a reflexão emergente da observação dos episódios de aula que levaram as professoras a reajustar as suas tarefas e o plano de aula para a tarefa que tinham criado para a leção dos conteúdos abordados na aula da outra colega; outros que surgiram após conversas informais que as professoras foram tendo umas com as outras antes e após

as aulas onde implementaram as tarefas; outros emergiram durante a gestão e condução das aulas ao deparem-se com alguns imprevistos, onde tiveram que agir de imediato e tomar decisões no sentido de alterarem e adaptarem a própria tarefa que estavam a implementar na aula. Outros reajustes finais surgiram a partir da reflexão final conjunta que fizemos nas últimas sessões de trabalho colaborativo e que estão relacionados com alterações nas próprias tarefas, nomeadamente no número e tipo de questões, assim como sugestões de ampliação das próprias tarefas e tempo de duração das mesmas. Esta última parte será descrita de forma mais detalhada na seção seguinte. Todos estes reajustes foram discutidos e refletidos conjuntamente, tendo as professoras participado ativamente, partilhando o que tinha corrido bem e mal na aula, que imprevistos tinham surgido e como os ultrapassaram, que inquietações vivenciaram e que partido tiraram dessa experiência para as suas práticas de ensino e futuras aulas de modelação. Todos estes aspetos serão retratados, descritos e analisados para cada professora em capítulos seguintes.

A quarta fase das sessões – a reflexão final

A reflexão final teve dois momentos cruciais nas duas últimas sessões de trabalho colaborativo: as duas reuniões ocorreram no mesmo dia (11 de julho de 2012) onde foram abordados vários temas relacionados com o conhecimento para ensinar Estatística.

A 19.^a sessão seguiu um guião orientador (apêndice 20) que teve como objetivo principal compreender a reflexão que as professoras fizeram sobre a planificação das aulas de modelação e gestão e condução dessas aulas, onde foram implementadas as tarefas de modelação para as distribuições bidimensionais aplicadas nas várias turmas do ensino profissional. Nessa sessão foram observados episódios de aula de modelação onde foram implementadas tarefas sobre as distribuições bidimensionais e solicitado às professoras relatos na primeira pessoa sobre o que aconteceu nessas aulas. Após o visionamento desses episódios, foram colocadas questões constantes do guião de modo a provocar uma reflexão sobre: o que tiveram em conta para a preparação dessas aulas e que reflexões fizeram sobre essa preparação; a metodologia usada e propostas de alterações; a forma como a recolha de dados foi feita e sua adequabilidade; o objetivo da criação dessas tarefas, o porquê da sequência e o funcionamento da mesma e a avaliação das tarefas.

Quanto a reajustes nas tarefas, as professoras referiram que não foram necessários grandes reajustes na estrutura, a não ser nas questões, acrescentando ou anulando alguma,

tendo em conta a turma em questão. Destacaram que deveriam ter em consideração a fase de discussão, a exposição oral de ideias dos vários grupos, como parte integrante das fases de qualquer tarefa em sala de aula.

De um modo geral, as professoras fizeram um balanço bastante positivo acerca da criação e implementação das tarefas de modelação que abordaram o estudo das distribuições bidimensionais. Referiram que os alunos estabeleceram relações interessantes que partiram das conjecturas que fizeram, conseguiram interpretar resultados matemáticos e validaram modelos matemáticos tendo sempre presente a situação real por eles conhecida e criada.

A última sessão teve como objetivo realizar uma entrevista comum que levasse à partilha de experiências e reflexão sobre todo o trabalho conjunto desenvolvido e que me levasse a uma maior compreensão sobre as evidências do conhecimento para ensinar Estatística das professoras, num contexto de trabalho colaborativo durante a organização de toda a prática de ensino (Ponte, 2011): preparação e planificação das aulas, gestão e condução das aulas e, por último, reflexão sobre as aulas. Esta sessão, à semelhança de todas as outras, seguiu um guião orientador (apêndice 21). De seguida passarei a descrever de forma sucinta as reflexões conjuntas mais importantes.

O primeiro grupo de questões está relacionado com a primeira das fases das práticas de ensino: preparação e planificação das aulas, neste caso de modelação estatística, e teve por objetivo perceber o que foi feito em comum e individualmente, o que tiveram em conta para a seleção e criação das tarefas (conjuntamente e individualmente) e as dificuldades sentidas. As professoras referiram que conjuntamente acordaram o número de tarefas que iriam criar e implementar em sala de aula, a estrutura da tarefa, tipo de questões, variáveis e os conteúdos estatísticos a abordar em cada uma dessas tarefas. Para além disso, todas contribuíram com ideias para situações reais relacionadas com os três cursos profissionais:

Sara: Nós em conjunto começamos por fazer um esquema de tarefas e o tema de cada tarefa e estrutura e os conteúdos a abordar em cada tarefa. Isso foi o que ficou acordado entre todas inicialmente!

Patrícia: Aquilo que tivemos em conta para a seleção das tarefas foi em primeiro as variáveis e depois os conteúdos que iriam ser abordados!

Sara: Daqui surgiram sugestões de atividades para a recolha de dados, para a seleção das tarefas. Toda a gente contribuiu e foi um ponto de partida, por exemplo, toda a gente contribuiu com ideias para a gincana.

Filipa: Eu também concordo e achei interessantes termos feito recolha de dados a partir de atividades comuns a todos os cursos. Acho que isso foi uma mais-valia porque realmente surgiram várias variáveis. (Sessão de trabalho colaborativo, 11/07/12)

Individualmente, adaptaram as tarefas criadas aos alunos que tinham, respeitando as suas motivações, curso profissional e conhecimento prévio das suas aprendizagens, embora sempre influenciadas por toda a discussão realizada conjuntamente nas várias sessões, em conversas informais e pelo que ocorria nas aulas, quer de cada uma, quer das outras professoras:

Sara: Individualmente foram feitas adaptações de cada tarefa à turma, ao curso profissional e aos alunos. Cada turma era uma situação específica e tínhamos que adaptar cada tarefa aquela turma e àquele curso e aí já foi individualmente. Embora tenha sido individualmente, teve sempre tudo muito a ver com tudo aquilo que se fala em grupo e acho que sem isso era mais difícil.

Filipa: A planificação individual foi sempre influenciada pelo que se fazia em conjunto, quer pelo que falávamos sobre as aulas umas das outras.

Sara: Não só pela planificação conjunta, como também pelas ideias que nós íamos recolhendo pelas aulas anteriores e sempre como é que está a correr com as outras turmas e se isto funcionou bem...ou isto não funcionou tão bem! Tudo isso influenciou a parte individual de cada uma de nós!

Patrícia: O esquema de tarefa que a Sara se refere foi basicamente o tronco comum da atividade em grupo e depois cada uma especificou para a área, porque eram três cursos diferentes e orientou para a área do curso, mas a estrutura em geral, os conteúdos e questões eram muito parecidas. (Sessão de trabalho colaborativo, 11/07/12)

Para estas professoras foi difícil dissociar o que foi feito apenas individualmente do que foi realizado conjuntamente, porque o trabalho colaborativo influenciou a forma como adaptaram as tarefas e planificaram as aulas de modelação. Desta forma, evidenciaram evolução, na forma como foram reajustando as tarefas, através do conhecimento que detinham sobre os seus alunos e aprendizagens.

Relativamente às dificuldades sentidas nesta fase do trabalho, destacam o nervosismo inerente à criação da primeira tarefa, em particular como começar, ansiedade quanto ao tipo e qualidade de produção matemática dos alunos, dificuldades essas que se foram atenuando, segundo elas, devido ao grupo de trabalho em que estavam inseridas e também ao trabalho inicial desenvolvido durante a fase teórica do trabalho colaborativo,

onde foram discutidos os conceitos de modelação matemática, ciclos de modelação e tarefa de modelação:

Sara: Quanto às dificuldades eu no início tinha algumas reticências quanto à produção dos alunos e tinha várias interrogações: será que eles vão trabalhar? Será que eles vão conseguir fazer? Acho que vocês deram-me essa segurança ao dizer-me que: isso vai funcionar, vais ver que sim! E nesse sentido, se fosse sozinha eu acho que teria sido complicado!

Filipa: Eu tinha um medo inicial que era: como fazer a primeira tarefa? No entanto, o facto de estarmos a trabalhar juntas num ambiente de partilha e toda a gente debitar ideias, acho que é muito melhor do que estarmos sozinhas e todas começamos a falar e começou a surgir!

Sara: Todo aquele trabalho que fizemos inicialmente, o que é modelação, o que é uma tarefa de modelação, tudo isso contribuiu para chegarmos àquela estrutura de tarefas e quando chegamos ao 3º. período, a estrutura das primeiras tarefas de “pré modelação” ainda não estavam assim tão bem, mas fomos melhorando e nota-se a diferença para as tarefas de modelação!

Filipa: Foi muito importante esse momento inicial, não só para a nossa formação e compreendermos o que é, como aplicar, fazer e como pôr em prática...e nem ficavam tarefas tão bem construídas se não tivéssemos tido acesso a todo esse tipo de informação!

Patrícia: Esse momento inicial foi crucial e o trabalho de grupo também porque o surgimento de ideias e partilha é muito importante! (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

No segundo grupo de questões do guião da última sessão foi solicitado que cada uma das professoras descrevesse um episódio de aula de uma das colegas que de alguma forma a tivesse influenciado, quer na preparação e planificação da aula de modelação, quer posteriormente durante a gestão e condução de uma aula. Cada uma das professoras destacou casos que as fez refletir e que as influenciou em uma ou mais fases das práticas de ensino, não se lembrando exatamente de uma única situação, mas de diversas situações que as influenciou. Atribuíram importância ao visionamento dos episódios de aula, porque as levava ao questionamento do que resultava ou não em sala de aula e assim reajustavam a planificação de aula que tinham preparado:

Patrícia: Semana após semana íamos ouvindo e adaptando conforme ouvíamos. Achei muito bom, termos visionado aqueles episódios de aula, porque assim víamos o que resultava ou não e às vezes ainda íamos a tempo de mudar!

Filipa: O facto de termos visto os episódios de aula foi uma mais-valia.

Patrícia: Sim e dá para nos apercebermos do que resultava e do que não resultava! (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

Referiram também que, ao observarem situações imprevistas, foram melhor preparadas para as possíveis tomadas de decisão caso esses imprevistos também surgissem nas suas aulas, o que as levou sem dúvida a conduzir e gerir as suas aulas de forma mais eficaz. Alguns conceitos, tais como o que se entende por conjectura, ficaram mais claros e ao serem questionadas pelos alunos nas aulas, como já tinham visionado episódios onde essa questão tinha surgido, a forma como a abordaram e lhe responderam foi influenciada pela atitude das outras colegas:

Sara: Eu vou pegar num episódio da Patrícia, por exemplo, quando os alunos perguntaram o que era uma conjectura. Isso marcou-me! Eu tinha visto uma aula da Patrícia, e ela deu a aula dela antes de eu dar a minha e eu tinha pensado que forma é que teria de arranjar para explicar aos miúdos o que é uma conjectura. Então, quando eu vi o episódio dela e ... vários grupos perguntaram e ela foi dizendo algumas coisas a uns e a outros outras e eu ...na minha aula, quando eles me perguntaram, eu já tinha pensado sobre aquilo e eu acho que nós à partida já vamos com mais ideias e melhor preparadas!

Filipa: Aconteceu-me o mesmo, quando me perguntaram o que era uma conjectura eu já estava mais prevenida para a resposta...porque já tinha visto as dúvidas das alunas da Patrícia. (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

Nesta sessão, quando questionadas sobre a interpretação e atenuação das dificuldades na gestão curricular deste programa ao longo das sessões de trabalho colaborativo, foram várias as razões apontadas. As professoras referiram que o contexto de trabalho as ajudou a ultrapassar umas dificuldades e a minimizar outras, sentindo-se mais capazes, seguras e conscientes na gestão curricular e interpretação de estratégias e metodologias sugeridas:

Patrícia: No meu caso foi o primeiro ano com uma turma do ensino profissional e a minha interpretação era um bocadinho individual e se calhar um bocadinho mais superficial. Ao haver trabalho colaborativo há sempre troca de ideias e a partilha de conhecimentos que vocês já tinham ...só por aí já foi um apoio! Portanto, o trabalho colaborativo é sempre preferível ao trabalho individual! E houve uma atenuação das dificuldades e eu neste momento sinto-me mais capaz com este programa, e consigo interpretar melhor as estratégias e metodologias que sugerem. (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

O que mais se destaca foi a preocupação crescente em criar tarefas de modelação que se adaptassem a cada curso e a evolução notória relativamente ao que entendiam por modelação matemática, o que evidencia a evolução do conhecimento do currículo. Embora seja um dos temas transversais deste programa, até então estas professoras tinham lecionado, a estes cursos, os conteúdos estatísticos da mesma forma que o faziam usualmente no ensino regular, ignorando muitas vezes o que era sugerido no programa de Matemática para o ensino profissional:

Sara: Eu tenho a certeza de que se não fizesse parte desta equipa a interpretação teria sido outra, a forma como sei agora o que é modelação e como se adapta a estes cursos. Eu já tinha dado o módulo de Estatística numa turma do ensino profissional e fi-lo da mesma forma como se fosse no ensino regular. Lembro-me na altura que o profissional era uma novidade. Tinha 10.º ano e como queria rentabilizar o tempo e já tinha muito material de 10.º ano, aproveitei o que tinha do currículo normal. Neste momento sinto que desenvolvi e evolui nesse sentido, sei o que é modelação e como adaptar a estes cursos! Fiquei com uma ideia totalmente diferente do que tinha no início e fiquei muito mais segura! (Sessão de trabalho colaborativo, 11/07/12)

Quando questionadas sobre a reflexão que fazem acerca da evolução do conhecimento profissional que possuem ao fazer a gestão curricular deste programa, as professoras anuíram que evoluiu bastante, mas estão a aprender ainda e terão ainda muito caminho a desbravar pela frente. O facto de terem estado a trabalhar colaborativamente permitiu-lhes despertar um maior espírito crítico e reflexivo sobre o conhecimento profissional que possuíam e que agora têm:

Sara: Eu acho que neste momento evoluiu bastante, mas ainda há muitas mais coisas a descobrir e a trabalhar. Tendo em conta o módulo de Estatística deu para perceber a evolução e o salto entre o que eu fazia antes e o que faço agora!

Patrícia: Comecei a questionar muito mais e a valorizar mais e a pensar mais sobre o que se pretende!

Filipa: Eu também concordo...e isso aconteceu porque fi-lo conjuntamente, caso contrário continuava a fazer mais do mesmo e a cometer erros a nível científico! (Sessão de trabalho colaborativo, 11/07/12)

Nesta sessão, as professoras referiram que houve uma evolução relativamente ao que entendem por modelação matemática, modelo matemático e tarefa de modelação. Estes conceitos do ponto de vista da interpretação do currículo eram o que estavam menos clarificados desde início e foram evoluindo à medida que se foram criando tarefas.

Todas as professoras mencionaram que nem todas as tarefas criadas foram de modelação, embora as primeiras tarefas construídas fossem cruciais para a criação das segundas, anuindo que só podem denominar uma tarefa por “tarefa de modelação” se os alunos conseguirem passar por todas as fases do ciclo:

Filipa: Mas não acham que as primeiras tarefas que fizemos não foram importantes para as últimas? Eu acho!

Patrícia: Foram importantes! Foi uma forma de nos orientarmos.

Sara: As outras tarefas serviram para aproveitarmos o que surgiram delas para criar as de modelação sobre as distribuições bidimensionais.

Patrícia: Temos que pensar que essas primeiras tarefas, são umas tarefas mais simples do que as outras que tinham que relacionar variáveis e ao termos uma tarefa que é mais complicado, mais complexa é mais fácil encaixarmos as várias fases...quando temos uma tarefa simples, onde pedes coisas simples, onde há variáveis muito simples é muito difícil fazermos encaixar as fases todas. Se estas últimas é que passam pelas fases todas, então as outras são de pré-modelação, não acham?

Filipa: Eu acho que essas tarefas influenciaram a criação das outras de modelação (refere-se às tarefas de modelação sobre as distribuições bidimensionais) e sim, concordo! (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

As professoras destacaram a importância do trabalho colaborativo e toda a reflexão conjunta realizada, na percepção e evolução da compreensão do que é uma tarefa de modelação e consequente sucesso na sua criação:

Sara: Pois, eu nem tentei fazê-las individualmente, mas de certeza que nem tinha saído metade do que foi feito! Se não fosse o trabalho colaborativo que fiz convosco, se calhar, nem tinham saído tarefas de modelação!

Filipa: Acho que houve alturas que me fizeram mesmo pensar o que era uma tarefa de modelação, pois percebi que existem umas que são mais de modelação do que outras ...eu inicialmente tinha uma ideia mais simples...

Patrícia: As tarefas nunca poderiam ter sido feitas da mesma forma, porque aproveitámos as ideias de grupo, das reuniões, para as tarefas! Se não pensássemos em conjunto a estrutura não teria sido a mesma. Houve ideias de todas. (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

Na última parte desta sessão, foram colocadas questões no sentido de todas darem a sua opinião sobre os contributos do trabalho colaborativo ao nível da: evolução do seu conhecimento profissional, reflexão sobre as suas práticas de ensino, criação e preparação das tarefas de modelação para cada curso profissional; e de perceber o que mais e menos

gostaram e qual o seu ponto de vista sobre a integração em equipas de trabalho colaborativo.

As professoras anuíram que, se não fosse o trabalho colaborativo, dificilmente interpretariam e geririam o currículo da forma como o fizeram:

Sara: Admito que na parte da gestão do currículo do ensino profissional, o interpreto de forma bastante diferente!

Patrícia: Eu também senti evolução. Como era a primeira vez a lecionar profissional, se calhar eu tinha agarrado no currículo e tinha dado as aulas como se faz no regular...duvido que tivesse tido 100% de sucesso como tive.

Filipa: Eu falo por mim, relativamente à evolução do meu conhecimento profissional, eu acho que isto realmente de trabalhar em equipa não tem nada a ver. É diferente ter com quem partilhar. Às vezes até temos uma ideia, mas não sabemos como a colocar em prática, e a mim já me tinha acontecido com os profissionais, pois já tinha tido necessidade de fazer algo diferente com o programa e sabia que o objetivo era realmente adaptar, mas não sabia muito bem como. A mim aconteceu-me que aquilo que foi surgindo com as turmas do profissional serviu-me para a forma como planifiquei e conduzi as aulas de outras turmas do regular...o que aprendi com esta experiência não se ficou só pelo ensino profissional, mas foi algo muito mais abrangente! Influenciou a minha prática nas outras turmas também! Eu acho que consegui transpor esta experiência para a minha prática diária. (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

Segundo as professoras, não só tiveram mais em conta as orientações metodológicas e temas transversais da Matemática, como assumiram um outro papel, mais de guia e menos expositivo, levando os alunos a assumirem, na gestão e condução da aula, um papel mais ativo e envolvente no seu processo de aprendizagem. As expectativas em relação aos alunos eram baixas, devido ao conhecimento que tinham deles e das suas dificuldades e com este trabalho aperceberam-se que mudando a metodologia de trabalho e indo ao encontro das suas motivações, o trabalho produzido pelos alunos era maior e melhor:

Sara: Na gestão de sala de aula também...tinha algum receio em passar para o lado de lá (refere-se ao facto de não estar num papel expositivo), isto é, serem eles sozinhos a fazer, tinha algum receio que eles não produzissem ...e claro antes de lecionar algo que não me é muito familiar vou estudar antes.

Filipa: Neste tipo de tarefas perde-se um bocadinho aquela perceção de controlo do que vai acontecer na aula, pois o nosso papel é outro!

Sara: Eu tinha um bocado receio que fizessem algo diferente do que eu estava à espera e que não fossem ao encontro do que era expetável...eu tinha uma baixa expetativa dos alunos e tinha algum receio do que eles poderiam produzir matematicamente, pois sabia o que eles tinham produzido nos módulos anteriores e não foi grande coisa! Se não fosse o trabalho que fiz convosco não teria sentido tanta segurança e realmente isto funcionou com eles...e se funciona com esta turma, resulta com outra turma qualquer ou qualquer outra pessoa! De certeza absoluta. (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

Quanto à reflexão que estas professoras fizeram acerca da pertinência do trabalho colaborativo na preparação, criação e implementação das tarefas de modelação foi referido que nesse momento ponderavam muito mais sobre o objetivo da tarefa e a que se destina, conseguem adaptar melhor as tarefas às turmas e aos alunos em questão. É apontado por todas que a prática de ensino evoluiu bastante e que partir daquele momento a reflexão feita era muito mais cuidadosa e crítica, pensando em aspetos que anteriormente nem eram contemplados:

Sara: Eu sinto-me muito mais segura quanto ao que é uma tarefa de modelação e neste momento tanto faz se é sobre Estatística ou outro tema qualquer...e tenho muita vontade de experimentar, por exemplo, no tema das Funções! Antes nunca tinha feito tarefas com este tipo de estrutura...fiz algumas tarefas que julguei que levassem a um maior envolvimento...mas no fundo eram exercícios e não eram tarefas em que eles tivessem que procurar um modelo matemático, uma função e tivessem que adaptar ou procurar melhor ainda de acordo com a situação real! A nossa prática modificou-se e já não fica nunca por aqui!

Patrícia: Nunca mais vai ser o mesmo, o modo como selecionamos ou criamos as tarefas a partir de agora é com outros olhos muito mais críticos e cuidadosos! (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

Para finalizar, as professoras foram questionadas sobre a experiência vivida em conjunto, o que gostaram, o que modificariam e quais os maiores contributos ganhos a nível pessoal com esta experiência conjunta. Segundo as professoras, esta experiência revelou-se ser para si marcante e influenciará a sua vida profissional futura, pois segundo elas, o mais importante foi a equipa e terem gostado de fazer parte dum grupo de trabalho que permitiu a exposição de ideias de todas, sem inibições, sem constrangimentos, sem hierárquicas e sem individualismos. Desta forma, todas tiveram oportunidades de se fazerem ouvir, de colocar dúvidas, de ver e refletir sobre as suas práticas e das outras professoras e aprenderem com o que viram, ouviram e viveram:

Patrícia: O que mais gostei foi da equipa, demo-nos todas bem e lá está, ninguém fez segredo daquilo que estava a fazer e, portanto, as pessoas não trabalharam de forma individual...toda a gente fazia o que fazia, depois observamos em vídeos ou discussões de relatos das aulas...não é? Foi tudo feito num clima de muita clareza e espírito de equipa e todas davam ideias mesmo que não fosse para a sua turma e isso foi muito importante!

Filipa: Isso é o que eu acho que é um trabalho de equipa! Ninguém se sobrepôs, houve respeito, não houve hierarquia nenhuma e toda a equipa conseguiu dar contributos, aceitar a opinião umas das outras e aqui toda a gente aceitou!

Sara: Eu acho que o trabalho de equipa funcionou bem e acho que para além das sugestões que deram...e acho que gostei sempre de todas as sugestões que deram...eu tentei perceber e levar sugestões que permitissem avançar e no sentido de ajudar e não de criticar. Certamente há grupos em que isso não funciona, em que as pessoas não aceitam sugestões e não aceitam críticas! Aqui eu nunca senti isso e funcionou muito bem! (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

Todas as professoras concordaram que voltariam a integrar uma equipa de trabalho com estes objetivos, características e pessoas com vontade em aprender e a partilhar, sendo os motivos justificados pelo trabalho conjunto desenvolvido com clareza, respeito mútuo e clima de partilha e aprendizagem:

Sara: Claro que sim! Porque foi uma boa experiência, porque gostei, acho que aprendi bastante e ajudou a melhorar as minhas práticas e, portanto, acho que sim! Houve partilha e ajuda mútua.

Patrícia: Claro que sim!

Filipa: Sem dúvida! Foi uma ótima experiência! Acho que é mais simples e rico trabalharmos em conjunto do que cada um trabalhar por si. Acho que as tarefas podem ser feitas em conjunto, acho que os testes podem ser feitos em conjunto...acho que é tudo muito mais simples e surgem muito mais ideias e acho que é muito mais proveitoso. É uma questão das pessoas se conseguirem organizar, terem uma hora ou duas por semana conjuntas e trabalharem.

Sara: Às vezes estamos em casa a pensar como é que vamos fazer isto e em conjunto...

Patrícia: Podes aproveitar uma ideia e depois ajustas. Foi ótimo trabalhar nesta equipa. Houve respeito e todas estávamos a aprender. (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

Os contributos mencionados como ganhos a nível pessoal e profissional foram comuns a todas as professoras: o tipo de trabalho desenvolvido que de outra forma não

teria sido abordado, a segurança ganha, a partilha de conhecimentos de cada uma e os laços de amizade que saíram mais fortalecidos:

Patrícia: A nível profissional eu ganhei bastante. Nunca tinha trabalhado assim, com este gosto de trabalhar em grupo e nunca tinha trabalhado neste contexto e em termos de cursos profissionais eu aprendi imenso! E a nível pessoal demo-nos todas bem e somos amigas!

Sara: A nível pessoal, foi a amizade! A nível profissional senti que fiquei muito mais confiante a fazer tarefas de modelação!

Filipa: Pois, eu também sinto o mesmo! Sinto-me muito mais confiante!

Sara: Mais confiança, mais à vontade e mais ...não ter tanto receio! Às vezes, nós temos dificuldade em inovar e em experimentar metodologias novas e se calhar experimentando em conjunto é diferente!

Filipa: Eu posso falar de uma coisa a nível profissional...as potencialidades do EXCEL que eu nunca tinha explorado e a Patrícia um dia disse-me: "isto dá para fazer regressões" e eu juro...nunca tinha feito, sempre usei a calculadora e acho que essa partilha dela a mim influenciou-me e se estivesse convosco, iria fazer como sempre tinha feito...com a calculadora!

Patrícia: Eu...com o que vi com as vossas aulas, eu vi como cada uma resolveu cada situação e para mim...eu já fui buscar coisas de cada uma de vós para a minha prática! (Sessão de trabalho colaborativo, 11/0712)

Síntese

Em síntese, todas as sessões de trabalho colaborativo revelaram-se essenciais para o funcionamento e logística da equipa, onde existiu um ambiente rico em partilha de ideias, onde existiram hesitações, medos, inseguranças que se foram atenuando devido ao clima de entreajuda e vontade em aprender cada vez mais e de crescimento profissional. Todas as professoras demonstraram interesse pelo projeto, respeito pelo trabalho de todas, o que claramente se manifestou na criação de interessantes tarefas de modelação no tema da Estatística para o ensino profissional. Foi uma experiência marcada pelo trabalho intenso, disponibilização de todos os membros da equipa e empenho.

Capítulo 6 – Sara

Sara integrou um grupo colaborativo que preparou uma experiência de ensino no domínio da Estatística, em particular do ensino das distribuições bidimensionais, com base em tarefas de modelação. Este capítulo procura dar a conhecer como a professora viveu a experiência de ensino, desde a preparação, condução e reflexão sobre o ensino, dando evidências do conhecimento para ensinar Estatística evidenciado por ela. Esta professora fez parte de uma equipa de trabalho colaborativo, durante um ano letivo, estando a lecionar o curso profissional de técnico de Gestão Desportiva.

Este capítulo está dividido em nove partes: a primeira procura retratar a pessoa e a professora; a segunda a sua relação com o trabalho colaborativo; a terceira caracteriza, de forma global, a experiência de ensino realizada por Sara, explicando as razões que a levaram à seleção de tarefas e com que propósito; a quarta descreve a fase anterior à modelação e que foi denominada pelas professoras por fase de “pré-modelação”; da quinta à sétima parte é feita uma descrição da preparação de três tarefas de modelação estatística (sobre as distribuições bidimensionais), condução e reflexão das aulas onde foram implementadas, procurando evidências que permitam compreender o conhecimento para ensinar Estatística da professora em vários momentos. Na sexta parte é apresentada uma reflexão global, por parte da professora, sobre a experiência de ensino, nomeadamente sobre as dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que foi sentido e como as superou e as que ficaram por superar. Por último, segue-se uma síntese que caracteriza o conhecimento para ensinar Estatística de Sara, tendo em conta as três dimensões que considero:

- Práticas de ensino com tarefas de modelação;
- Diferentes fases de desenvolvimento das tarefas de modelação;
- Dificuldades que se evidenciaram na preparação, condução e reflexão das aulas de modelação estatística.

Na caracterização e interpretação do conhecimento da professora foi usado como referência o quadro de análise definido no capítulo de revisão de literatura, que cruza as fases de modelação (Ferri, 2006) com os vários tipos de conhecimento estatístico para ensinar propostos por Groth (2007).

A pessoa e a professora

No início deste estudo, Sara tinha 29 anos e uma forte vontade de querer mudar o ensino e conseguir recuperar todos os alunos. Era a mais jovem do grupo de trabalho colaborativo e a pessoa que revelou maior ansiedade em relação ao sucesso do projeto que propus. O seu desejo de aprender era muito grande e o entusiasmo e empenho revelou-se uma mais-valia, sendo uma característica forte da sua personalidade e que deu, sem dúvida, muitos contributos a todas as professoras participantes deste projeto. A sua ansiedade inicial deveu-se a querer corresponder às expetativas do que antevia ser pretendido, do seu sentido de responsabilidade e desejo em aprender e evoluir:

Eu sinto-me bastante entusiasmada com este trabalho, porque para mim é tudo novidade. Eu gosto de coisas novas, de aprender e de conseguir depois mudar algo em mim. Por outro lado, tenho algum receio de não corresponder e de não conseguir contribuir da melhor forma, porque nunca fiz nada idêntico, mas vou dar o meu melhor. Outro receio que tenho está relacionado com a turma em si. Eles não são muito motivados, mas como vamos trabalhar com algo real espero que esse fator seja ultrapassado. (Sessão de trabalho colaborativo, 20/10/11)

Também revelou algum receio inerente ao desempenho dos seus alunos aquando da concretização das tarefas de modelação e outras atividades associadas.

Sara é uma jovem muito bonita, alta, simpática e o seu aspeto jovial propicia quase de imediato uma empatia com todos os que a conhecem, especialmente os alunos. O cuidado que tem com a sua imagem reflete o cuidado e brio que tem com tudo o que faz, produz e cria. A sua simpatia e envolvimento foi uma constante em todos os momentos e a sua característica perfeccionista com que vive a sua vida pessoal transparece no seu trabalho e em tudo em que se envolve.

Sara é licenciada em Matemática – Ramo de Formação Educacional e tem uma pós-graduação em ensino da Matemática, pela Universidade do Algarve, tendo uma classificação bastante elevada. Tinha apenas quatro anos de serviço, mas já tinha

lecionado quase todos os níveis de ensino. A forma como encara a profissão e o entusiasmo presente nas suas aulas revelam o gosto que tem pela Matemática desde os seus tempos de aluna e que a levaram a escolher ser professora desta disciplina:

Sempre gostei da área de Matemática, sempre tive muito mais apetência no cálculo, do que, sei lá, em línguas ou qualquer coisa assim, e depois foi a sorte! Entre engenharia civil e Matemática... saiu Matemática! E gostei, sempre gostei! (Primeira entrevista, 15/10/11)

Apesar do gosto que tem pela profissão, afirmou que se porventura mudasse optaria por algo completamente distinto, mais criativo e ligado às artes:

Se mudasse acho que mudava para uma coisa completamente diferente, uma coisa que fosse muito mais criativa e não me deixasse horas e horas presa a burocracias e papeladas... sei lá... qualquer coisa relacionada se calhar com algum tipo de artes ou qualquer coisa assim. (Primeira entrevista, 15/10/11)

No início não me pareceu muito importante esta informação, mas essa sua apetência criativa foi bem notória durante a sua envolvimento em todo o processo inerente à criação das tarefas de modelação e apresentação de situações realistas relacionadas com os contextos profissionais dos alunos.

Em conversas informais, foi-me dito por colegas de curso de Sara que esta, durante o seu ano de estágio pedagógico, foi uma das professoras envolvidas na criação e lançamento dos campeonatos do Sub-12 e Sub-14, jogos promovidos pelo Departamento de Matemática da Universidade do Algarve. Este facto demonstra a sua capacidade de ser criativa e vontade em inovar e aprender.

Para Sara, um bom professor é alguém que consegue motivar os alunos e fazê-los compreender os conteúdos que estão a ser lecionados. Um bom aluno é alguém que está interessado, gosta de aprender e estar na sala. Enfatizou que para ela, Matemática é uma disciplina que só se aprende praticando e por isso produz fichas e prepara muitas tarefas:

Como professora de Matemática, em relação à disciplina em si... ah... acho que me esforço por fazer sempre muitas fichas, muitas atividades, tentar levar os alunos a praticar bastante, porque matemática é uma disciplina que se aprende praticando muito. (Primeira entrevista, 15/10/11)

Embora goste do que faz, Sara dá a entender que esta profissão não é o que idealizava. As relações entre colegas e alunos não correspondem exatamente àquilo que

imaginava e sente que tem dificuldades em adequar os vários registos comunicativos às pessoas com quem contacta e fala:

Talvez o lidar com pessoas, o lidar com colegas e lidar com alunos e lidar com muitas pessoas todos os dias, que era uma coisa que eu até ser professora não fazia! (...). Agora, tenho que lidar com pessoas todos os dias e tenho que estar sempre a mudar de registo e de informações, não é tão fácil como eu pensei, que à partida eu esperaria! (Primeira entrevista, 15/10/11)

Sara e o trabalho colaborativo

Sara mostrou-se desde cedo disponível para integrar uma equipa de trabalho colaborativo no âmbito do meu projeto de doutoramento, revelando entusiasmo com o tema. Ao ser questionada sobre o porquê de participar no projeto, salientou o desejo de aprender sobre modelação matemática:

Querer aprender mais sobre tudo isto de como se modela e de como se preparam atividades mais relacionadas com os alunos e que os possam motivar ainda mais e os possam ajudar a adquirir competências na área em que eles vão estão a tirar cursos, por exemplo! (Primeira entrevista 15/10/11)

A expectativa de aprender mais está relacionada com a possibilidade de conseguir motivar mais os alunos para a disciplina e ajudá-los a adquirir competências na área relacionada com o curso profissional:

Espero aprender, espero melhorar, espero ser mais capaz no futuro de motivar os alunos, motivar melhor! De ajudar mais! (Primeira entrevista a Sara, 15/10/11)

Na primeira entrevista, Sara foi questionada sobre o que entendia por trabalho colaborativo e explicou que consiste na entreajuda, troca de ideias, discussão e reflexão conjunta:

Trabalho colaborativo é obviamente colaboração entre pares, entre colegas e troca de ideias, às vezes entreajuda e que a partir daí consiga chegar-se a um objetivo mais rapidamente e desenvolver-se a nível pessoal, profissional. (...) Trabalho colaborativo tem a ver muito com troca de ideias, troca de situações, o que é que fiz aqui? O que é que fiz ali? Como é que fiz? E que resultados é que obtive? Se foi bom, se foi mau?!!! Se correu mal? Esse tipo de situações! (Primeira entrevista, 15/10/11)

Sara participou de forma criativa e bastante interventiva em todas as sessões de trabalho colaborativo, trazendo várias ideias para as reuniões e contribuindo de forma muito rica no desenvolvimento do trabalho, nomeadamente a nível de ideias de propostas de situações reais, atividades com os alunos que os envolveram na recolha de dados reais, e criação das tarefas. De seguida darei exemplos de intervenções e contributos de Sara durante as várias sessões, quer relativamente a ideias para situações reais, quer para a criação das tarefas e formulação das suas questões.

Na segunda sessão de trabalho colaborativo, Sara revelou que tinha analisado com cuidado o programa, o que foi visível, uma vez que interveio em todo o debate, dando respostas e opiniões a todas as questões. No início da reunião demonstrou que ao ler o programa novamente e de uma forma mais cuidada, a interpretação que estava a fazer deste, era distinta da que tinha feito anteriormente, apercebendo-se deste modo da importância das orientações curriculares expressas no programa, tendo agora outra opinião:

Sara: Eu fiz uma leitura mais atenta deste programa. Estive mais alerta para as orientações curriculares e dei-me conta de aspetos que nunca tinha dado importância, ou mesmo ignorado. Reparei que falam muito em aplicações da matemática e em modelação matemática, mas o que tenho a dizer é que não há exemplos sobre o que distingue uma da outra.

Outra professora: Eu pensava que era tudo o mesmo...

Sara: Acho que não és só tu, se calhar outros colegas, acham que é a mesma coisa. Eu própria, sabendo que vamos trabalhar com modelação, ainda não sei bem o que é, tenho uma ideia, mas não sei explicar o que poderá ser a diferença entre aplicações da matemática e modelação matemática. (Sessão de trabalho colaborativo, 02/11/11)

Sara levantou a questão da diferença entre aplicações da Matemática e modelação matemática, intervindo sem ser solicitada e lançando o debate sobre esta temática.

Na quarta sessão (apêndice 6) o objetivo foi analisar e discutir artigos, previamente enviados por mim, via email, sobre modelação matemática, visando a reflexão conjunta sobre as várias definições presentes e a seleção conjunta de uma definição. Mais uma vez, Sara trouxe tudo muito organizado e várias anotações sobre as reflexões e análises que tinha feito, tendo dado um grande contributo para debate:

Sara: Eu posso começar... acho que percebo melhor o que Swetz diz sobre o que é modelação e para além disso, das definições que vi de outros autores, é um dos únicos que se refere à importância da sua integração no

currículo. E como é o que se pretende no programa dos profissionais, acho que tem mais a ver. Não acham? (...)

Outra professora: Eu pensava que para haver modelação matemática, só dava com recolha de dados reais...

Sara: Eu acho que o que é importante é que se parta da realidade, se somos nós a dar os dados já recolhidos ou que sejam os alunos a recolhê-los é indiferente. Eu acho que o que nos interessa são os contextos reais, é claro que é mais interessante que sejam os alunos a recolhê-los. Podíamos fazer isso e pensar em situações que nos levassem à recolha de dados... (Sessão de trabalho colaborativo, 29/11/11)

Na sexta sessão, a professora apresentou numa tabela (anexo 11) várias ideias não só para o curso que lecionava, como também para os outros cursos. As suas ideias foram um excelente ponto de partida para o debate de ideias e consequentemente seus ajustes por parte de todas as colegas participantes.

Numa das sessões (9), Sara trouxe trabalho prévio realizado e em linhas muito gerais apresentou um rascunho de uma possível tarefa de modelação (anexo 15), antecipando-se às colegas. Com essa estrutura já pensada e tendo-se iniciado uma discussão conjunta, cada uma começou a pensar na primeira tarefa com base na proposta de Sara.

A professora não revelou qualquer tipo de dificuldade relativamente à forma como integrou a equipa ou como participou no desenvolvimento do trabalho. A dificuldade referida por ela esteve relacionada com uma insegurança inicial inerente à criação de uma primeira tarefa de modelação:

Eu acho que no início tinha muito pouca confiança no como fazer uma tarefa de modelação. Agora já sei e deve-se acima de tudo a esta partilha e que acho que é muito importante. (Última entrevista, 25/07/12)

Na última entrevista é perceptível nas suas palavras a valorização que atribuiu ao facto de ter integrado uma equipa colaborativa. Enfatizou a importância da reflexão realizada em conjunto na forma como avaliou e melhorou as suas práticas, de forma mais confiante:

A reflexão que nós fizemos em conjunto, quer nas entrevistas, quer depois nas reuniões, quer nos emails, é importantíssima para nós no futuro irmos evoluindo, porque com tudo o que fizemos, podemos chegar a conclusões e perceber o que mudaríamos, o que podemos melhorar, o que fizemos bem e o que fizemos menos bem. Podemos pensar como melhorar as práticas e deu-nos mais confiança! (Última entrevista, 25/07/12)

Viu no trabalho em colaboração um contributo positivo relativamente às tarefas de modelação concebidas, que na sua opinião conseguiram ser articuladas e adequadas tendo em conta as diversas áreas profissionais dos cursos:

O facto de termos trabalhado conjuntamente ajudou-nos a criar um fio condutor que levou a que as coisas fossem mais coesas, fossem mais interligadas umas coisas com as outras e permitiu-nos trabalhar no 10.º ano de uma forma mais equilibrada (...) E também levou a que as tarefas fossem muito mais completas e adequadas ao curso profissional, por isso, como tal ajudamo-nos umas às outras e esta partilha de ideias enriqueceu todas. (Última entrevista, 25/07/12)

Também a forma como usualmente preparava as suas aulas e tarefas sofreu uma evolução do decurso deste trabalho. Deixou de o fazer individualmente e passou a fazê-lo colaborativamente, mas dando o seu toque pessoal. Explicou:

São raros os dias em que não planifico aulas. Tento recordar sempre exercícios do trabalho de casa ou não, atender que exercícios são importantes em cada parte da matéria, que exemplos é que hei-de dar para melhor ajudar os alunos a compreender cada um dos temas, fazer pequenos resumos ou sínteses das matérias e levar ideias preparadas para no futuro os ajudar. (Primeira entrevista, 15/10/11)

A professora esclareceu que a sua prática corrente é planificar as aulas fazendo uma seleção de exercícios importantes para cada tema, recorrendo a resumos e sínteses para levar para a aula e escolhendo vários exercícios para usar futuramente como revisões. Referiu ainda que seleciona exemplos que considera motivadores para os alunos. Para si, o principal objetivo da planificação de uma aula está relacionado com a sua orientação, saber onde tem de chegar e a meta a atingir com a aprendizagem dos alunos:

A razão de ser de uma planificação é orientar uma aula, levar uma aula com objetivos, com conteúdos e com metas a atingir para ajudar os alunos a aprender da melhor forma. (Primeira entrevista, 15/10/11)

A forma como passou a preparar as aulas e a planificá-las evoluiu. A partir de um fio condutor para a criação das tarefas, decidido conjuntamente, Sara com base no tópico matemático que pretendia abordar, desenvolveu a tarefa, integrando-o e fazendo-o emergir de situações reais que surgiram através dos dados recolhidos na gincana. Sara passou a pensar mais nos seus alunos, neste caso o curso, na forma como os envolver na aprendizagem e nas reflexões que fazia com as colegas:

Ora, em conjunto nós estabelecemos um fio condutor, um guião de como íamos fazer, de que forma, que tipo de tarefas e estivemos a ver os conteúdos que íamos trabalhar em cada tarefa (...), o que poderiam a vir a ser as tarefas. Isso permitiu-nos, depois, de forma isolada, adaptar à turma que tínhamos, ao curso que tínhamos e a nós próprias, porque nós enquanto professor gostamos de construir coisas com as quais nos sintamos bem. Essa parte foi então a parte individual, a criação da tarefa em si. (...) Eu preparei as aulas e as tarefas com base no objetivo, no tópico matemático que queria abordar. A partir do tópico desenvolvi a partir de lá onde queria que os alunos chegassem e contextualizadas a situações sempre da vida real, através dos jogos e dados e da gincana. (Última entrevista, 25/07/12)

Por fazer parte do grupo de trabalho deste projeto, Sara começou a pensar na planificação do tema Estatística dando muito mais importância ao que as orientações curriculares sugerem, nomeadamente ao que diz respeito à abordagem dos conteúdos estatísticos a partir de contextos reais, destacando a modelação matemática. A sua preocupação foi de abordar o tema partindo de situações contextualizadas à realidade dos alunos. Deixou de lado, os “exercícios mais simples” por ela referidos na primeira entrevista e começou a valorizar e a enriquecer de forma significativa as suas aulas e criação de tarefas:

É mais fácil dar um exemplo simples ou procurar num manual, do que adaptar e redefinir tendo em conta os alunos, os contextos e os conteúdos matemáticos. Passei a pensar mais nas tarefas e a enriquecê-las ao abordar o tema partindo de situações reais conhecidas pelos alunos e assim conseguir trabalhar com modelação matemática. (Última entrevista, 25/07/12)

Sara pretende no futuro voltar a trabalhar nestes moldes e justificou essa sua vontade com o facto de ter tido uma experiência positiva que se ficou a dever à boa interação e partilha entre as colegas do grupo:

Sem dúvida que vou tentar no futuro procurar grupos de trabalho e claro que depende das pessoas. Aqui, acho que tive muita sorte no grupo e funcionou bem, as pessoas davam-se bem, foi muito fácil começar a trabalhar, não havia qualquer tipo de constrangimento em expor as ideias, não havia certos e nem errados. Havia ideias, partilha de ideias e tudo isso ajudou a melhorar e para futuramente para trabalharmos com os alunos o fazermos de uma forma mais rica, porque temos mais experiências e mais ideias. (Última entrevista, 25/07/12)

A ideia que deu origem às tarefas emergiu de um objetivo e preocupação comum a todas as professoras: proporem um tema comum aos três cursos profissionais e que fosse do interesse dos alunos. Esta ideia levou a um debate durante algumas sessões de trabalho colaborativo uma vez que pretendiam encontrar uma situação real que envolvesse gestão desportiva, infância e alimentação: os temas relacionados com a área profissional dos três cursos. Foi acordado que as professoras falassem com as turmas, com os colegas das disciplinas técnicas e trouxessem ideias para a reunião seguinte de trabalho colaborativo.

Para ajudar no surgimento de ideias, numa das sessões (sessão 6, apêndice 8) foi feita para cada curso profissional uma análise dos respetivos perfis profissionais. Os documentos analisados foram fornecidos pelos diretores de curso de cada uma das turmas. De acordo com o combinado no grupo de trabalho entre as colegas, Sara começou por analisar as saídas profissionais do curso que lecionava (curso profissional Técnico de Gestão Desportiva). No entanto, alargou a sua pesquisa ao âmbito dos outros cursos, e na reunião seguinte apresentou propostas de contextos e situações reais que serviam não só os interesses da sua turma, mas também as dos outros cursos (anexo 11). Desta forma, Sara aprofundou conhecimento sobre a área profissional dos seus alunos, aprendendo sobre os contextos e adquirindo conhecimento não matemático sobre o assunto.

Tendo em conta os documentos sobre os perfis profissionais, propôs um contexto relacionado com a promoção para a saúde, transversal a todos os cursos. Como um dos cursos profissionais envolvido, era Técnico de apoio à infância, não foi difícil pensarem na amostra que iriam escolher: crianças do nível de educação pré-escolar, no agrupamento de escolas onde todas lecionavam. O facto de Sara ter realizado uma pesquisa prévia enriqueceu todo o debate e o surgimento de contextos foi muito natural:

Sara: Eles aqui também falam da promoção para a saúde e embora apareça no curso de apoio à infância, parece-me que é algo transversal...

Filipa: Aos três cursos.

Sara: E poderíamos fazer uma atividade ou um conjunto de atividades de recolha de dados comum. Eu aqui, em especial, para o curso de apoio à infância coloquei [refere-se à grelha que trouxe preenchida de casa] eu sugeria elaborar um estudo sobre o valor nutricional de cada prato e atendendo às diferentes dietas dos miúdos. E podíamos trabalhar isso no curso de cozinha, adaptar ao curso de apoio à infância e sei lá... fazer um estudo que...

Patrícia: E também atender à atividade física deles...

Sara: Também relacionar com a atividade física... eu acho que os meus alunos de gestão desportiva vão dar aulas aos miúdos do pré-escolar. Se calhar era interessante pensar nesses miúdos e arranjar uma atividade com

estas crianças e que desse para os três cursos. Já que estes alunos são de gestão desportiva, eles podiam organizar um evento que envolvesse estas crianças e dê-se origem a dados e variáveis para as três áreas profissionais. (Sessão de trabalho colaborativo, 15/12/11)

Mais ideias surgiram por parte das outras professoras que foram despoletadas pela pesquisa e ideias de Sara. Começou também a surgir nesta reunião, quais os conteúdos estatísticos a abordar e quais os contributos de cada curso. Neste sentido, o que Sara fez foi, a partir do conhecimento da realidade, começar a pensar que conteúdos estatísticos é que iriam surgir a partir das possíveis variáveis estatísticas emergentes e de que forma poderia ser feito. Ao pensar nesta ideia, sugeriu uma forma de realizarem no mesmo dia ou dias um conjunto de atividades que envolvesse os cursos e como poderia ser concretizada esta ideia. O seu entusiasmo contagiou e animou as outras duas professoras. O debate ganhou forma e as ideias foram surgindo em avalanche:

Sara: Durante o evento desportivo, sei lá, eu estou a imaginar, os da parte de desporto, organizarem o evento desportivo e estarem organizados a explicar às crianças, enquanto que, as alunas de apoio à infância e na passagem de uns eventos para outros, elas seriam as responsáveis por controlar os miúdos e os de cozinha.

Filipa: ... podiam organizar um lanche e pensarmos no tipo de informação útil que poderá surgir...

Patrícia: E a Matemática entra aí muito bem! (...)

Sara: Eu até sugeria que essa atividade comum se chamasse algo do género: “Saúde, alimentação e desporto na infância” (Sessão de trabalho colaborativo, 15/12/11)

A partir desta discussão, surgiu a ideia (por parte de outra professora) de conhecer, em primeiro lugar, melhor a amostra (elaboração de um questionário que satisfizesse os três cursos e a partir de aí serem os próprios alunos, de cada curso a sugerirem atividades.

Sara teve um papel crucial no desenrolar desta reunião. Ao lançar estas ideias, ela promoveu a partilha de ideias, levando ao reconhecimento da importância de envolver os alunos na recolha de dados. As professoras perceberam que as tarefas iriam surgir mais facilmente após esta recolha, pois só aí iriam perceber que variáveis poderiam surgir e que relações emergiriam. Nesta sessão de trabalho foi lançado o desafio de pensarem na estrutura de uma primeira tarefa de modelação, tendo em conta a previsão do que poderia surgir a partir da recolha de dados e dos contextos reais acordados. Sara, embora mais otimista do que na primeira entrevista, mencionou que a criação da primeira seria o mais complicado.

Nas duas sessões de trabalho seguinte, tal como tinha sido acordado, Sara teve presente as motivações dos seus alunos e apresentou ao grupo as ideias que tinham surgido para a concretização do evento desportivo.

Caracterização geral da experiência de ensino realizada por Sara

A experiência de ensino realizada por Sara iniciou-se com as reuniões de equipa colaborativa. Em reuniões de trabalho colaborativo, Sara analisou os perfis profissionais dos cursos profissionais envolvidos neste estudo de modo a melhor compreender as saídas profissionais destes cursos e assim perceber como identificar prováveis contextos profissionais que pudessem ser modelados em sala de aula. Pois só a partir daí é que poderia pensar como abordar os conteúdos estatísticos pretendidos e criar as tarefas.

Surgiu, por sugestão de Sara, uma proposta que permitiria a recolha de dados reais e a envolvência de todos os alunos na recolha de dados. Essa ideia esteve relacionada com o facto de um dos cursos ser Apoio à Infância e deste modo, Sara propôs que a amostra fossem crianças do pré-escolar. Cada professora e alunos de acordo com a especificidade do seu curso pensou em situações reais que envolveu a recolha de dados a partir de uma amostra de crianças. Partindo do que conhecia da área profissional dos seus alunos e explicando a estes a sua ideia, rapidamente pensaram em inúmeras situações que estivessem relacionadas com as saídas profissionais do seu curso. Surgiu a ideia de organizarem uma gincana, que envolvesse um conjunto de jogos adequados à faixa etária e motivações das crianças. A fim de conhecerem essas crianças do pré-escolar, elaboraram questões para um questionário (anexo 12) cujo objetivo era aferir hábitos e gostos desportivos e conhecer características físicas dessas crianças.

Todos os dados recolhidos a partir destes instrumentos de recolha, permitiram o emergir de variáveis estatísticas interessantes para o ensino de todo o módulo de Estatística. A partir destes dados, de sugestões e reajustes provenientes das discussões e reflexões em sessões de trabalho colaborativo, a professora criou dois tipos de tarefas: tarefas sobre conteúdos estatísticos a lecionar antes das distribuições bidimensionais e tarefas de modelação relativas à abordagem das distribuições bidimensionais. Quando as primeiras tarefas foram criadas, foram construídas pressupondo que qualquer tópico matemático poderia dar origem ao surgimento de todas as fases de modelação. Com a discussão das aulas e das várias tarefas, em sessões de trabalho colaborativo, as

professoras constataram que nem sempre era fácil passar pelas várias fases de modelação, nomeadamente a construção do modelo matemático e a fase de testagem do mesmo. Neste sentido, ficou acordado que o melhor tópico estatístico para trabalhar com modelação seria o inerente às distribuições bidimensionais, permitindo deste modo completar o ciclo de modelação de forma coerente, sendo possível construir e trabalhar com um ou mais modelos matemáticos, discutindo resultados matemáticos e comparando-os com a realidade.

As tarefas criadas que antecederam as que abordaram as distribuições bidimensionais tiveram por objetivo estudar os diversos conteúdos estatísticos previstos no programa (população e amostra; tipos de variáveis estatísticas, organização de dados em tabelas de frequências, apresentação de dados em gráficos, medidas de localização e dispersão), tendo o grupo colaborativo designado esta fase como de “pré-modelação”, exatamente porque nem todas as fases de modelação foram identificadas por elas nas tarefas. Contudo, e aproveitando todo o trabalho desenvolvido pelas professoras e pelos alunos, Sara, conjuntamente com as colegas, compreendeu que toda a atividade matemática dos alunos durante a realização das tarefas serviu para compreender os dados reais diretamente recolhidos pelos alunos; contactar diretamente com a realidade e conhecê-la melhor, permitindo caracterizar o contexto e também para aproveitar algumas conclusões surgidas nessas tarefas de “pré modelação”. Essas hipóteses, conjecturas, associações surgidas a partir de elementos da realidade, permitiram a Sara pensar em situações reais que levaram a estudar relações entre variáveis surgidas da realidade conhecida por todos (professora e alunos), conduzindo a uma abordagem do ensino das distribuições bidimensionais a partir da modelação matemática. Sara pretendeu também nesta fase organizar e criar hábitos de trabalho nos alunos, incluindo a exploração da folha de cálculo EXCEL, promovendo assim a oportunidade de estes adquirirem competências importantes para o trabalho posterior com as tarefas de modelação.

Nesta fase de “pré-modelação”, Sara criou oito tarefas com foco nos conteúdos estatísticos, de acordo com o que se pode observar no quadro 9.

Quadro 9: Identificação e conteúdos estatísticos abordados nas oito tarefas de “pré-modelação” criadas por Sara

Tarefas de “pré-modelação”	
Identificação da tarefa e data	Conteúdos estatísticos abordados
Tarefa 1 (10/05/12): Início do estudo das características de um grupo de alunos do pré-escolar (Anexo 15)	População e amostra; Classificação de variáveis estatísticas;(variável qualitativa e quantitativa discreta); Tabelas de frequências.
Tarefa 2 (15/05/12): O peso e a altura dos alunos do pré-escolar (Anexo 16)	Classificação de variáveis estatísticas (variável quantitativa contínua); Organização de dados em classes; Tabelas de frequências.
Tarefa 3 (22/05/12): A pontaria no jogo e em cheio nas latas (Anexo 17)	Classificação de variáveis estatísticas (variável qualitativa); Tabelas de frequências; Gráficos de barras e pictogramas.
Tarefa 4 (24/05/12): O início da Gincana (Anexo 18)	Classificação de variáveis estatísticas (variável discreta); Tabelas de frequências; Gráficos de barras e gráficos circulares.
Tarefa 5 (30/05/12): A Gincana contínua... (Anexo 19);	Classificação de variáveis estatísticas (variável contínua); Tabelas de frequências; histogramas.
Tarefa 6 (04/06/12): Para conhecer melhor o grupo (Anexo 20)	Medidas de tendência central: média, moda e mediana.
Tarefa 7 (06/06/12): E se houvesse alterações na turma? (Anexo 21)	Medidas de tendência central: média.
Tarefa 8 (11/06/12): A dispersão dos resultados no jogo do Canguru Maluco e em cheio nas Latas (Anexo 22)	Desvio padrão; Quartis; Diagrama de quartis.

Este conjunto de tarefas foi pensado seguindo um fio condutor no que diz respeito aos conteúdos estatísticos que são abordados no módulo A3 – Estatística para o ensino profissional. A estrutura de cada uma delas foi acordada pela equipa colaborativa, partindo do pressuposto que conseguiriam passar por todas as fases do ciclo de modelação de Ferri (2006), o que nem sempre viria a acontecer.

Sara previu para estas tarefas oito aulas de 90 minutos. Organizou os alunos em grupos de quatro segundo as preferências por eles manifestadas.

O que estas tarefas tiveram de original relativamente a uma outra tarefa apresentada num manual foi que todos os dados usados surgiram de situações reais e foram recolhidos pelos próprios alunos. Esta envolvência dos alunos com a realidade

suscitou curiosidade genuína que conduziu à formulação de conjecturas sobre essa mesma realidade.

Das oito tarefas aplicadas em sala de aula, observei as quatro iniciais a fim de compreender a dinâmica das aulas e que tipo de conhecimento para ensinar Estatística a professora evidenciava durante esta fase de “pré-modelação”. Como já foi referido, estas tarefas foram criadas a partir do pressuposto que a partir de qualquer tópico estatístico seria fácil surgirem todas as fases do ciclo de modelação. No início, Sara pensava que a estrutura das suas tarefas e conteúdos abordados, a partir da realidade, permitiriam cumprir esse objetivo. Foi do meu interesse entender de que forma eram abordados estes conteúdos e se a partir destes apareceriam realmente todas as fases de modelação. A partir da quarta tarefa, Sara, em discussão de sessão de trabalho colaborativo, apercebeu-se que os conteúdos sobre as distribuições bidimensionais seriam mais adequados e como tal eu decidi já não observar as restantes tarefas desta fase de “pré-modelação”. Voltei posteriormente à observação das quatro tarefas de modelação criadas sobre as distribuições bidimensionais. Na secção seguinte apresento uma breve abordagem sobre a primeira e quarta tarefa da fase de “pré-modelação”, onde descrevo de forma sucinta algumas evidências do conhecimento para ensinar Estatística evidenciado por Sara.

No que diz respeito à fase do trabalho com a modelação relativa às distribuições bidimensionais, Sara criou, como referi, quatro tarefas nas quais conseguiu efetivamente passar por todas as fases do ciclo de modelação. Das tarefas que integraram a fase de “pré-modelação”, surgiram muitas associações novas, cujas relações os alunos e a própria Sara acharam interessantes estudar. As situações reais que levaram a estas tarefas de modelação foram as mesmas das anteriores (gincana), mas as associações que foram estabelecidas durante a fase de “pré-modelação”, proporcionaram um interesse em estudar, do ponto de vista estatístico, o tipo de associação existente.

O quadro 10 retrata as situações reais surgidas e os conteúdos estatísticos abordados em cada uma das tarefas de modelação.

Quadro 10: Identificação e conteúdos estatísticos abordados nas quatro tarefas de modelação criadas por Sara

Identificação da tarefa de modelação e data	Situação real	Conteúdos estatísticos abordados sobre as distribuições bidimensionais
Tarefa 1 (12/06/12) Pé grande = peso pesado? (anexo 23)	Identificação de situações reais a partir do conhecimento das características físicas das crianças a partir dos dados dos questionários entregues aos encarregados de educação.	Interpretar o valor do coeficiente de correlação; Construção do diagrama de pontos; Construção da equação da reta de regressão linear; Estimar resultados a partir da reta de regressão linear e interpretá-los no contexto real. Concluir acerca da adequabilidade do modelo tendo em conta o contexto real.
Tarefa 2 (14/06/12) Os magricelas rápidos e saltitantes ou... talvez não! (anexo 24)	Identificação de situações reais a partir do conhecimento das características físicas das crianças a partir dos dados dos questionários entregues aos encarregados de educação. Gincana	Interpretar o sinal e intensidade do valor de coeficiente de correlação e relacioná-lo com o grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis; Construção do diagrama de pontos; Construção da equação da reta de regressão linear; Estimar resultados a partir da reta de regressão linear e interpretá-los no contexto real. Concluir acerca da adequabilidade do modelo tendo em conta o contexto real.
Tarefa 3 (15/06/12) Encontrei o melhor modelo matemático! (anexo 25)	Gincana	Construção do diagrama de pontos; Construção de modelos de regressão que não sejam necessariamente o linear; Estimar resultados a partir dos modelos de regressão obtidos e interpretá-los no contexto real. Concluir acerca da adequabilidade do modelo tendo em conta o contexto real.
Tarefa 4 (19/06/12) Será que estas variáveis estão relacionadas? (anexo 26)	Identificação de situações reais a partir do conhecimento das características das crianças a partir dos dados dos questionários entregues aos	Estabelecer conjecturas a partir da identificação de situações reais. Organizar dados; Construção do diagrama de dispersão; Construção de modelos de regressão que não sejam necessariamente o linear;

	encarregados de educação.	Estimar resultados a partir dos modelos de regressão obtidos e interpretá-los no contexto real.
	Gincana	
	Outras situações reais escolhidas pelos alunos	Concluir acerca da adequabilidade do modelo tendo em conta o contexto real e validade das conjecturas.

Estas quatro tarefas foram pensadas por Sara segundo uma sequência de tópicos estatísticos a ensinar. A professora quis começar por uma tarefa cujo modelo de regressão a estudar fosse linear. Teve o objetivo de fazer uma primeira abordagem sobre este tipo de associação entre as variáveis, partir da representação gráfica dos dados. Ainda nesta primeira aula, teve o propósito de passar por todas as fases do ciclo de modelação, permitindo a construção do modelo, sua testagem e interpretação dos resultados obtidos. Na segunda tarefa aprofundou o grau e intensidade possíveis da associação linear entre os vários pares de variáveis. Na terceira tarefa, pretendeu que os alunos não ficassem com a ideia que a única associação possível fosse a linear. Embora no programa este conteúdo não seja desenvolvido, há referência a outros tipos de associações não lineares e Sara quis abordar este aspeto com esta nova tarefa. A última tarefa foi construída de forma mais aberta e apelando à criatividade e conhecimento sobre a área profissional dos alunos, assim como, ao surgimento de possíveis novas relações que pudessem ainda surgir a partir de todos os dados reais recolhidos. Teve o propósito de avaliar as aprendizagens dos alunos sobre as distribuições bidimensionais e compreender de que forma tinham aprendido e valorizado o facto de terem trabalhado com a realidade. Em secções seguintes (uma para cada tarefa de modelação) descrevo a abordagem em aula de três das quatro tarefas de modelação, onde surgiram evidências do conhecimento para ensinar Estatística evidenciado por Sara. Quanto à última tarefa, embora tenha sido analisada, à semelhança das outras, dessa análise não surgiu nenhuma evidência distinta das que já tinham sido identificadas nas outras tarefas relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística. Desta forma, optei por não a descrever.

A fase de “pré-modelação” de Sara

Das oito tarefas da fase de “pré-modelação” eu observei as quatro iniciais, porque apercebi-me que as evidências sobre o conhecimento para ensinar Estatística, relativamente aos vários tipos de conhecimento iriam ser revelados com maior destaque durante a lecionação das distribuições bidimensionais e as fases do ciclo de modelação só iriam surgir todas durante o ensino desses conteúdos. Aqui nesta secção, faço uma breve descrição da primeira e última tarefa que observei. A primeira foi observada com o objetivo de familiarizar-me com a turma e compreender a dinâmica de sala de aula. A última, foi com o propósito de entender se a professora tinha clarificado o conceito de modelação matemática e de modelo matemático. Para além disso, a observação destas aulas teve outro objetivo: eu tive a intenção de compreender que conhecimento não matemático a professora evidenciava na procura de contextos reais para a criação destas tarefas, e se a partir das relações que os alunos foram estabelecendo ao longo da realização destas tarefas, se esta iria aproveitar essas conclusões ou conjeturas para criar as tarefas de modelação destinadas ao ensino das distribuições bidimensionais. Desta forma, poderia compreender que tipo de questões formularia, que dificuldades dos alunos tinha tido em conta a partir das tarefas de “pré-modelação” e como iria criar as tarefas e planificar as aulas de modelação.

Tarefa 1: “Início do estudo das características de um grupo de alunos do pré-escolar”

Esta tarefa foi a primeira criada pela professora (anexo 15). O seu objetivo foi, a partir dos dados reais recolhidos oriundos dos questionários, que os seus alunos conhecessem melhor as crianças com quem iriam trabalhar. Aspetos como práticas desportivas estiveram no foco de atenção desta tarefa. Para além disso, aproveitou para abordar conceitos iniciais de estatística como: amostra, classificação de variáveis estatística, organização de dados em tabelas, leitura das tabelas de frequências e interpretação das mesmas.

Esta primeira tarefa evidenciou em Sara a preocupação em sequenciar, tal como o programa de Matemática sugere, os vários conteúdos estatísticos de modo a que estes surgissem de forma natural e a partir dos próprios alunos. Teve o propósito de levar os alunos a entenderem a necessidade da recolha de dados que tinham realizado e como os poderiam recolher. Ao pensar nesta tarefa, Sara tentou não só apresentar uma situação

conhecida pelos alunos, como levá-los a refletirem sobre a necessidade destes dados para o estudo que iriam iniciar:

O objetivo é compreenderem que terão de usar os dados que recolheram e assim entenderem para que vão servir. Os dados estão relacionados com o curso deles e a participação na gincana e inquéritos feitos aos pais. Eles sabem de onde vêm os dados. (Entrevista pré aula, 10/05/12)

Numa aula, Sara explicou que pretendia que os seus alunos, tendo em conta a sua área profissional, pensassem em atividades adequadas a crianças do pré-escolar. Como os seus alunos já trabalhavam com as crianças e eram eles quem lhes dava aulas de Educação Física, propuseram no âmbito dessa disciplina e área profissional do curso, organizarem uma gincana.

Sara, em reunião de trabalho colaborativo, mencionou que levou os alunos a sentirem necessidade de conhecer a sua amostra, questionando-os sobre a adequabilidade dos jogos e características físicas e hábitos das crianças. Assim, estes sugeriram elaborar um questionário que lhes permitisse recolher informações sobre as crianças e assim pensassem melhor nas características e nos jogos que iriam incluir na gincana. A professora, conjuntamente com os alunos, operacionalizou a forma como recolheriam os dados, pensando em várias questões sobre as características físicas e hábitos desportivos das crianças:

Q1 - Qual a idade do seu educando?

Q2 - Qual o desporto que o seu educando gostaria de experimentar no futuro?

Q3 - O seu educando pratica desporto? Sim ☐ Não ☐

Q4 - Qual a modalidade que pratica? _____

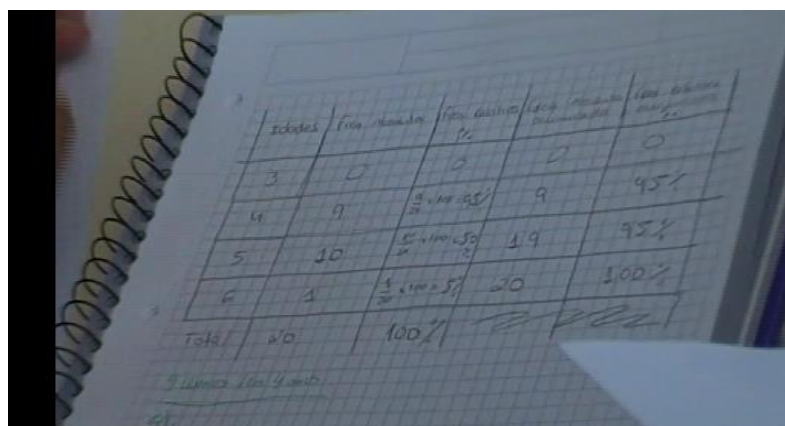
Q5 - Qual a regularidade? 1 vez por semana ☐ 2 vezes por semana ☐
3 vezes por semana ☐
4 ou mais vezes por semana ☐

Após a organização, por uma das professoras, dos dados do questionário resultante dos três cursos, numa tabela, a turma de Sara procedeu à seleção dos dados reais necessários para a realização desta primeira tarefa. Foi necessário realizar uma limpeza dos dados, porque houve uma ou outra altura em que os alunos optaram por não

usar determinados questionários na organização de algumas questões. Isso deveu-se ao facto dos encarregados de educação responderem a mais do que uma opção ou não responderam. A foto colocada por Sara na tarefa e as questões do questionário permitiram levar à construção da representação real. Com a questão dois, Sara apelou não só à organização dos dados como também teve a intenção de levar os alunos a refletirem que leitura poderiam fazer a partir daí e se essa organização estava ou não correta.

Durante a aula os alunos disponham das tabelas de registo que transcreveram dos questionários e que se encontram em anexo (anexo 13). Ao circular pelos vários grupos, Sara colocou questões que conduziram à “limpeza de dados”:

Sara: Nós temos que agrupar os dados, o que é que isso significa? Ou seja, como é que vocês vão organizar os dados e limpar os dados? Vocês têm as questões, não é? Então tem que os organizar de modo a que... agora... e depois dos dados organizados responderem a estas questões. Pensem... como é que se organizam dados?
Aluno: Tabelas!



Idades	Freq. Absoluta	Freq. Relativa	Freq. Relativa Decimada	Freq. Relativa Porcentagem
3	0	0	0	0
4	9	$\frac{9}{19} \approx 47\%$	9	47%
5	10	$\frac{10}{19} \approx 53\%$	19	100%
6	1	$\frac{1}{19} \approx 5\%$	20	100%
Total	19	100%	20	100%

Figura 11: Exemplo de um grupo de alunos sobre a organização das idades das crianças em tabelas de frequências (10/05/12)

Nesta tarefa foi solicitado aos alunos que tirassem conclusões sobre a amostra e características destas crianças, sendo-lhes pedido que fizessem conjecturas possíveis sobre as variáveis. Durante a aula, a professora explicou que as conjecturas eram relativas àquelas crianças em particular e os alunos compreenderam o que era solicitado. A questão três, presente na tarefa, exemplifica o que foi dito.

Os alunos ao organizarem os dados em tabelas, criaram o modelo real que lhes permitiu passar da situação por eles conhecida para algo que conseguissem transpor para a sala de aula. Isto é, a passagem dos questionários (a partir da tabela de registo) para os

dados organizados em tabelas de frequências. Por último, a fase de construção do modelo matemático não foi bem entendido nesta tarefa, uma vez que os alunos não chegaram a um modelo matemático que permitisse levar a resultados matemáticos passíveis de comparação. Nesta tarefa foi realizada apenas a organização de dados em tabelas, respostas a algumas questões que leram a partir destas, não tendo chegado a resultados matemáticos ou interpretações.

As outras fases do ciclo de modelação não estiveram presentes nesta tarefa, uma vez que não houve necessidade de os alunos se interrogarem a partir dos resultados matemáticos, porque eram inexistentes.

Embora tenha existido curiosidade quanto ao assunto a ser estudado (características físicas e hábitos desportivos das crianças), não esteve presente nesta tarefa a necessidade de encontrar soluções para um problema inicial, porque este não existia. O que a professora pretendia era apenas a compreensão e um estudo mais aprofundado sobre a amostra de modo a conseguirem organizar uma gincana adequada às crianças.

Tarefa 4: “O início da gincana”

Esta tarefa surgiu na sequência da gincana organizada pelos alunos da turma de Sara, integrada um conjunto de jogos adequados a crianças do pré-escolar. O propósito da tarefa foi estudarem a adequação destes jogos às características e destreza físicas das crianças e compreenderem as suas competências motoras. A recolha de dados foi feita pelos alunos de Sara e os jogos tiveram por base uma tabela de observação, onde para cada criança eram registadas, as suas pontuações ou tempos dos jogos (anexo 27). Podemos dizer que Sara atribuiu uma relevante importância à envolvência dos alunos na recolha de dados. Aproveitou a situação real para construir esta tarefa, conduzindo os alunos a construírem a representação real. Os alunos problematizaram a situação, planificaram, fizeram a recolha de dados e Sara, analisando os dados recolhidos, criou uma tarefa que os levou a organizar os dados, a interpretá-los, a formularem conjecturas e a tirarem algumas conclusões.

Ao preparar a tarefa, Sara no enunciado da tarefa, solicitou aos alunos que organizassem os dados em tabelas e gráficos que lhes parecessem adequados e de modo a que conseguissem tirar algumas conclusões sobre a destreza e competências motoras destas crianças (problema real em estudo), o que os conduziu à construção do modelo real:

<i>“Lança, Atira e Acerta”</i>		
Pontuação Total	N.º de alunos	Frequência relativa
0	6	27%
1	6	27%
2	3	14%
3	5	23%
4	1	5%
5	1	5%
	22	100%

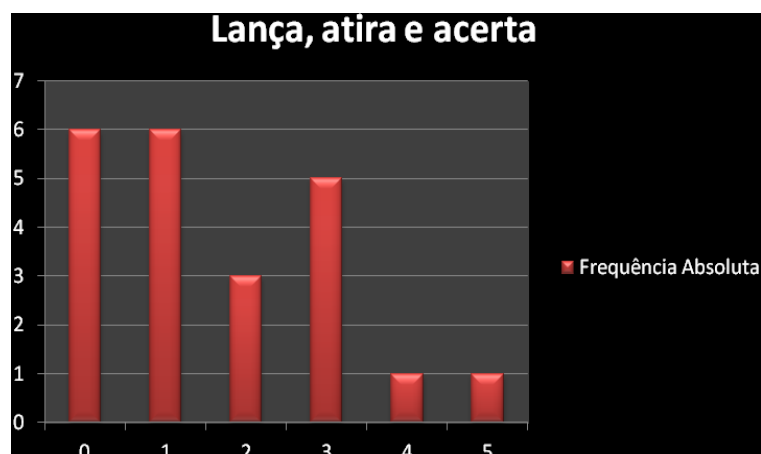


Figura 12: Exemplo de uma tabela e gráfico de um dos grupos de alunos de Sara (24/05/12)

Na questão quatro do enunciado da tarefa, Sara solicitou conclusões sobre esta amostra de crianças de modo a que os alunos refletissem sobre o modelo real e se este parecia estar bem construído e de acordo com a situação real conhecida.

Na questão cinco do enunciado da tarefa, Sara solicitou previsões (possibilidades) para uma outra amostra, tendo em conta as conclusões que os alunos tiraram para esta amostra de crianças e naquele contexto escolar.

A professora, no enunciado da tarefa pediu que fosse dado algum sentido aos dados através da construção de tabelas e gráficos (já apresentados, como exemplo, anteriormente), revelando que ao criar a tarefa, teve o objetivo de levar os alunos à simplificação da tarefa conduzindo-os à construção do modelo real.

Na realização desta tarefa pelos alunos, estes embora não chegassem a resultados matemáticos, conseguiram de forma informal, relacionar o conhecimento extra matemático que detinham com a leitura que fizeram a partir das tabelas e gráficos, conseguindo avançar com algumas conclusões:

"Chuta Chuta: Os penáltis à Ronaldo"		
Pontuação Total	Nº de alunos	Frequência Relativa
0	3	14%
1	7	32%
2	5	23%
3	5	23%
4	1	5%
5	1	5%
	22	100%

"Chuta Chuta: Os penáltis à Ronaldo"

*Qual a percentagem de alunos que marcaram menos de 2 penáltis?

R:46%.

*Quantos alunos marcaram 5 penáltis?

R:1 aluno.

*Qual maior percentagem: os que marcaram entre 0 e 2 ou 3 e 5?

R: De 0 a 2- 69% e de 3 a 5-31% ou seja a maior percentagem é de 0 a 2.

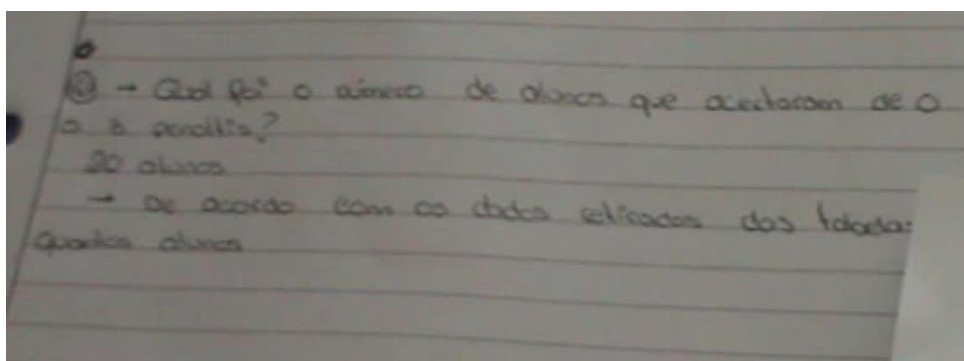


Figura 13: Exemplos de conclusões que os alunos obtiveram a partir da leitura da organização dos dados em tabelas (24/05/12)

Este facto deveu-se à atitude de Sara e à forma como ela construiu as questões desta tarefa. A questão quatro do enunciado da tarefa apelou à integração da Estatística e do contexto.

No enunciado da tarefa e condução da discussão da aula, Sara colocou questões que permitiram aos alunos refletir sobre a forma como estavam a organizar os dados numa tabela e se esta fazia ou não sentido. No enunciado da tarefa, surgiu a seguinte questão:

“4- A forma como agrupou os dados será a mais adequada? Reflita sobre a forma como agrupou os dados e possíveis conclusões que poderá tirar a partir das tabelas. Para isso, elabore três questões e dê a respetiva resposta, que deve ser retirada diretamente da tabela. Exemplos: quantos alunos encestaram.... bolas? Qual a percentagem de alunos que marcaram apenas um penalti?” (Exemplo de uma questão da quarta tarefa de “pré-modelação”)

Durante a condução da discussão da aula, Sara estabeleceu um diálogo com os seus alunos, com o objetivo de os levar a refletir sobre a organização dos dados que estavam a fazer:

Aluna: Eu estou a organizar os dados e a frequência relativa dá a dar muito mais que 100% ... Não pode ser, pois não?

Sara: Então devem ter alguma coisa errada na contagem que fizeram aí no número de penaltis!

Aluna: Já sei! Já vi! O número de crianças que acertaram 1 penalti está mal, porque esta criança não fez as tentativas todas e se calhar não a devíamos contabilizar! E depois dividimos pelas crianças que tinham feito o jogo completo! É isso? E há mais situações!

Sara: Então para esse jogo vão ter em conta as crianças todas, ou apenas aquelas que fizeram as tentativas todas? Vocês na frequência absoluta estão a usar o total dos penaltis?

Aluna: Sim! Então vamos só ver quem fez o jogo completo e dividimos pelo número de crianças que fez este jogo completo e não pelas crianças todas que estavam na gincana!

Sara: Refaçam e depois vejam se já faz sentido! (Aula de Sara, 24/05/12)

Na última questão, Sara apelou à formulação de conclusões, a interpretações e a um maior aprofundamento sobre o assunto ao solicitar aos alunos que fizessem previsões para outra situação.

Síntese

Estas tarefas da fase de “pré-modelação” foram importantes para as tarefas de modelação sobre as distribuições bidimensionais. Foram estas tarefas que levaram à recolha de dados necessários para o estudo das características físicas e competências motoras destas crianças, permitindo levantar questões pelos alunos que conduziram ao estabelecimento de várias conjecturas. Estes aspetos foram um ponto de partida crucial que permitiram a Sara pensar em contextos reais a estudar e criar tarefas de modelação para as distribuições bidimensionais. Estas tarefas também proporcionaram a oportunidade à professora e aos alunos de refletirem sobre a melhor forma de operacionalizarem a recolha de dados e de os organizarem. Todos estes fatores foram o fio condutor que conduziram às próximas tarefas de modelação.

Durante a fase de “pré-modelação”, Sara demonstrou valorizar os contextos reais, quer na forma como procurou situações reais que fizessem emergir os conteúdos estatísticos para lecionar, quer na forma como operacionalizou a forma de recolher dados reais. Neste sentido, os contextos reais proporcionaram uma oportunidade para criar tarefas adaptadas ao curso profissional em questão e uma forma de abordar vários tópicos estatísticos. No entanto, a professora durante esta fase, ainda não tinha compreendido que estes conteúdos não seriam os mais adequados para trabalhar com modelação, pois as tarefas foram criadas pressupondo que conseguiria passar facilmente por todo o ciclo de modelação, o que não se verificou.

Nesta altura da experiência de ensino, Sara evidenciou que o seu conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação ainda estava em construção.

Segue-se uma síntese do conhecimento para ensinar Estatística que Sara revelou na preparação, condução e reflexão das tarefas da fase de “pré-modelação”, distinguindo-se os diferentes tipos de conhecimento.

O conhecimento comum matemático evidenciado esteve relacionado com o que a professora demonstrou saber relativamente à Estatística e nestas tarefas este revelou-se robusto. Sara demonstrou conhecer bem os tópicos estatísticos que abordou. Para além disso, revelou saber que por vezes e após a recolha dos dados, é necessário proceder à limpeza dos mesmos e que as conclusões que se podem tirar a partir de dada amostra correspondem a possibilidades e não a generalizações, pois os modelos matemáticos têm limitações dentro do contexto real em que está a ser trabalhado. As conclusões obtidas a partir da análise dos resultados matemáticos que derivam do trabalho matemático com

um modelo, podem ser válidas para uma amostra num certo contexto real e já não serem para outra amostra.

Quanto ao conhecimento comum não matemático a professora soube operacionalizar a recolha de dados e construir instrumentos para a recolha desses dados (questionários). Sara pesquisou e aprofundou o seu conhecimento sobre a área profissional dos seus alunos, falando com estes e professores das disciplinas técnicas. Fez o registo direto das atividades desenvolvidas durante a gincana, através de fotos.

Relativamente ao conhecimento especializado matemático, soube sequenciar os conteúdos estatísticos de modo a ensiná-los aos alunos de forma clara. Colocou questões, quer no enunciado da tarefa, quer durante a condução das aulas, sobre a correta ou incorreta organização dos dados em tabelas. Nestas tarefas, Sara evidenciou que ainda não entende o que distingue um modelo real de um modelo matemático, conhecimento este que se clarificou ao longo do trabalho em equipa.

No que concerne ao conhecimento especializado não matemático, Sara operacionalizou a recolha de dados reais, envolvendo os seus alunos nesse processo, quer através da construção de tabelas de registo sobre pontuações e tempos dos jogos da gincana, quer na própria recolha. Para além disso, ensinou os alunos a usar o EXCEL na construção de tabelas para organizar os dados referentes às variáveis em estudo.

Destacam-se, a seguir, as dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística sentidas, superadas e por superar de Sara. Na primeira tarefa desta fase de “pré-modelação”, durante a entrevista de reflexão pós-aula, Sara mencionou que sentiu dificuldades em focar a atenção dos alunos no que pretendia que fizessem na tarefa. Explicou que isto deveu-se à característica pouco usual desta tarefa, onde os alunos assumiam um papel mais ativo:

Não foi fácil, pô-los a trabalhar! Quando se deram conta que eu não ia explicar e fazer com eles a tarefa, houve alguma dispersão! É a primeira vez que são eles a tentar fazer tudo sozinhos! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 24/05/12)

Para além disso, houve uma dificuldade, por ela referida na entrevista pós-aula, relacionada com a gestão do tempo. Sara explicou que a tarefa estava extensa e nem todos os alunos conseguiram chegar ao fim. Na quarta tarefa desta fase de “pré-modelação” esta dificuldade foi ultrapassada e a professora começou a ter maior atenção à gestão do tempo, diminuindo o número de questões.

Durante as entrevistas de reflexão imediata pós aula, Sara referiu que todas as fases do ciclo de modelação estiveram presentes. Segundo ela, a passagem dos dados reais, que constavam numa tabela, onde para cada criança constavam os dados dos questionários e jogos, para uma tabela onde os organizava segundo as variáveis em estudo, correspondia ao modelo matemático. A obtenção de resultados matemáticos (outra das fases de modelação), segundo Sara, eram as frequências simples e relativas calculadas pelos alunos. No entanto não houve referência à fase que corresponde à interpretação de resultados matemáticos e validação do modelo.

A primeira tarefa de modelação: “Pé grande = peso pesado?”

Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação

Num primeiro contacto com os dados recolhidos a partir dos questionários, os alunos de Sara foram estabelecendo conjecturas e relações entre as variáveis, que foram despoletando na professora ideias para a criação desta primeira tarefa de modelação. Sara explicou que analisou esses dados e ideias de modo a procurar uma possibilidade para a introdução do modelo de regressão linear:

Esta tarefa tem como base o estudo das distribuições bidimensionais e surgiu a partir dos dados recolhidos pelos alunos. Na aula em que lhes entreguei a grelha de recolha de dados a partir dos inquéritos, eu sugeri que olhassem para os dados de cada criança e procurassem possíveis relações, e então, uma das alunas disse que achava que as crianças com mais peso eram as que pareciam ter o pé maior. Eu achei engraçada a ideia e achei que poderia ser adequada para introduzir a regressão linear. Testei o modelo e vi que obtinha um modelo de regressão linear que daria uma boa discussão. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

Sara aproveitou uma dessas relações e pensou que, a partir dessa ideia, “crianças com mais peso têm pé maior”, poderia criar uma provável tarefa de modelação (anexo 23). A professora, antes de criar a tarefa verificou se a conjectura que queria usar poderia dar origem a um modelo de regressão linear. O que Sara fez foi tentar perceber se conseguia ou não passar por todas as fases de modelação matemática e principalmente chegar ao modelo matemático (regressão linear) e se com isto cumpria o seu objetivo: introduzir as distribuições bidimensionais e levar os alunos a validarem (ou não) a conjectura estabelecida pela sua colega.

Na entrevista pré-aula, Sara explicou que fez a construção da tabela inerente às duas variáveis em estudo e testou, com recurso ao EXCEL se conseguia ou não chegar a um modelo de regressão linear (modelo matemático). Caso isso se verificasse, poderia avançar para a construção da tarefa:

Construí uma tabela no EXCEL, fiz o diagrama de dispersão e, depois, explorei as funcionalidades do EXCEL e pedi a reta de regressão linear e vi que era algo que podia fazer e levar para a sala de aula ... acho que os alunos vão perceber a relação que a colega de turma fez e que podem comprovar com recurso à estatística ... achei que dava para iniciar este conteúdo. E só depois é que pensei e me preocupei como construir a tarefa. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

A professora deu à tarefa um título alusivo à possível relação entre as duas variáveis estatísticas e introduziu uma imagem relacionada com o contexto real. Começou por apresentar o objetivo, indicar os conteúdos estatísticos que iriam surgir e os materiais necessários para a realização da tarefa. No objetivo, Sara explicou que os conteúdos estatísticos iriam surgir a partir dos contextos reais. Logo de seguida, fez uma introdução que permitisse compreender o propósito da tarefa e introduziu uma conjectura possível entre as duas variáveis. Apresentou uma tabela ilustrativa de como poderiam organizar os dados reais referentes às duas variáveis.

A construção da tarefa

O objetivo desta tarefa foi não só ser estruturada com o propósito de todas as fases do ciclo de modelação emergirem, como abordar a associação linear entre duas variáveis numéricas e levar os alunos a refletirem acerca da relação estabelecida, comparando os resultados matemáticos que iriam obter com a realidade conhecida:

Eu pensei no ciclo de modelação que tínhamos estudado e discutido e sabia que tinha que colocar questões que os fizesse passar pelo ciclo. Resolvi colocar a conjectura da minha aluna para que de imediato reconhecessem a situação e se lembrassem da aula onde surgiu essa conjectura. Depois coloquei uma imagem. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

A tarefa iniciou-se com uma conjectura feita por alunos e uma imagem de modo a mobilizar, quase de imediato, a atenção e curiosidade dos alunos, tal como está presente na tarefa.

Sara solicitou a construção de uma tabela onde constasse, para cada criança da amostra, o peso e o número de sapato e ainda, o respetivo diagrama de dispersão. Ao

experimentalmente em casa, Sara teve por objetivo compreender se este conjunto de dados levaria ou não os alunos à construção do modelo real (tabela e diagrama) e se estes, de forma ainda inconsciente e natural, conseguiriam chegar a esse modelo. Neste sentido, colocou questões na tarefa que conduziram os alunos à construção do modelo real, estruturando a tarefa no sentido de passar pela segunda fase do ciclo de modelação:

(...) comecei por pedir a construção do modelo real, tabela e diagrama. Aí pensei que seria boa ideia e antes mesmo de pedir o modelo matemático, que podia, tal como discutimos em conjunto na reunião de trabalho colaborativo, colocar questões que levassem os alunos a refletirem a partir da observação da tabela e nuvem de pontos e dessem a sua opinião acerca do fundamento da conjectura. Acho que vai ser interessante ver a que conclusões chegam mesmo antes de chegarem à reta de regressão linear. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

Sara percebeu que com este par de variáveis conseguiria levar os alunos a chegarem por eles à construção do modelo de regressão linear e ao estudo e interpretação, em contexto real, do valor do coeficiente de correlação linear. O objetivo de Sara foi levar os alunos à construção do modelo matemático, e assim chegarem à construção do modelo matemático:

Nesta fase pensei pedir o sinal de correlação e pergunto mesmo se é positivo, negativo, fraco ou forte. O modelo matemático é solicitado, é a primeira vez que estão a fazer isto e eu pensei em estruturar a tarefa com o objetivo de não se perderem. Ao pedir o modelo de regressão linear, peço também para calcularem o coeficiente de correlação linear. Aí pensamos que seria boa ideia pedir aos alunos para relacionarem o que já disseram anteriormente com o valor do coeficiente de correlação, acho que vão chegar lá...espero. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

Ao colocar questões específicas (questão três e quatro), Sara, tal como se verifica no excerto anterior, pretendeu que os alunos construíssem o modelo matemático e conduziu-os nesse sentido, estruturando bastante as questões de modo a cumprir esse objetivo.

A fase de testagem e interpretação de resultados foi pensada no sentido de colocar questões que levasse os alunos a trabalhar matematicamente e utilizassem conhecimentos matemáticos. As questões (questão 5) colocadas por Sara levaram à testagem e previsão de resultados a partir do modelo de regressão linear obtido.

Na questão seis, Sara teve por objetivo que os alunos interpretassem os resultados matemáticos obtidos com a realidade conhecida, dando a conhecer que compreendeu a importância da quinta fase do ciclo de modelação (interpretação de resultados):

Eu peço, em algumas questões (...) para interpretarem os valores no contexto da situação. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

Nas últimas questões, Sara apelou à comparação dos resultados obtidos com as conjecturas presentes no início da tarefa. A professora teve também como objetivo que os alunos refletissem sobre a validade do modelo obtido e apresentassem justificações que confirmassem ou não a conjectura inicial (última fase do ciclo de modelação):

E peço para dizerem se existe algum fundamento na relação que a colega estabeleceu e assim apresentem justificações. Esta parte é muito importante, pois vão comparar com a realidade. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

No entanto, não pensou na formulação escrita de uma questão que os levasse à procura de um novo modelo matemático, caso refutassem o inicial revelando a não previsão desta situação quando preparou a tarefa.

Planificação da aula

Sara preparou a tarefa para explorar em uma única aula de 90 minutos com a seguinte sequência: introdução dos conteúdos estatísticos a partir de um exemplo: 15 minutos; leitura da tarefa: 5 minutos; questão 1: 10 minutos; questão 2: 5 minutos; questão 3: 5 minutos; questão 4: 5 minutos; questão 5: 20 minutos; questão 6: 15 minutos; questão 7: 10 minutos. Sara não apresentou na sua planificação o tempo destinado à discussão da tarefa. Como nos explica, teve em conta as fases de modelação:

Tive cuidado e preocupei-me com as fases de modelação e que os alunos aprendessem estes conteúdos. Pensei em ler a tarefa e introduzir com algumas chamadas de atenção, depois dividi o tempo da aula pelas questões. Na introdução deixei 15 minutos para dar um exemplo em EXCEL para ver se não sentem tanta dificuldade. O tempo foi pensado também com base nas fases do ciclo de modelação, deixei mais tempo para a construção do modelo matemático e testagem do modelo. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

À semelhança das tarefas que antecederam as de modelação, os alunos continuaram organizados em grupos de quatro e de acordo com as suas áreas de interesse

e motivações: “Agrupei os alunos em grupos de 4, como já estavam anteriormente” (Entrevista pré-aula, 12/06/12).

Quanto aos recursos que teve necessidade de usar para a criação da tarefa, Sara referiu-se à tabela com dados recolhidos e EXCEL.

Ao pensar na planificação da tarefa, Sara teve ainda em conta a antecipação de dificuldades por parte dos alunos: “Tive em conta as outras tarefas e as dificuldades que surgiram” (Entrevista pré-aula, 12/06/12).

Um dos objetivos desta tarefa foi usar a Estatística como ferramenta útil na resolução de problemas da vida real e estudarem uma amostra conhecida.

A forma como esta tarefa foi planificada e com que objetivo foi perceptível nas suas palavras nos breves instantes que antecederam a primeira aula de modelação. Sara referiu que a origem da tarefa partiu de dados reais recolhidos pelos alunos e com objetivo de estudarem as distribuições bidimensionais:

Esta tarefa tem como base o estudo das distribuições bidimensionais e surgiu a partir dos dados recolhidos pelos alunos. Nesta tarefa, a motivação foi a introdução ao estudo das variáveis bidimensionais através de dados conhecidos. Desta vez eles vão estudar a regressão linear para eles fazerem o estudo inicial. Sim é mesmo real porque tem a ver com os jogos escolhidos por eles e a partir de dados originais. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

Quando Sara foi questionada, na entrevista que antecedeu a aula, sobre as variáveis que emergiriam nesta tarefa, referiu que as variáveis que surgiriam seriam o peso e o número de calçado das crianças selecionadas para amostra e os conteúdos estatísticos seriam: o diagrama de dispersão e o modelo matemático associado à regressão linear:

Investigadora: Quais as variáveis estatísticas que vão ser estudadas?

Sara: São duas: o peso e o tamanho do pé.

Investigadora: Que conteúdos estatísticos vão emergir?

Sara: Distribuições bidimensionais, nuvem de pontos, regressão...

Investigadora: A tarefa está muito ou pouco estruturada?

Sara: Está bastante estruturada! (Entrevista pré aula, 12/06/12)

A tarefa foi pensada por Sara, como um ponto de partida para introduzir estes conteúdos estatísticos. O objetivo era que os alunos conseguissem testar a conjectura, passassem por todas as fases de modelação e simultaneamente aprendessem estes novos conteúdos estatísticos. Para além disso, que fossem capazes de interpretar e criticar os resultados estatísticos tendo em conta o que conheciam da situação real:

Sara: É uma tarefa como ponto de partida. Neste caso é um ponto de partida!

Investigadora: Como planificou esta aula? O que teve em conta e como a estruturou?

Sara: (...) Pensei como introduzir a tarefa. Organizámos em conjunto um *PowerPoint* com um exemplo que conduzia os alunos desde o estabelecimento de relações, criação de uma tabela, construção da nuvem de pontos, construção do modelo de regressão linear, cálculo do coeficiente e interpretação, para que depois fizessem analogamente nesta tarefa proposta. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

Sara decidiu, conjuntamente com as colegas, que faria na aula de modelação, uma introdução teórica antes de apresentar a tarefa aos alunos, familiarizando-os desta forma com os conceitos novos e exemplificando, com recurso ao EXCEL, uma situação real. Esta forma de pensar e tomada de decisões evidenciou que pensou na forma como iriam ser analisados os dados e na interpretação do modelo matemático (regressão linear). Durante a entrevista pré-aula, Sara não se referiu a tantas dificuldades como aquelas que apresentou na planificação:

Prevejo uma dificuldade inicial na construção da nuvem de pontos.
Prevejo que eles reajam relativamente bem, ahhh... já fizeram outras tarefas. (Entrevista pré aula, 12/06/12)

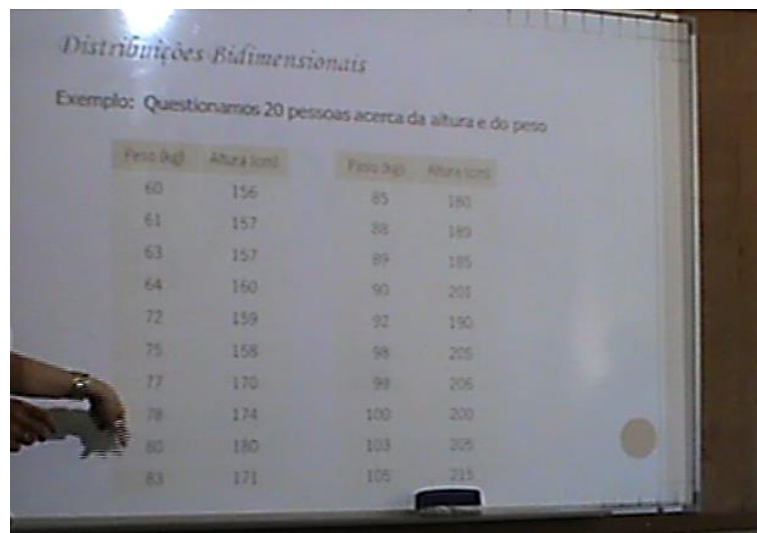
Sara na sua planificação sugeriu algumas estratégias que previu para atenuar as dificuldades previstas: mostrar uma apresentação sobre diagramas de dispersão e associações possíveis entre variáveis; apresentar antes da tarefa um exemplo de aplicação com recurso ao EXCEL; esclarecer dúvidas e circular pelos grupos; ajudar a trabalhar com o EXCEL e fazer questões dirigidas.

A condução da aula

Introdução de conceitos sobre as distribuições bidimensionais: Sara dirigiu-se à turma, tal como planificado, explicando que iriam iniciar o estudo de duas variáveis estatísticas e qual a relação existente entre elas:

Hoje vamos começar com as distribuições bidimensionais e ver o que significa isto. Em vez de estudarmos uma variável como temos feito até agora, vamos estudar duas e ver como se poderão relacionar ou não. Há variáveis que se vê facilmente que há uma relação entre elas e há outras que aparentemente não tem nada a ver uma com a outra, mas ao nível da Estatística vamos ver qual é a relação entre elas. Eu trouxe um *PowerPoint*, onde vamos estudar a relação entre o peso e a altura de 20 pessoas. (Aula de Sara, 12/06/12)

Tal como tinha referido na entrevista, optou por começar com um exemplo, retirado de um manual, e preparou um *PowerPoint* para exemplificar o que são distribuições bidimensionais, nuvem de pontos, correlação e como chegar, com recurso ao EXCEL, ao modelo matemático.



Distribuições Bidimensionais

Exemplo: Questionamos 20 pessoas acerca da altura e do peso

Peso (kg)	Altura (cm)	Peso (kg)	Altura (cm)
60	156	85	180
61	157	88	180
63	157	89	185
64	160	90	201
72	159	92	190
75	158	98	205
77	170	99	206
78	174	100	200
80	180	103	205
83	171	105	213

Figura 14: Exemplo introdutório para explicar os vários conteúdos relacionados com as distribuições bidimensionais (12/06/12)

Sara achou necessário propor uma discussão sobre o objetivo de se estudar a relação entre duas variáveis, solicitando aos alunos a interpretação da nuvem de pontos que relacionava as variáveis peso e altura, presentes no exemplo:

Sara: Vamos ver o que podemos fazer com esta tabela onde aparece para cada pessoa o peso e altura. Podemos fazer um gráfico. E vamos o que isto significa... por exemplo este ponto aqui o que significa? Significará que alguém que terá mais ou menos 65 Kg...

Aluno: ... tem mais ou menos 1,61 ou 1,62.

Sara: Cada ponto representa o quê?

Aluno: Uma pessoa.

Sara: Uma pessoa sim, cada ponto dá informação sobre o peso.

Alunos: E altura de cada pessoa. (Aula de Sara, 12/06/12)

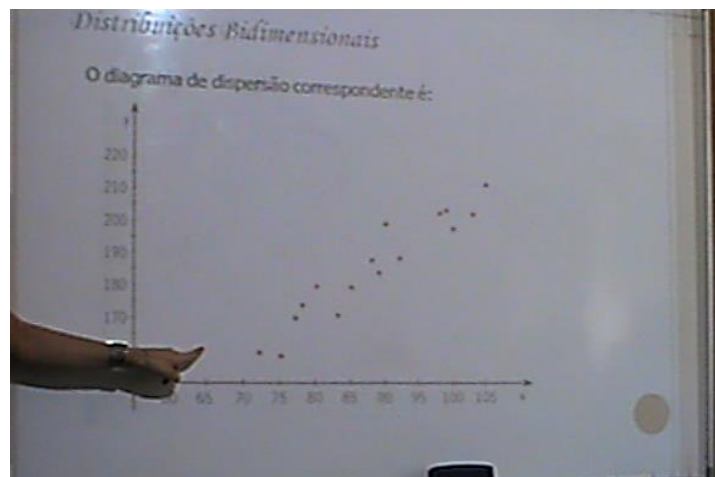


Figura 15: Exemplo usado para explicar o significado dos pontos do diagrama de dispersão, tendo em conta o contexto real (12/06/12)

Sara: Nesta nuvem de pontos que nós temos aqui, isto chama-se nuvem de pontos, será que nós conseguimos perceber alguma relação entre o peso e a altura?

Alunos: Conseguimos!

Sara: Qual?

Aluno: Que a altura influencia o peso.

Sara: Sim? De que forma?

Aluno: As pessoas mais altas têm tendência a ser mais pesadas.

Sara: Concordam todos?

Aluno: Sim, mas isso é o que sabemos do dia-a-dia, mas por exemplo eu sou mais alto do que tu (colega do lado) e peso menos... isso às vezes não é tão direto.

Sara: Meninos, este gráfico dá-nos indicação do que poderá estar a acontecer. Nós observamos o gráfico e conseguimos perceber se existe relação ou se não existe relação. Se todos os pontos se concentram à volta de uma linha ou uma curva... pode ser uma parábola... já estudámos a parábola, lembram-se? Podemos nesse caso concluir que existe uma relação entre as duas variáveis. Se essa nuvem for dispersa normalmente não existe nenhum tipo de relação. Vamos ver então alguns exemplos. (Aula de Sara, 12/06/12)

Sara procurou com este exemplo que os alunos mobilizassem o conhecimento extra matemático relativo a uma situação real, de modo a perceberem e interpretarem tanto a nuvem de pontos, como a tabela.

De seguida deu exemplos do tipo de associação que pode existir entre variáveis a partir da observação dos diagramas de dispersão e mencionou o significado do valor do coeficiente de correlação linear:

Sara: (...) Poderão ocorrer três situações: quando o valor do coeficiente de correlação linear se aproxima de 1, temos uma correlação positiva; se se aproximar de -1, temos uma correlação negativa; caso o coeficiente de correlação se aproxime de 0, nessa situação diz-se que não existe correlação. Vamos ver um exemplo! Vamos ver o que é o coeficiente de correlação. Vocês não vão precisar de saber como calcular à mão o coeficiente de correlação, mas no entanto, têm de perceber o que ele significa e de que forma ele nos ajuda a perceber e a decidir qual é a curva, ou função, qual é a reta que melhor se adapta ao nosso diagrama. Vamos ver seis gráficos! (Aula de Sara, 12/06/12)

Sara apresentou seis diagramas diferentes de dispersão a fim de exemplificar vários tipos de relação (direta ou inversa) e associação (linear ou não) entre duas variáveis estatísticas, assim como estudar o grau da intensidade da associação linear (correlação) entre as variáveis:

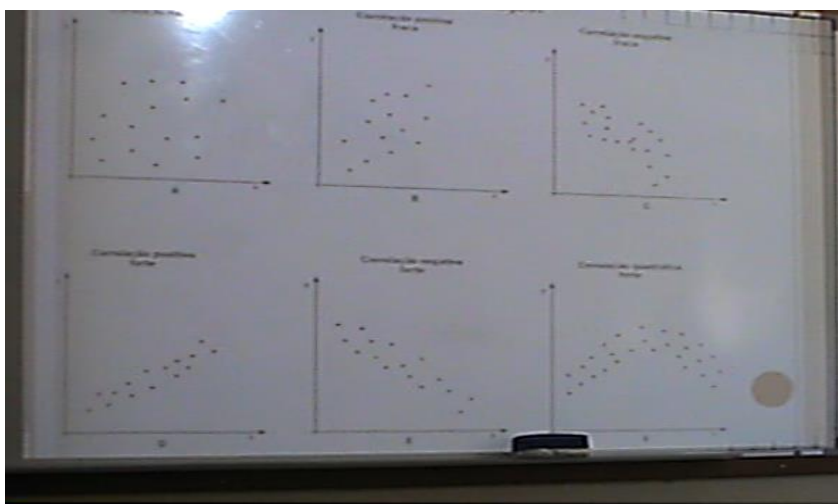


Figura 16: Exemplos de diagramas de dispersão (12/06/12)

A partir dos diagramas de dispersão, colocou questões no sentido de orientar a aquisição deste conhecimento estatístico. Conseguiu que de forma intuitiva e através da interpretação visual do gráfico, os alunos conseguissem compreender o tipo de relação (direta ou inversa) existente entre duas variáveis a partir da “tendência” da nuvem, como ela própria lhe chamou:

Alunos: No primeiro não deve haver relação nenhuma, está tudo distante.

Sara: Diz-se disperso... tens razão. E no outro... parece já existir alguma tendência?

Aluno: Sim, parece que estão inclinados para um lado e a ir para cima.

Sara: Será positiva?

Outro aluno: Sim positiva, mas não deve ser muito forte.

Sara: Porquê?

Aluno: Parecem ainda... como é que é... disperso?

Sara: Dispersos sim e é positiva fraca. (Aula de Sara, 12/06/12)

Sara não se limitou a falar de retas, mas também de curvas que se poderão ajustar melhor à nuvem de pontos e deu um exemplo, colocando questões aos seus alunos. Sara apelou aos conhecimentos já anteriormente lecionados aquando da leção do módulo “Funções polinomiais”:

Sara: E aqui neste caso, será uma reta o modelo que melhor se ajustará a esta nuvem de pontos?



Figura 17: Exemplo de uma associação não linear (12/06/12)

Alunos: Não! Mas é o quê? Curva?

Sara: É uma função quadrática! É do 2º grau! Lembram-se?

Alunos: Sim!

Aluno: É negativa? Está virada para baixo!

Sara: Sim é. Vamos passar a exemplos concretos! (Aula de Sara, 12/06/12)

A partir de um exemplo explicou o que teriam que fazer no EXCEL, na primeira tarefa de modelação, e que questões é que se poderiam levantar para estudar a relação entre as variáveis.

Distribuições Bidimensionais

Exemplo:

A tabela seguinte identifica os gastos de dez empresas em publicidade e o volume de vendas.

Determine o coeficiente de correlação de Pearson e averigue em que medida os gastos em publicidade têm influência sobre as vendas.

Empresa	Gastos em Publicidade (milhares de euros)	Vendas (milhões de euros)
A	1	15
B	1.5	25
C	0.8	20
D	1.3	80
E	5	65
F	15	200
G	40	850
H	2	22
I	25	485
J	20	580

→ EXCEL

Figura 18: Exemplo usado para ensinar as distribuições bidimensionais, com recurso ao EXCEL (12/06/12)

Sara interagiu com os alunos e colocou uma questão provocatória no sentido de compreender se perceberam o que pretendia com este problema:

Sara: Ao lerem o problema que questão vos vem logo à cabeça?

Aluno: Será que compensa?

Sara: O quê?

Aluno: Gastar tanto dinheiro em publicidade? Será que vendem mais?

Sara: Sim... será que compensa? Mais publicidade implica o quê? Mais vendas ou não?

Aluno: Se calhar não! Não sei, às vezes sim!

Sara: Às vezes implica, se calhar... vamos analisar isto com recurso à estatística e EXCEL! (Aula de Sara, 12/06/12)

A professora explicou aos alunos como recorrer ao EXCEL para testar matematicamente aquilo que, por conhecimento do senso comum, julgamos saber e opinar. Explicou como exportar os dados para a folha de cálculo e como construir o diagrama de dispersão que apareceram nos exemplos anteriores. Questionou os alunos sobre os títulos que deveriam aparecer nos eixos e construção do modelo que traduzia a situação real:

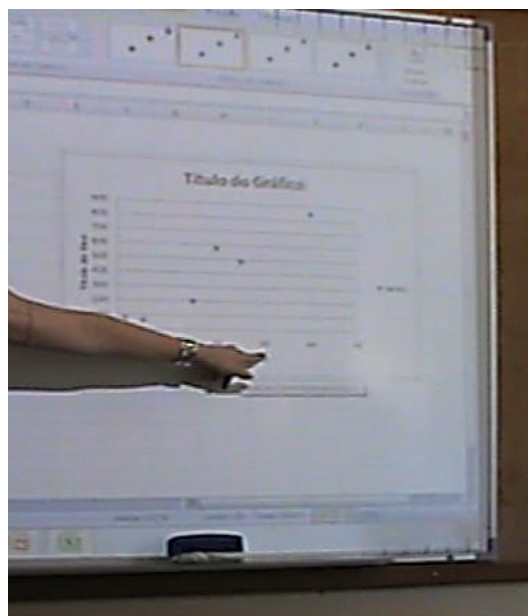


Figura 19: Exemplo usado para ensinar a construir o diagrama de dispersão, com recurso ao EXCEL (12/06/12)

Sara perguntou aos alunos se seria possível construir uma reta que se aproximasse o máximo possível dos pontos, revelando o que pretendia ensinar:

Sara: Será que conseguimos construir uma reta que se aproxime o máximo possível dos pontos todos e como será essa reta? Qual será a tendência e o valor do coeficiente de correlação?

Alunos: Está a subir, deve ser positiva e forte! (Aula de Sara, 12/06/12)

A professora explicou aos alunos como, através do EXCEL, conseguiriam construir o modelo de regressão linear e como proceder para aparecer no ecrã a expressão algébrica correspondente. Aproveitou a oportunidade para fazer referência a outras linhas de tendência que poderiam ajustar-se melhor a um determinado conjunto de dados e como as obter. Nesta fase introdutória e que antecedeu a apresentação da primeira tarefa de modelação, e aproveitando o exemplo, Sara questionou a turma como se poderia calcular o r (coeficiente de correlação) a partir de r^2 :

Sara: Alguém sabe dizer-me como é que a partir do valor do r^2 poderemos chegar ao valor do r ?

Aluno: A partir daquela fórmula que a professora tinha ali há bocado!

Sara: Não! Se nós temos o valor ao quadrado não vamos precisar usar essa fórmula... há outra maneira! Qual será o valor de r apenas?

Aluno: Então é metade!

Sara: Metade?!

Outro aluno: Não... faz-se raiz quadrada!

Aluno: Pois é!

Sara: Claro vamos fazer a raiz quadrada do número anterior. (Aula de Sara, 12/06/12)

Alguns alunos disseram que teriam que determinar a raiz quadrada desse valor, obtendo 0,97. Questionou sobre o significado desse valor e que tipo de correlação existiria, quando pretendia referir-se à relação que poderia existir entre as variáveis e o grau de intensidade da associação (correlação) entre estas, o que sugere que Sara não tem clarificados estes conceitos:

Sara: O valor do r é 0,97! Como é que vocês interpretam isto?

Aluno: Interpretar o quê professora?

Sara: Será que existe correlação, será que não existe? Será que mais publicidade implica mais vendas?

Aluno: Sim... o gráfico diz isso. Há uma tendência a subir e o valor que a professora disse não é perto de 1?

Sara: Sim e então?

Outro aluno: Então está muito relacionado e é forte!

Sara: Vamos agora fazer o mesmo para situações vossas conhecidas! (Aula de Sara, 12/06/12)

Terminada a explicação a partir do *PowerPoint*, Sara entregou então aos alunos o enunciado escrito da primeira tarefa de modelação.

Construção da representação real: A professora teve a preocupação de na parte introdutória da tarefa, apresentar diálogos estabelecidos entre os seus alunos e foto, promovendo a passagem da situação real para a situação a modelar, isto é, representação real da situação. Deste modo, o reconhecimento da situação real foi imediato. A foto, colocada propositadamente na tarefa, teve por objetivo levar a que os alunos se lembrassem que recolheram dados relativamente ao peso das crianças. Os alunos reconheceram a situação, lembrando-se não só que estiveram envolvidos na pesagem das crianças (amostra escolhida), como também nos diálogos havidos:

Aluna Giovana: Olha, isto foi a balança que levamos? Nós tivemos essa conversa! Quando é que a professora ouviu isto? Houve uns meninos que eu pesei com o João e não tinham o número do sapato e eu até disse que parecia que os mais gordinhos tinham pé maior.

Sara: No dia da gincana e quando estavam a organizar os dados ao dados a partir dos inquéritos. Lembram-se de eu vos ter pedido para olhar para a grelha dos inquéritos e estabelecerem possíveis relações sobre o que vos saltava à vista?

Aluno: Sim, a professora aproveitou essas coisas que dissemos? A Filipa disse que não tinha nada a ver... pois foi! No dia da gincana o nosso grupo

quando estávamos a apontar o tempo de corrida dos miúdos eu até disse... olha este é patudo, às tantas tropeça e cai e a Giovana disse... é como tu, és grande e patudo. Os grandes são patudos e assim não é justo porque em poucos passos chegam logo à meta!

Giovana: A professora tem bom ouvido, estava ao pé de nós quando tivemos esta conversa?

Sara: Sim e aproveitei outras coisas que disseram para outras tarefas que ainda vamos fazer!

Aluno: Assim é fixe! Então e agora vamos ver se isto tem algum jeito?

Sara: Vamos estudar com recurso à estatística e EXCEL. Façam menos barulho e vamos trabalhar. Leiam bem o enunciado e vão respondendo às questões. Eu vou circulando e tirando dúvidas, ok? (Aula de Sara, 12/06/12)

Sara teve o cuidado de fazer sentir aos seus alunos a importância dos dados recolhidos e a utilidade que lhes iriam dar nesta tarefa, como ilustra o excerto anterior.

Construção do modelo real: Sara conseguiu que ao estabelecerem relações com a realidade, a conjectura apresentada na tarefa parecesse possível aos alunos, pois mobilizaram o conhecimento extra matemático da situação real por eles conhecida. Ao reconhecerem as relações entre as variáveis estatísticas peso e número do calçado, os alunos passaram à construção do modelo real. A partir das tabelas de registo elaboradas a partir dos questionários e fornecidos por Sara, os alunos passaram a construir o modelo real, que consistiu na elaboração, em EXCEL, de uma tabela e respetivo diagrama de dispersão que relacionava o número da criança, com o seu peso e número de calçado. Para evitar dificuldades na construção do diagrama de dispersão, Sara chamou a atenção dos alunos para o facto de, no EXCEL, ser obrigatório o uso de vírgulas para a escrita dos números decimais, ao invés de pontos. Ela salientou ainda que se usassem pontos, quando fossem construir o diagrama de dispersão este estaria incorreto:

Sara: Uma chamada de atenção para todos! Nos dados do peso, se colocarem pontos, em vez de vírgulas, o diagrama depois não funciona. Os valores que têm casas decimais têm de ser com vírgulas! Está bem? (Aula de Sara, 12/06/12)

Estas tabelas (matematização da situação) permitiram levar os dados reais para a sala de aula e começarem a construção do modelo real:

Nº da criança	Peso das crianças	Número de sapato
1	18,5	28
2	19	28
3		
4	24	29
5	20	30
6		
7	18	26
8	16	30
9	15	26
10	24	29
11	28,5	32
12	19	30
13	16	26
14	22	31
15	22	30
16	25	29
17	19,5	28
18	21	32
19		
20	19	29
21	21	30
22		
23	18	29
24	19	27
25		

Número da criança	Peso (em Kg)	Nº de sapato
1	18,5	28
2	19	28
4	24	29
5	20	30
7	18	26
8	16	30
9	15	26
10	24	29
11	28,5	32
12	19	30
13	16	26
14	22	31
15	22	30
16	25	29
17	19,5	28
18	21	32
20	19	29
21	21	30
23	18	29
24	19	27

Figura 20: Exemplo, em EXCEL, de duas tabelas construídas por um grupo de alunos: primeira resultante da organização dos dados a partir dos questionários; segunda resultante da limpeza de dados (12/06/12)

As tabelas acima apresentadas e que resultam do trabalho dos alunos a partir das tabelas de registo permitiram a Sara compreender de que forma os seus alunos iriam selecionar os dados para o estudo que seguidamente fariam, nomeadamente para a próxima fase do ciclo de modelação. A segunda tabela resultou da formulação de questões por parte dos alunos quanto aos dados que deveriam selecionar para chegarem ao outro modelo real (diagrama de dispersão), mostrando que Sara ao solicitar este tipo de tabelas sabia o que pretendia e o que queria ensinar aos seus alunos. Teve o cuidado de circular pelos vários grupos e dizer aos alunos que tivessem cautela na construção das tabelas que iriam levar posteriormente à construção do diagrama de dispersão, pois nem todas as

crianças da amostra tinham as informações completas. A forma como Sara conduziu este processo é evidenciada no episódio de aula seguinte:

Sara: Vocês têm que relacionar o peso de cada criança e o número do calçado e não o número de identificação das crianças. Achem que esses espaços sem informação fazem sentido?

Aluno: Não, não temos a informação toda e não colocámos! Temos que limpar essas linhas?

Sara: Sim, tem que ver os dados que são importantes antes de selecionarem e construírem o diagrama de dispersão! (Aula de Sara, 12/06/12)

Com esta atitude, a professora levou os seus alunos a construírem o modelo real (tabelas e diagrama de dispersão). A forma como os dados inicialmente (por alguns grupos) estavam organizados, caso Sara não interviesse, influenciaria a construção do modelo matemático (modelo de regressão linear) obtido, o que não se adequaria à situação descrita. Em todos os grupos essa situação foi detetada e todos os modelos reais obtidos foram os corretos. Sara verificou que caso os espaços estivessem vazios o modelo de regressão estava correto, caso contrário, se estivessem preenchidos com “traços” isso não se verificava.

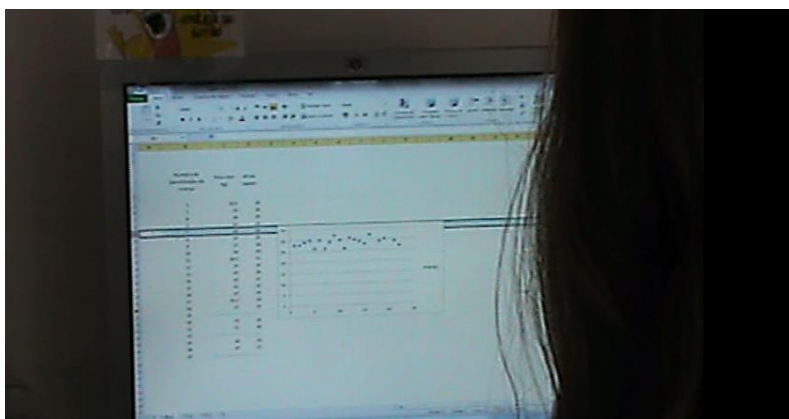


Figura 21: Primeiro diagrama de dispersão obtido antes da intervenção de Sara (12/06/12)

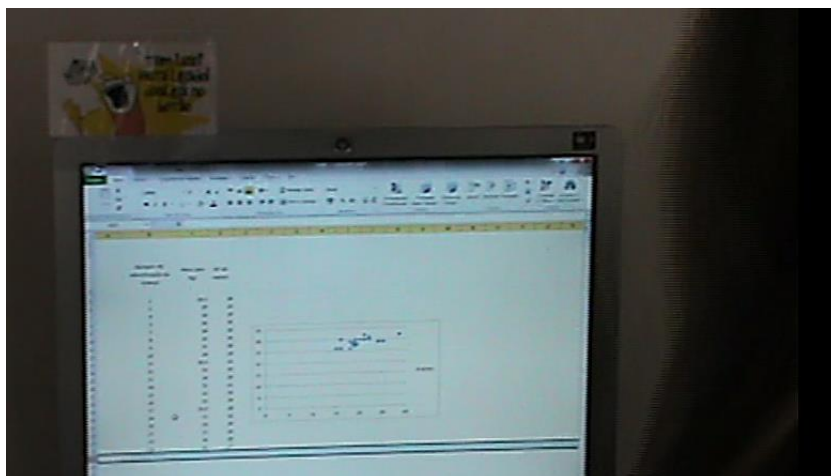


Figura 22: Segundo diagrama de dispersão obtido após intervenção de Sara (12/06/12)

Sara construiu a tarefa e planificou-a no sentido de levar os alunos a refletirem sobre a análise dos dados a partir dos modelos reais construídos. A questão três, do enunciado da tarefa, evidenciou este aspeto. Permitiu aos seus alunos lerem os modelos reais construídos, dando sentido aos dados. No caso desta tarefa e das distribuições bidimensionais, este facto esteve presente na construção do modelo real, diagrama de dispersão, tendo promovido a compreensão dos dados e da provável relação entre as duas variáveis que estavam a estudar. Sara colocou questões (questão três) logo após a construção do diagrama de dispersão que permitiram tirar algumas conclusões acerca da relação entre as variáveis (direta ou inversa) e do grau da intensidade da associação linear (correlação) entre as variáveis (a serem comprovadas posteriormente aquando da construção do modelo matemático) só por observação do diagrama de dispersão.

Quase todos os grupos de alunos, ao observarem o diagrama de dispersão, afirmaram que parecia existir uma correlação positiva fraca entre as variáveis “peso das crianças e número do calçado”. No entanto, houve um grupo que à partida achou que não havia relação nenhuma. A terminologia usada não foi a mais correta, mas foi a que Sara usou na tarefa e durante toda a aula, levando a que os alunos também reproduzissem da mesma forma.

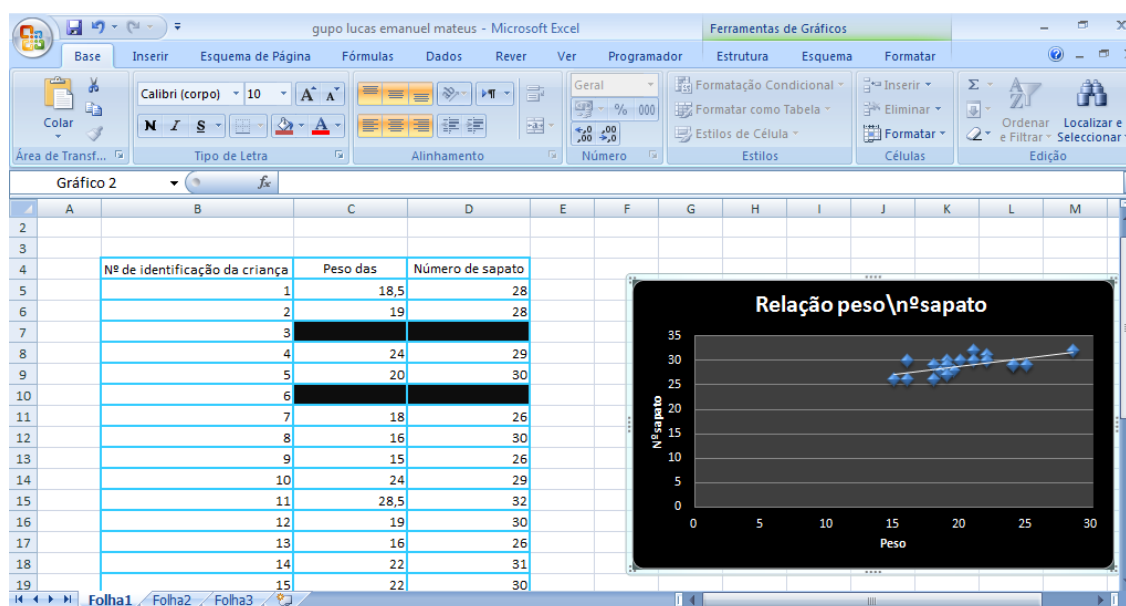


Figura 23: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão de um dos grupos (12/06/12)

Sara: Parece que não existe, é?

Aluno: Parece não existir professora! Os dados parecem que estão todos aqui atrofiados!

Sara: Parecem todos muito misturados, é? Isso é a vossa opinião. Já vamos aprofundar isso mais à frente. Achar que não há correlação nenhuma?

Aluno: Claro que não há correlação nenhuma!

Sara: Pode não haver... mas... Há casos em que não existe relação nenhuma, por exemplo, número de sapato e pontaria.

Aluno: Aí não, não.

Sara: Aqui à partida também parece que não há, mas será que não há mesmo?

Outro aluno: Deve haver... por exemplo, tu medes 1 metro e setenta e tal e calças o 40... eu acho que há!

Aluno: Professora, não existe proporcionalidade direta... para isso tinham que estar alinhados!

Sara: Não existe proporcionalidade direta... isso aí concordo! Mas não tem que existir proporcionalidade direta... mas se calhar existe alguma relação... não sei! Haverá alguma tendência?

Aluno: Há uma tendência... a aumentar! Aumenta o peso... aumenta o número do sapato... parece!

Sara: Então pensem bem e respondam à questão!

Aluno: A correlação assim é positiva... porque os pontos estão a subir.

Sara: Então escrevam a vossa opinião. (Aula de Sara, 12/06/12)

Este excerto de episódio de aula mostrou que Sara teve a preocupação de ir colocando questões a partir das intervenções dos alunos, de modo a provocá-los e levá-los a raciocinar a partir do modelo real que tinham, aspetos estes cruciais para a modelação matemática.

Construção do modelo matemático: Os alunos de Sara iniciaram a matematização da situação e à semelhança do que esta tinha feito para o exemplo inicial (antes da apresentação da tarefa), os alunos construíram o modelo matemático, neste caso, solicitado pela professora.

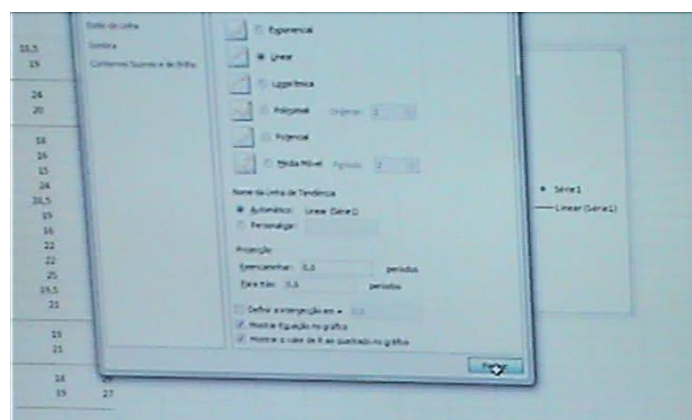


Figura 24: Exemplo, de um dos grupos, da construção do modelo de regressão linear, com recurso ao EXCEL (12/06/12)

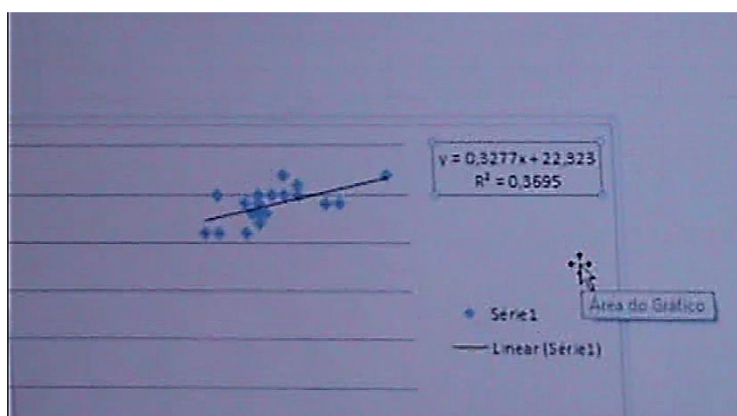


Figura 25: Exemplo, de um dos grupos, da obtenção do modelo de regressão linear, com recurso ao EXCEL (12/06/12)

Sara acompanhou a passagem do modelo real ao modelo matemático no grupo cujas apresentações estão acima e questionou os alunos quanto ao que obtiveram:

Sara: Bem, já têm muita informação aí! Vocês estão a seguir os passos que

eu segui naquele exemplo, mas leiam a tarefa porque eu peço algumas coisas para além disso!

Aluno: Isto é o modelo de regressão, certo?

Sara: Sim, agora antes de continuar, será que por observação direta, existe relação? E se existe, é como? Positiva, negativa, forte ou fraca?

Aluno: É positiva, a reta está a crescer. Os pontos estão perto da reta, então é forte, não é, professora?

Sara: Vamos... escrevam a vossa opinião! E como podemos comprovar o que estão a dizer?

Aluno: Saber o valor daquele r !

Sara: E como? Têm o valor de r^2 ! Como calculam o r ?

Aluno: O r é a raiz quadrada do valor ao quadrado.

Sara: E depois o que podem dizer?

Aluno: Se é forte ou fraca consoante o valor que der!

Sara: É isso mesmo! (Aula de Sara, 12/06/12)

À semelhança do que Sara tinha exemplificado antes da entrega da tarefa, os alunos calcularam o coeficiente de correlação linear. Numa das questões foi solicitada a interpretação desse valor e do tipo de correlação. Deve questionar-se sobre o tipo de associação e grau da associação (correlação) entre as variáveis, relacionando-o com o valor do coeficiente de correlação e não sobre o tipo de correlação, pois esta analisa o grau da intensidade da associação entre duas variáveis quantitativas. Podemos dizer que a professora demonstrou alguma fragilidade sobre o que conhece sobre esses conteúdos, mas por outro lado a sua intenção ao tentar compreender a interpretação que os alunos fazem do valor do coeficiente de correlação obtido, revelou algum conhecimento sobre o assunto. O modelo matemático obtido foi:

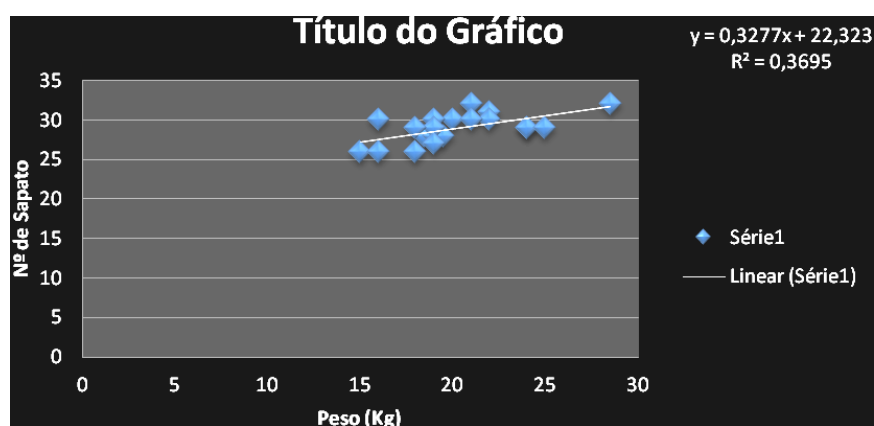


Figura 26: Exemplo, obtido por um grupo de alunos, de um modelo de regressão linear, com recurso ao EXCEL (12/06/12)

Sara levou os alunos a calcularem o valor do coeficiente de correlação linear e também pediu para interpretarem esse valor tendo em conta o contexto real:

Sara: Então que valor obtiveram? E o que têm a dizer?

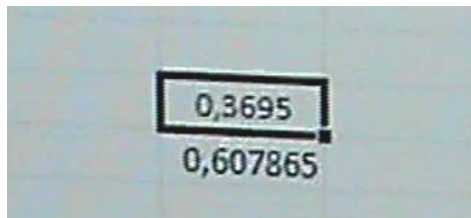


Figura 27: Exemplo do valor do coeficiente de correlação linear obtido por um grupo de alunos, com recurso ao EXCEL (12/06/12)

Aluna: 0,607865

Sara: E então? O que concluem?

Aluno: Então não é bem o que já tínhamos visto... é forte... não muito mas é!

Sara: Não muito porquê?

Aluna: Porque está mais perto de 0,5 do que de 1, mas é forte na mesma, mas se tivesse mais perto de 1 podíamos dizer que era muito forte!

Aluno: Tás a ver, há relação entre o pé e o peso!

Aluna: Tá fixe! (Aula de Sara, 12/06/12)

Este aspeto é de igual importância para a modelação matemática, pois nesta fase do ciclo de modelação, os alunos começam a sentir necessidade de mobilizarem o conhecimento extra matemático que possuem na interpretação de resultados matemáticos.

Obter resultados matemáticos: Os alunos não compreenderam que tinham de usar a equação da reta de regressão linear para preverem resultados e Sara aproveitou o que os alunos estavam a dizer, a partir da observação direta do gráfico, para questioná-los sobre o valor esperado para o número do sapato e como poderiam fazer se não tivessem gráfico:

Aluno: Professora, agora podemos ir ao gráfico e ver pelos pontos, mais ou menos qual é o número do sapato para uma criança com 17,7 Kg?

Sara: Então, digam-me lá o que conseguem prever?

Aluno: Dá para ver que é mais ou menos...

Sara: Então o que é que preveem? Que número de sapato será?

Aluno: Assim mais ou menos a olho parece ser 27, 28 não sei, mas não sei onde está o 17,7 porque não aparece esse ponto! E se fizer com o 18 Kg?

Sara: Então pensa nesse valor e vai ao encontro da linha que têm aí, da reta e vejam lá se conseguem prever!

Aluno: Não estou a perceber professora! Da linha? Da reta?

Sara: Sim, a reta permite fazer previsões!

Aluno: Porque está mais ou menos ao pé dos pontos? Então dá valores mais ou menos?

Sara: É por isso que chamamos previsões!

Aluno: É mais aqui, aqui!



Figura 28: Exemplo da reta de regressão linear obtido por um grupo de alunos, com recurso ao EXCEL (12/06/12)

Sara: É aqui, mas não sabem dizer qual é! Não temos uma função e a equação da função?

Aluno: Sim, temos!

Sara: Então, o que é que podemos fazer? O x é o quê?

Aluno: No eixo do x está escrito peso. É o peso?

Sara: Sim, o x é o peso! Qual é o vosso valor de x agora?

Outro aluno: O nosso valor de x ?

Sara: Sim!

Aluno: Então é 17,7, é? Deve dar o tal 28.

Sara: Sim, não sei... temos de ver. Como?

Outro aluno: Vamos substituir na equação!

Sara: É isso!

Aluno: Já percebemos, deixe-nos tentar e ver se dá aquilo que dissemos!

Dá aí uma calculadora! (Aula de Sara, 12/06/12)

Este excerto mostra não só que Sara compreendeu a importância da equação da reta de regressão linear como um modelo para prever resultados, como revelou saber como conduzir uma discussão que levasse à essa mesma compreensão por parte dos seus alunos.

Na quinta questão, outros alunos estavam com algumas dúvidas quanto aos valores a substituir no modelo de regressão linear e Sara interveio no sentido de os questionar acerca do significado do eixo dos xx e do eixo dos yy , para que eles entendessem onde deveriam substituir, de modo a conseguirem fazer previsões e chegarem a resultados matemáticos:

Aluna: Professora, agora pergunta: dentro da faixa etária estudada, qual é a previsão do número de sapato de uma criança que tenha 17,7 Kg? E agora?

Sara: E agora?! Qual é a função que vocês têm? Vocês não têm uma função?

Aluna: É $0,3277x+..$

Sara: Diz.

Aluna: $0,3277x+22,323$

Sara: O x é o quê?

Aluna: É o peso!

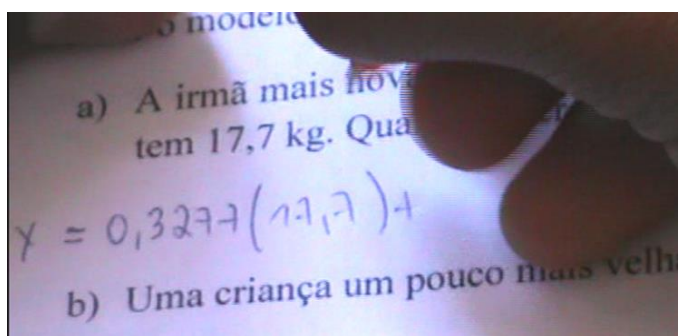
Sara: É o peso não é? Então o peso é 17,7 o que é que podes fazer a esse x ?

Aluna: Substituo por 17,7.

Sara: Ahahah! E o y é o quê?

Aluno: É o valor que vamos obter para o número do sapato! E vai dar um número de jeito?

Sara: Vamos ver! Testem! (Aula de Sara, 12/06/12)



a) A irmã mais nova tem 17,7 kg. Qua

$$y = 0,3277(17,7) +$$

b) Uma criança um pouco mais velha

Figura 29: Exemplo, de um dos grupos, dos cálculos efetuados para a obtenção de resultados matemáticos (12/06/12)

Interpretação dos resultados matemáticos: Sara, na quinta e sexta questão da tarefa, solicitou a interpretação de resultados, propondo várias situações de testagem. Pretendia que os alunos refletissem sobre a adequabilidade do modelo matemático e previsão de valores que estivessem dentro e fora do intervalo das possibilidades e decidissem quanto às situações em que essas previsões são válidas:

Aluno: Professora, chegue aqui! Este modelo não pode ser!

Sara: Porquê?

Aluno: Ninguém calça 55!

Sara: Testaram para um adulto com 100Kg? E se fosse alguém com 130 Kg?

Aluno: Isso dava 80 de sapato, se calhar!

Sara: E então, o modelo não dá mesmo?

Aluno: Não dá para adultos! Enquanto testámos para crianças dava valores que podiam ser!

Sara: Então expliquem isso!

Aluno: Não faz sentido porque 55 é um número muito grande! Esta reta não dá para fazer estas estimativas!

Sara: Todas?

Aluno: Não, professora! Não dá para adultos! Alguém com 150 Kg dava quase um metro de pé! (risos) (Aula de Sara, 12/06/12)

O episódio de aula acima descrito e as respostas às questões 5d e 6 da tarefa, de um grupo de alunos de Sara, demonstraram que Sara conduziu a tarefa no sentido de levar os alunos a concluir que os resultados matemáticos obtidos são possibilidades e não generalizações, pois não se aplicam a adultos, sendo apenas generalizáveis para crianças.

Na questão 5a, os alunos, inicialmente estavam a usar o gráfico (por observação), à semelhança das tarefas anteriores, para prever o número de sapato para o peso solicitado e concluíram assim, sem usar o modelo matemático, que o número de sapato deveria ser o 27 ou o 28. Os alunos não perceberam que poderiam usar o modelo matemático, a equação do modelo de regressão linear, e substituir um dos parâmetros obtendo assim o valor pretendido. Sara interveio no sentido de os alunos substituírem o valor no modelo matemático e assim fazerem previsões. Ela referiu aos alunos que através do gráfico ficavam com uma ideia do valor esperado, mas não tinham a certeza e só conseguiriam fazer uma melhor estimativa se usassem o modelo matemático linear obtido. Os alunos tiveram alguma dificuldade em perceber que poderiam usar o modelo matemático para comprovar a previsão que estavam a fazer por observação direta do diagrama de dispersão.

Validação do modelo matemático: Na questão 5d, os alunos concluíram que para o peso de 100 kg ao obterem o número de sapato 55, isso era anormal. Alguns alunos não perceberam que este modelo poderia não ser adequado para valores fora do intervalo dos dados reais e não validaram o modelo. Outros alunos referiram que o modelo era adequado à situação real apresentada porque foi feito a crianças e as previsões eram aceitáveis. Já para adultos, o modelo não era adequado. Sara não solicitou aos alunos que estes justificassem a validação ou não do modelo, e caso não validassem, não colocou nenhuma questão que os levasse à procura de outro. Neste aspeto, revelou alguma in experiência na gestão deste tipo de situações ou necessidade de aprofundar o seu conhecimento sobre este assunto.

A maior parte dos alunos, ao construir o modelo de regressão linear e ao estimar valores, perceberam que esses valores só fariam sentido para crianças e não poderia ser usado para adultos. Caso contrário, o número do calçado obtido, através do modelo, ultrapassaria o que é considerado normal. Deste modo, a fase de interpretação de resultados matemáticos e validação do modelo matemático foi realizada com sucesso, pois os alunos conseguiram comparar o que obtiveram com a realidade e o conhecimento extra matemático, conseguindo criticar os resultados. Todos os grupos terminaram, discutiram entre si e passaram por todas as fases de modelação. Na última fase, esta poderia ter sido melhor explorada por Sara. Ela apelou à comparação entre o que obtiveram matematicamente com a realidade conhecida, mas não os questionou sobre a possibilidade de construírem ou procurarem um outro modelo.

Reflexão imediata de Sara sobre a aula

Quando questionada sobre a forma como tinha corrido a aula, Sara respondeu timidamente que “tinha corrido bem”. Associou o correr bem ao comportamento dos alunos porque esta era uma turma algo complicada:

Hummm! Correu bem... No início com algum barulho, mas nesta turma é uma característica deles! No início não estavam logo a trabalhar. Passados aqueles 15, 20 minutos iniciais acalmam e depois trabalham! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 12/06/12)

Sara ficou algo surpreendida com algumas conclusões a que chegaram porque a sua expectativa em relação a estes alunos não era muito grande:

Algumas conclusões surpreenderam-me pela positiva. Houve algumas dificuldades, mas eu acho que faz parte! E a exploração da tarefa decorreu como eu tinha previsto. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 12/06/12)

Quando questionada sobre as várias fases de modelação e se os alunos tinham conseguido passar por todas elas, Sara aproveitou a ocasião para relatar momentos em que sentiu dificuldades por parte dos alunos e referir o seu papel durante esse processo. Começou por enfatizar que os alunos reconheceram facilmente a situação real e a partir daí narrou episódios para cada fase de modelação matemática. Sara atribuiu o sucesso da construção do modelo real ao facto de ter optado, tal como foi acordado em trabalho colaborativo, por apresentar um exemplo introdutório a estes conteúdos, que facilitasse o percurso dos alunos:

Sim, conseguiram chegar ao modelo real, porque eu tinha dado o exemplo anteriormente e eles conseguiram construir a nuvem de pontos. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 12/06/12)

A passagem do modelo real para o modelo matemático foi feito intuitivamente e com base no exemplo dado. A construção desse modelo e a sua testagem foram as fases apontadas por Sara como sendo mais problemáticas:

Chegaram ao modelo, mas alguns não perceberam que tinham chegado. Ou seja, eles construíram com base no exemplo que tinham visto, porque eu tive que dar um exemplo senão era difícil para eles, e não foi imediato para eles o que era o x e o y ! Eu tive mesmo, em muitos grupos, que dizer: “estás a ver o peso está no eixo do x , foi por isso que eu vos disse para colocar o nome das variáveis nos eixos...” estás a ver o peso é o x e o y é o número do sapato, então de que forma é que podes pôr o peso de modo a que percebas o que é que isto traduz? (refere-se ao significado das variáveis na reta de regressão). Tiveram bastante dificuldade em perceber que a reta traduzia a situação que eles estavam a ver. Eles percebiam que os pontos traduziam e aí mais ou menos pelo meio dos pontos eles iam ver a relação do peso com a altura. Alguns grupos tiveram dificuldade em perceber que a reta era o que traduzia a situação e diziam o valor aproximado.

Sim conseguiram testar. Esta parte foi bem conseguida, no final, porque ajudei, como substituíam, depois de começarem a perceber. A primeira pergunta foi a que levou mais tempo, demoraram 15 a 20 minutos a tentarem perceber”. O que é que eu vou fazer com isto?” Depois fez-se luz e perceberam o que era o x e o y e como é que se vai fazer. Eles perceberam e viram que o que podia ser ou não. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 12/06/12)

A forma como falou durante a entrevista de reflexão pós aula revelou preocupação relativamente à forma como os alunos estavam a usar a equação do modelo de regressão linear para prever resultados. A maneira como relatou que conduziu a aula no sentido de ultrapassar as dificuldades dos alunos evidenciou robustez relativamente à forma como sabe conduzir uma aula. Sara referiu que os alunos conseguiram interpretar os resultados e apontou algumas dificuldades que surgiram na construção do modelo real (tabelas) e que tiveram de ser reajustados, pois caso contrário o modelo matemático não estaria correto:

Conseguiram interpretar e validar e houve alguns reajustes com os alunos que começaram a fazer (ela refere-se à construção da tabela no EXCEL antes da construção da nuvem de pontos) com o número de aluno e o número de sapato e então aí houve reajustes, mas pronto chamámos à atenção e fui ao pé deles e “vamos que não pode ser isto porque vocês

relacionaram as colunas erradas!” (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 12/06/12)

Sara mencionou que o envolvimento dos alunos, tanto a nível matemático, como ao nível do empenhamento e motivação foi bastante satisfatório, mostrando-se satisfeita com a aula:

A nível matemático é hummm... satisfatório! Eu acho que foi bastante satisfatório na parte final. Acho que eles no início não têm muita vontade de começar, mas assim que estão dentro da tarefa ficam muito motivados e trabalham. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 12/06/12)

Sara acrescentou que o facto de conhecerem a situação real, os alunos conseguiram interpretar melhor e tirar melhores conclusões:

Acho que faz alguma diferença se conhecerem a situação real! Eles têm interesse pelos contextos reais, são valores reais e estão num contexto e percebem muito melhor o seu significado! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 12/06/12)

Esta consciencialização por parte da professora no reconhecimento da importância dos contextos na interpretação de resultados matemáticos revelou que sabe que deverá ter este aspeto em conta no futuro.

Síntese

Segue-se uma síntese do conhecimento para ensinar Estatística que Sara revelou na preparação, condução e reflexão desta tarefa de modelação, distinguindo-se os diferentes tipos de conhecimento.

Iniciando com o conhecimento comum matemático, Sara parece estar segura relativamente a maior parte dos conceitos, mas não a todos. A professora revelou um uso não consistente do termo tipo de correlação, quando queria referir-se ao estudo do grau da intensidade de associação linear entre duas variáveis estatísticas. Note-se que o uso de conhecimento matemático comum é essencial na fase de construção do modelo matemático e matematização, embora afete de forma determinante a fase de interpretação dos resultados do modelo. Se a construção do modelo matemático não for bem realizada, ou se, as previsões a partir desse modelo não forem corretas devido a uma incorreta manipulação da equação do modelo de regressão, poderá comprometer a validade dos

resultados matemáticos e as interpretações não serem as esperadas. No entanto, o conhecimento do contexto pareceu vir em auxílio para que as interpretações realizadas sejam corretas, pois mesmo que a equação do modelo de regressão não seja trabalhada corretamente e existam erros de cálculos, se a realidade ou contexto for conhecida, é mais fácil perceber se aqueles resultados são possíveis. Será mais fácil identificar possíveis erros de cálculo, se o modelo é ou não o mais adequado, ou ainda quais são os limites desse modelo matemático, tendo em conta o contexto.

No que diz respeito ao conhecimento comum não matemático, Sara revelou neste caso um bom domínio, conhecendo detalhes da realidade a estudar. Isto ficou a dever-se ao facto de, em momento anterior, ter havido contacto com o terreno. Este conhecimento da realidade permitiu pensar numa forma de operacionalizar a recolha de dados reais, levando à construção de instrumentos de registo e recolha de dados de acordo com todas as atividades desportivas planificadas pelos alunos de Sara. Desta forma, Sara demonstrou ter um bom domínio sobre a área profissional dos seus alunos, pesquisando, informando-se junto deles e dos professores das disciplinas técnicas, a fim de compreender os jogos que pretendiam preparar e quais os conhecimentos que deveriam ter sobre as crianças da amostra, antes de criarem os jogos da gincana. Esta informação e conhecimento permitiram transpor os dados para a sala de aula, compreendendo a situação, tornando mais simples construir modelos reais e matemáticos.

No que concerne ao conhecimento especializado matemático, foi notória alguma inexperiência na abordagem destes conteúdos em sala de aula. A professora, apesar de dispor de vários dados reais que poderia ter usado como exemplo para fazer uma primeira abordagem às distribuições bidimensionais, preferiu usar um exemplo de um manual para lecionar este tema. A professora em variadas ocasiões referiu-se a tipos de correlação, quando queria indagar os alunos sobre a possível associação entre duas variáveis. A associação dá-nos informação, a partir da representação prévia dos dados (quanto à forma e direção) a relação entre duas variáveis (linear ou não) e a correlação analisa e mede o grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis quantitativas. Esta linguagem algo confusa, relacionada com o conhecimento comum matemático evidenciado, pois para ela associação e correlação pareceu significar o mesmo, interferiu na forma como questionou os alunos e formulou as questões, evidenciando alguma fragilidade do conhecimento especializado matemático. Os alunos ficaram com a ideia que correlação e associação entre duas variáveis é a mesma coisa. Sara não conseguiu prever que o modelo matemático poderia ser refutado e, como tal, nem no enunciado da

tarefa, nem durante a aula, colocou questões que levassem à procura de um outro modelo eventualmente mais adequado. Neste caso, revelou inexperiência na gestão deste tipo de situações. No entanto, durante a realização da tarefa e condução desta aula, Sara teve muitos momentos em que evidenciou demonstrar como colocar questões e que recursos usar para a construção dos modelos reais e matemáticos, assim como para a testagem do modelo.

Por último, o conhecimento especializado não matemático evidenciado por Sara revelou-se robusto, pois o conhecimento da realidade permitiu, a partir dos contextos reais, pensar em questões adaptadas e contextualizadas, assim como em recursos para levar os alunos a serem bem-sucedidos. Para isso, recorreu ao EXCEL, para que, o trabalho matemático dos alunos fosse melhor desenvolvido. Para além disso, pensou em questões que os ajudou a refletir como organizar os dados, nomeadamente em tabelas e gráficos. Este conhecimento da realidade foi crucial na interpretação dos resultados matemáticos obtidos, permitindo-os criticar de forma mais sustentada. Para além disso, o conhecimento da realidade permitiu compreender se o modelo matemático construído era adequado ou não para qualquer outra amostra.

Em suma, o conhecimento não matemático veio muitas vezes em auxílio do conhecimento matemático, evitando de certa forma, que os conceitos estatísticos se tivessem manifestado e sido abordados com menor sucesso. Sem se aperceber, Sara usou uma linguagem algo confusa. No entanto, o conhecimento não matemático permitiu que os alunos compreendessem o que a professora pretendia que investigassem com esta tarefa. Embora não tivessem aprendido como usar corretamente os termos associação e correlação, perceberam o que era para estudar e conseguiram interpretar resultados. Tendo em conta as dificuldades evidenciadas e que passaram despercebidas por parte Sara, podemos dizer que o conhecimento matemático denotou alguma fragilidade.

A segunda tarefa de modelação: “Os magricelas rápidos e saltitantes ou...talvez não!”

Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação

Esta tarefa é a segunda de modelação e surgiu a partir da recolha de dados dos questionários, dos jogos da gincana e das conjeturas e hipóteses que os alunos fizeram a partir das observações diretas da realidade vivenciada. Foram os alunos que se envolveram na problemática, e durante a realização da gincana, Sara foi ouvindo várias suposições e conjeturas que os alunos foram dizendo de forma muito informal:

Aproveitei algumas coisas que ouvi na gincana e que me pareceram giras, porque os alunos mesmo sem saberem o que iam fazer de forma informal estabeleceram relações e ouvi coisas do género: os mais pesados não saltam tanto e nem correm tanto! Achei giro, experimentei se dava origem a algo que eu queria e aí está a tarefa! (Entrevista pré aula, 14/06/12)

O objetivo desta tarefa foi abordar os vários tipos de associação linear possíveis entre duas distribuições estatísticas recorrendo à modelação matemática. A tarefa foi estruturada com o propósito de todas as fases do ciclo de modelação emergirem e dar destaque à realidade. A professora procurou, a partir da mobilização do conhecimento não estatístico dos alunos, que estes compreendessem e aprendessem conteúdos estatísticos e conseguissem ser capazes de lhes dar sentido:

Esta tarefa foi construída para ser uma continuação e também para ser um aprofundamento sobre o conhecimento que eles têm sobre as distribuições bidimensionais. Eu experimentei as conjeturas em casa e achei que seriam boas para chegar aquilo que eu quero e que aprendam: tipos diversos de sinal de correlação linear: positivo, negativo e nulo. Acho que a partir disto vão perceber! (Entrevista pré aula, 14/06/12)

As conjeturas que surgiram e que deram origem à criação da tarefa foram: “O peso provavelmente influencia a corrida... acho que os mais pesados devem demorar mais tempo!”, “O peso pode influenciar o número de saltos dado pelos alunos... os mais leves talvez saltem mais vezes...” e “Acho que o tamanho do pé está relacionado com a altura!”

Para esta tarefa foram necessários os dados dos questionários e os que foram recolhidos na gincana. Relativamente aos questionários, a informação já estava organizada numa tabela por questão e número da criança e, os dados da gincana eram os das tabelas originais. Sara pensou em fornecer esses dados e serem os alunos a reorganizar

essa informação, retirando os dados essenciais. Aproveitou os dados reais para averiguar que modelos matemáticos iria obter, qual o tipo de associação linear entre as variáveis e assim, levar ao estudo do grau da intensidade da associação linear entre cada par de variáveis, através do cálculo do valor do coeficiente de correlação linear. Para isso, construiu previamente as tabelas que relacionavam os pares de variáveis, investigou-os, e chegou aos três pares de variáveis acima referidas. Sara percebeu que deste modo conseguiria levar os alunos a chegarem a várias associações entre as variáveis, ao estudo do grau da intensidade da associação linear entre cada par de variáveis, obtendo, ao calcular o valor do coeficiente de correlação linear, um com sinal positivo, outro com sinal negativo e outro quase nulo. Assim, conseguiria avançar mais um pouco na leção dos conteúdos estatísticos:

Construi uma tabela no EXCEL para cada par de variáveis que tinha ouvido das conversas dos miúdos. Eu queria chegar a três tipos de sinal do coeficiente de correlação linear e fui testando. Construi vários diagramas de dispersão e umas davam outras nem tanto. As que se aproximavam mais do modelo linear foram as que referi e numa delas, a nuvem de pontos, aparecia muito dispersa... não digo já qual é para ser surpresa para ti! Achei interessante e construí a tarefa nesse sentido. (Entrevista pré aula, 14/06/12)

A construção da tarefa

Sara introduziu imagens e usou diálogos que tinha ouvido entre alunos, no dia em que recolheram os dados, de modo a mobilizar de imediato a atenção dos alunos. Esses diálogos retratam as conjecturas estabelecidas pelos alunos e que Sara quis aproveitar para introduzir novos conceitos inerentes às distribuições bidimensionais.

Como já foi referido, Sara construiu previamente as tabelas que relacionavam os pares de variáveis e chegou aos três pares de variáveis acima referidas. Neste sentido, colocou questões no enunciado da tarefa que conduziram os alunos à construção dos vários modelos reais (questões um e dois da tarefa).

Sara percebeu que com estes três pares de variáveis conseguiria levar os alunos a chegarem por eles ao estudo do grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis (correlação). Estas relações também serviram para os alunos percebessem se estes jogos seriam ou não adequados a esta faixa etária e desta forma, em organizações futuras de eventos desportivos, os alunos do profissional poderiam readaptar e reajustar. Sara descreveu como chegou à criação da tarefa no excerto da entrevista pré aula, já referido no ponto anterior. Ao colocar questões específicas, pretendeu que os alunos

construísssem o modelo matemático e conduziu-os nesse sentido, estruturando bastante as questões de modo a cumprir esse objetivo (questões três e quatro):

Eu estruturei a tarefa de modo a que obtivessem três modelos de regressão linear. Eu quero que eles percebam que a correlação pode ser positiva, negativa ou ainda nula. (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Nesta questão, entende-se que existe alguma terminologia menos correta. O que Sara pretendia saber era se, tendo em conta o sinal do valor do coeficiente de correlação linear obtido, se a associação linear entre as variáveis era positiva, negativa ou pouco clara e consequentemente, e analisando a intensidade desse valor, se essa era forte ou fraca.

A fase de testagem (obtenção de resultados) foi pensada no sentido de serem colocadas, no enunciado da tarefa, questões que levassem os alunos a trabalhar matematicamente e utilizassem conhecimentos matemáticos. A questão cinco, levou à testagem e previsão de resultados a partir dos modelos de regressão linear obtidos.

Sara, com esta questão pretendeu recorrer às equações das retas de regressão linear para modelar os dados e fazer estimativas para o valor de uma variável, conhecido o valor da outra:

Numa das questões eu peço estimativas para que usem as equações das retas do modelo linear. Eu quero que substituam e percebam onde vão substituir os valores que eu dou (...). (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Na formulação escrita da questão seis, a professora pretendeu que os alunos criticassem e interpretassem os resultados no contexto real (quinta fase do ciclo de modelação):

Quero que entendam o que estão a obter e sejam capazes de interpretar os resultados. Ao obterem valores a partir da equação da reta de regressão linear, eu quero que critiquem e comparem com o que conhecem, isto é, se os valores fazem ou não sentido. (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Na formulação escrita da última questão, Sara apelou à comparação dos resultados obtidos com os diálogos presentes no início da tarefa. A professora teve por objetivo principal que os alunos refletissem sobre a validade dos modelos e apresentassem justificações que confirmassem ou não as conjecturas iniciais (última fase do ciclo de modelação):

Por último eu pensei numa questão que os faça pensar sobre a validade das conjecturas inicialmente estabelecidas e que eu coloquei no início da tarefa. Espero que entendam se os modelos são bons ou não e se as conjecturas são ou não verdadeiras. (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Planificação da aula

Sara preparou a tarefa para explorar em uma única aula de 90 minutos com a seguinte sequência: leitura da tarefa: 10 minutos; questão 1: 10 minutos; questão 2: 10 minutos; questão 3: 10 minutos; questão 4: 10 minutos; questão 5: 20 minutos; questão 6: 15 minutos. Sara não apresentou na sua planificação o tempo destinado à discussão da tarefa.

Quanto aos recursos que teve necessidade de usar para a criação da tarefa, Sara referiu-se à tabela com dados recolhidos dos inquéritos e da gincana e ao EXCEL.

Para esta tarefa, os alunos foram organizados em grupos de quatro, tal com já o tinha feito na aula de modelação anterior: “Os alunos continuam nos mesmos grupos” (Entrevista pré aula, 14/06/12).

Sara explicou que usou dados reais recolhidos pelos alunos na gincana e questionários aos encarregados de educação e com objetivo de continuar a estudar as distribuições bidimensionais e os vários tipos de associação que podem surgir:

Esta tarefa foi construída como base para ser uma continuação e também para ser um aprofundamento sobre o conhecimento que eles têm sobre as variáveis bidimensionais (...) e agora vamos ver e estudar os tipos de correlação linear: positivo, negativo ou casos em que é nulo. A situação é real, eles recolheram os dados numa situação criada por eles que foi a gincana! (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Durante a entrevista, Sara deu indicações sobre as relações entre os vários pares de variáveis estatísticas que surgiram durante a gincana e que usou nesta tarefa. As variáveis que surgiram nesta tarefa foram: o peso e os tempos do segundo *sprint*; a altura e o número de calçado das crianças selecionadas para a amostra; o peso e o número de saltos alcançado pelas crianças no jogo “*Canguru maluco*” e os conteúdos estatísticos que emergiram foram: o diagrama de dispersão, o modelo matemático associado à regressão linear, interpretação do sinal do coeficiente de correlação linear como medida do grau de associação linear entre duas variáveis, ideia de reta de regressão linear como forma de modelar os dados e obter uma estimativa para o valor de uma variável, conhecido o valor de outra:

Investigadora: Quais as variáveis estatísticas que vão ser estudadas?

Sara: Neste caso são várias... ahhhh! O peso, vamos relacionar os saltos do canguru, os sprints... várias coisas!

Investigadora: Que conteúdos estatísticos vão emergir?

Sara: Distribuições bidimensionais, correlação, coeficiente de correlação...vários tipos de correlação linear. (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Foi referido que a tarefa estava bastante estruturada porque tinha um objetivo muito claro e pretendia que os alunos ficassem com conhecimento relativamente à existência de vários tipos de associação linear entre variáveis estatísticas:

Investigadora: A tarefa está muito ou pouco estruturada?

Sara: Está tarefa está bastante estruturada! A estrutura foi decidida em reunião... nós pensamos em conjunto nesta segunda tarefa e com o objetivo de chegarmos a estes três tipos de correlação. Pensamos no ciclo de modelação e o que eu fiz foi adaptar a estrutura combinada entre todas as estas variáveis e alunos. Eu pensei na tarefa e estruturei bastante, porque eu quero que eles passem por todas as fases e construam três modelos de regressão linear para não ficarem com a ideia que tudo se relaciona e de forma positiva. Vamos ver o que dá! (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Sara demonstrou compreender que por vezes os alunos consideram apenas a existência de associação entre duas variáveis, quando o sinal do coeficiente de correlação linear é positivo, rejeitando a associação inversa como algo pouco aceitável. Na tarefa anterior, Sara tinha feito o estudo para um par de variáveis cuja associação era linearmente positiva. Para evitar que os alunos ficassem com essa perceção, esta tarefa foi construída no sentido de clarificar essa questão.

Para Sara, esta tarefa foi pensada por um lado, como um ponto de partida para levar ao estudo da interpretação do sinal do coeficiente de correlação linear e por outro lado como consolidação e aprofundamento sobre o conteúdo modelo de regressão linear, surgindo como uma continuidade do que já foi feito na tarefa de modelação anterior:

Investigadora: Qual é o objetivo da tarefa? Como ponto de partida para levar a novo conhecimento ou é uma tarefa de consolidação de conteúdos?

Sara: (...) é um ponto de partida para outros sinais de correlação. É mais abrangente que a tarefa anterior, mas também é consolidação daquilo que eles já sabem. (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Sara disse que esta tarefa foi criada com o objetivo de passar por todas as fases de modelação. Desta forma, os alunos estariam envolvidos na aprendizagem e consolidação

dos conteúdos estatísticos ao usarem a Estatística como ferramenta útil e necessária para a interpretação do real:

Tive o cuidado de criar questões que os fizesse passar por todas fases.
(Entrevista pré aula, 14/06/12)

Sara estruturou a tarefa no sentido de levar os seus alunos a analisarem os dados e a construírem vários modelos matemáticos (regressão linear) e a refletirem sobre os resultados que estavam a obter.

Investigadora: Como planificou esta aula? O que teve em conta e como a estruturou?

Sara: Deixei mais tempo para a testagem dos vários modelos e conclusões porque acho que é necessário. Aí é que dá para ver se percebem o que estão a fazer! (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Sara, na planificação que apresentou, indicou que antevia algumas dificuldades durante a implementação da tarefa: dificuldades em recorrer ao EXCEL para representar o diagrama de dispersão e a reta de regressão linear; dificuldades em responder às perguntas de validação do modelo matemático. Durante a entrevista pré aula, Sara apontou outra dificuldade esperada e que estava relacionada com a gestão do tempo. A professora confessou que talvez a tarefa fosse longa:

Espero que eles não tenham grandes dificuldades, tenho receio de não conseguir gerir bem o tempo para fazer tudo. Se calhar está um bocadinho grande! É isso é que eu tenho receio. (Entrevista pré aula, 14/06/12)

Na sua planificação sugeriu algumas estratégias que previu para atenuar as dificuldades previstas: esclarecer dúvidas e circular pelos grupos; ajudar a trabalhar com o EXCEL e fazer questões dirigidas.

A condução da aula

Sara distribuiu as tabelas de registo das pontuações dos jogos da gincana e necessárias para a realização desta tarefa e o enunciado da segunda tarefa de modelação sobre as distribuições bidimensionais, para que de imediato começassem a trabalhar. A professora dirigiu-se à turma e em pouco tempo disse o que pretendia com esta tarefa:

Esta tarefa é semelhante à anterior, só têm de ir seguindo o que eu vou solicitando e não se esqueçam de todas as justificações, e é para fazer com recurso ao EXCEL! (Aula de Sara, 14/06/12)

Construção da representação real: Os alunos mobilizando o conhecimento extra matemático, estabeleceram relações entre os vários pares de variáveis. Essas relações foram entre as variáveis: “peso-tempo do 2º sprint”, “peso-número de saltos” e “altura-tamanho do sapato”. Nesta tarefa o objetivo era que os alunos obtivessem como modelo matemático a equação do modelo de regressão linear e para cada par de variáveis determinarem e interpretassem os respetivos valores dos coeficientes de correlação linear, tendo em conta o contexto real.

Sara pensou numa forma de ensinar estes conteúdos aos alunos, atribuindo importância aos dados recolhidos e apelando ao reconhecimento da situação real, como uma forma de os conduzir à construção da representação real.

Sara colocou, na tarefa, uma foto que foi tirada no dia da recolha de dados (gincana).



Figura 30: Registo fotográfico do dia da gincana

Assim, os alunos reconheceram os diálogos havidos entre eles e transcritos pela professora. O facto de Sara ter colocado uma foto sobre o dia da gincana, fez com que os alunos de imediato se entusiasmassem com a tarefa e reconhecessem a situação. Para além disso, na parte introdutória da tarefa, introduziu diálogos havidos entre os seus alunos de modo a que o reconhecimento da situação fosse imediato:

Sara: Então, já viram essa foto? Não vos faz lembrar nada!

Aluno: Sim, prof! São os miúdos do nosso grupo! Tá fixe!

Sara: E já leram a tarefa? Não reconhecem mais nada?

Aluno: Olha, são outra vez as nossas conversas! As professoras andaram tipo polícias a ver o que fazíamos ou dizíamos!

Sara: É para vocês verem que tudo o que fazem é alvo de registo e pode ser aproveitado para a Matemática! (Aula de Sara, 14/06/12)

Construção do modelo real: Sara conseguiu que, ao estabelecerem relações com a realidade (mobilização do conhecimento extra matemático), a conjectura apresentada na tarefa, parecesse possível aos alunos, conduzindo-os à necessidade de organizar os dados em tabelas, com a finalidade de serem trabalhados em sala de aula (modelo real).

Os alunos ao reconhecerem as relações entre as variáveis estatísticas, que surgiram a partir da mobilização do conhecimento extra matemático passaram de imediato à construção do modelo real. A partir das tabelas de registo elaboradas com base nos questionários e nas tabelas de registo das pontuações dos jogos, os alunos passaram a construir o modelo real, que consistiu na organização dos dados em tabelas, em EXCEL e dos respetivos diagramas de dispersão. Estas tabelas permitiram levar os dados reais para a sala de aula e começarem a construção do modelo real. Sara pretendeu que os alunos percebessem se estes se adaptavam ou não aos dados reais, isto é, se as tabelas traduziam realmente os dados e se os gráficos pareciam adequados, isto ainda antes de construírem os modelos de regressão linear e calcularem os valores dos coeficientes de correlação linear. A professora dirigiu-se à turma, no sentido de chamar a atenção para a forma como poderiam estar a construir as tabelas referentes a cada par de variáveis, pois nem todas as crianças tinham os dados completos, porque umas não tinham estado presentes no dia da gincana e outras não tinham todas as respostas dadas às questões dos questionários. Relativamente a esta situação, Sara interveio:

Sara: Meninos, lembram-se da tabela da outra tarefa? Não tiveram que eliminar linhas no caso de não terem os dados completos das crianças?

Tenham cuidado, porque aqui é igual!

Alunos: Tá!

Aluno: Já tinha reparado! Eu já eliminei o que não estava completo!

Sara: É isso mesmo! (Aula de Sara, 14/06/12)

Os alunos, com essas indicações, facilmente chegaram aos modelos reais exemplificados a seguir, obtidos por alguns alunos:

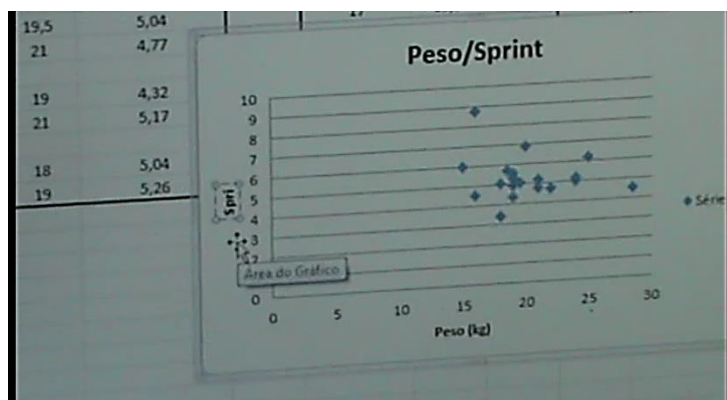


Figura 31: Diagrama de dispersão obtido por um dos grupos, com recurso ao EXCEL, referentes às variáveis peso e 2º tempo do sprint (14/06/12)

Sara ao ter este tipo de preocupações relativamente às primeiras fases de modelação matemática, evidenciou dar importância relativamente à forma como organizou a recolha de dados. Surgiram algumas dificuldades ao nível da representação dos números decimais na tabela em EXCEL. Sara alertou os seus alunos para o facto de que no EXCEL têm que usar vírgula em vez de ponto:

Aluno: Podemos pôr pontos?

Sara: Atenção a todos! No EXCEL os pontos nos números decimais não funcionam! Coloquem vírgula! (Aula de Sara, 14/06/12)

Esta intervenção impediu os alunos de poderem vir a construir modelos matemáticos errados.

A professora construiu a tarefa e planificou-a no sentido de levar os alunos a refletirem sobre a análise dos dados a partir dos modelos reais construídos. A formulação escrita da questão quatro exemplifica o pretendido.

Sara colocou questões (questão 3) logo após a construção do diagrama de dispersão que permitiram tirar algumas conclusões acerca da associação linear entre variáveis, tendo em conta o aspeto do diagrama de dispersão e sinal do valor do coeficiente de correlação linear existente (a serem comprovadas posteriormente aquando da construção do modelo matemático).

Construção do modelo matemático: À semelhança do que já tinham feito anteriormente, selecionaram no EXCEL a linha de tendência linear, a equação do modelo de regressão linear e o valor do r^2 . Ao mobilizarem conhecimento extra matemático,

passaram dos modelos reais à construção dos modelos matemáticos. Os modelos matemáticos obtidos foram:

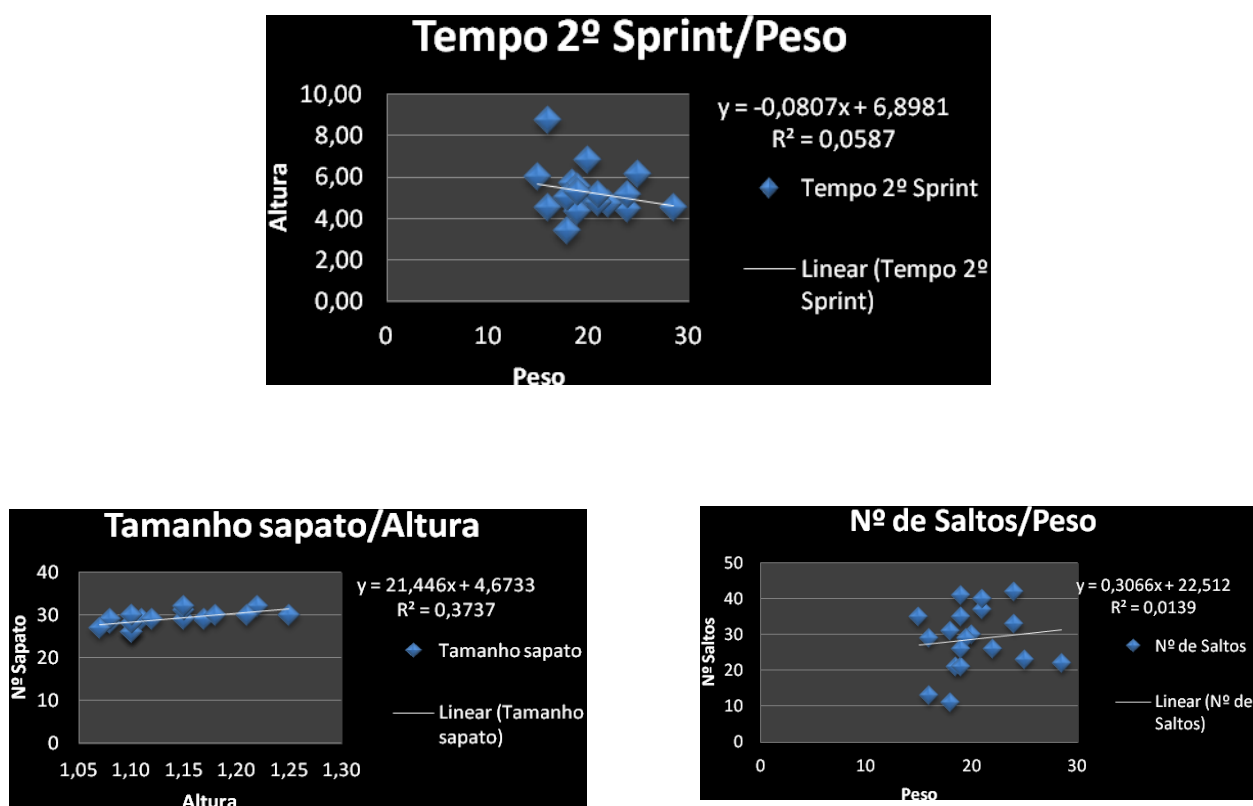


Figura 32: Modelos matemáticos obtidos, por um grupo de alunos, para os três pares de variáveis (14/06/12)

Os alunos calcularam o coeficiente de correlação linear. Numa das questões Sara solicitava a interpretação desse valor, quanto ao sinal e intensidade, revelando a importância que dá aos contextos. Alguns alunos solicitaram ajuda da professora no sentido de conseguirem responder às questões que sucediam à construção do modelo matemático e onde Sara pedia a interpretação do valor do coeficiente de correlação linear:

Aluno: Professora, chegue aqui por favor! Quando é que a relação era considerada forte?

Sara: Quando é que é forte? Já calculaste o valor do coeficiente de correlação de todos os conjuntos de variáveis?

Aluno: Sim!

Sara: É forte quando esse valor é superior a 0,5 e inferior a 1, no caso de ser positiva claro! No caso de ser 1, é perfeita.

Aluna: Professora há uma delas que é muito fraquinha!

Sara: Sim, há uma delas que é muito fraquinha! Identifiquem todos os pares de variáveis e relacionam o valor do coeficiente de correlação com aquilo que conhecem da situação real e o que observam a partir do diagrama de dispersão.

Aluno: (dirige-se à colega) Eu acho que nessa não há correlação, o r^2 é quase zero!

Sara: Registem tudo e justifiquem bem! (Aula de Sara, 14/06/12)

A construção dos modelos matemáticos fez-se facilmente, devido à estruturação da tarefa. A professora na primeira tarefa solicitou o modelo matemático (regressão linear) e nesta também pediu a regressão linear, mas com uma evolução: para os três pares de variáveis, os alunos iriam obter valores do coeficiente de correlação linear com sinais distintos. Sara evidenciou saber exatamente o que queria ensinar e como levar os alunos a conseguirem chegar à aprendizagem desses conteúdos, respeitando o conhecimento prévio destes.

Obter resultados matemáticos: À semelhança da outra tarefa, e tal como foi acordado em reuniões de trabalho colaborativo, foram introduzidas questões que permitiram testar os modelos matemáticos obtidos. Na formulação escrita da quinta questão, Sara apelou à previsão de resultados tendo em conta o modelo matemático obtido para os vários conjuntos de dados. Desta vez, os alunos não apresentaram tantas dificuldades, uma vez que usaram os modelos matemáticos que construíram para fazerem previsões. A professora, nesta fase, foi solicitada junto dos alunos, no sentido de validar que estavam a fazer corretamente as substituições dos valores fornecidos pela professora, nos modelos matemáticos. Notou-se ainda uma certa insegurança quanto à interpretação do significado do x e do y. Sara interveio no sentido de questionar os alunos, acerca do significado do eixo dos xx e do eixo dos yy, para que eles conseguissem entender onde deveriam substituir, e assim, conseguirem fazer previsões e chegarem a resultados matemáticos. Relativamente à primeira alínea da questão 5, foi notória, no excerto de aula que se segue, essa necessidade de validação por parte dos alunos e o tipo de condução que a professora fez:

Aluno: Professora, nesta aqui... metemos o 1,34 no x, não é?

Sara: Sim!

Aluno: E depois é para dar a previsão, não é? E fazemos o mesmo tipo de raciocínio no resto? Nas outras é a mesma coisa?

Sara: Na outra alínea, tens de ver o que estão a relacionar! É o quê?

Aluno: O Sprint com o peso!

Sara: O Sprint com o peso... então onde é que têm o modelo?

Aluno: Nós fizemos isto assim! (Mostra o modelo)

Sara: O que é que se pretende saber?

Aluno: Queremos uma previsão do tempo de *sprint*!

Sara: E isso é o quê? x ou y ?

Aluno: É o x e queremos saber o y . É só substituir e ver se faz sentido... não é?

Sara: O que é isso de fazer sentido?

Outro aluno: É percebermos se no contexto esses resultados podem ser ou não!

Sara: E como é que sabem se podem ser ou não?

Aluno: Então... já temos os dados de referência e sabemos que são crianças... se der 80 Kg não pode ser... porque

Outro aluno: Porque crianças de 4/5 anos não têm 80 Kg... dá para perceber não é setora?!

Sara: Então testem, escrevam as conclusões e respondam à questão seguinte! (Aula de Sara, 14/06/12)

Interpretação dos resultados matemáticos: Sara, no enunciado da última alínea da quinta questão, questionou os alunos se, no caso do modelo que relacionava o peso com o número de saltos, era possível fazer uma estimativa do número de saltos sabendo o peso. Colocou essa questão porque sabia que a associação linear entre estas duas variáveis não era clara e esperava que os alunos respondessem que nem valia a pena usar o modelo para fazer estimativas porque o valor do coeficiente de correlação linear era muito próximo de zero. No final da aula e junto a um dos grupos, Sara interveio em voz alta:

Sara: Então, já fizeram a previsão para a última alínea da questão 5?

Aluno do grupo perto da Sara: Não setora... é só dizer que não!

Aluno de outro grupo: Professora, não é para substituir no modelo com o y e o x ?

Aluno do grupo perto da Sara: Eu acho que não é preciso... não há relação, para quê ir fazer essas contas?

Outro aluno: Pois é tens razão... os pontos até estão todos dispersos! Mas podemos só fazer para ver o que dá?

Sara: Podem e até podem testar para outros valores do peso! Mas, basearam-se só na dispersão dos pontos do gráfico para dizer que não há relação entre as variáveis?

Aluno: O tal r é próximo de zero!

Sara: Boa e isso significa o quê?

Alunos: Se estiver próximo de zero ou zero não há quase relação nenhuma ou nula!

Um aluno: Mas, não vamos testar para 50 Kg por exemplo?

Sara: Não?! Porquê?

Aluno do grupo perto da Sara: Na outra aula vimos que se testássemos para adultos o valor obtido não fazia sentido!

Sara: Porquê?

Um aluno: Porque os modelos foram feitos para esta amostra de crianças... se tivéssemos dados com adultos dava outro modelo... é isso?

Sara: Todos concordam?

Alunos: Sim!

Sara: Registem as vossas conclusões! (Aula de Sara, 14/06/12)

O objetivo era que os alunos refletissem sobre os resultados matemáticos obtidos e compreendessem se faziam ou não sentido na situação real. Mais uma vez e com esta pequena discussão, não planeada, em grande grupo, Sara conseguiu que os alunos entendessem quais eram as limitações do modelo matemático e que este era válido para crianças daquela faixa etária.

Validação do modelo matemático: A maior parte dos alunos, ao construir o modelo de regressão linear e ao estimarem valores a partir da reta de regressão linear, perceberam que esses valores só fariam sentido para crianças e não poderia ser usado para adultos. Com a discussão final, apresentada no excerto anterior, os alunos ficaram com a ideia que, caso não exista relação entre as variáveis, não fazia sentido usar o modelo matemático obtido para fazer estimativas. A professora conduziu os alunos a comparar o que obtiveram matematicamente com a realidade e conseguiram criticar os resultados. Não solicitou aos alunos e nem previu uma última questão onde estes fossem levados a construir um outro modelo matemático.

Reflexão imediata de Sara sobre a aula

Após a aula terminar e com o objetivo de recolher de forma imediata as reflexões de Sara sobre o decorrer da aula, foi realizada uma entrevista de curta duração. Sara, no início desta segunda aula de modelação, demonstrou satisfação relativamente ao sucesso desta. A sua satisfação estava relacionada com o facto de ela ter a perceção que cumpriu com o objetivo previamente estabelecido: os alunos compreenderem que a relação entre as variáveis pode ser direta ou inversa e a associação entre estas pode ser positiva, negativa ou pouco clara:

Em termos de trabalho só um dos grupos é que não a concluiu toda, foi mais uma gestão de tempo, porque eles estiveram um bocadinho a brincar e não a trabalhar. De resto, o objetivo foi cumprido e penso que todos os grupos chegaram ao modelo matemático e perceberam em que situação é que existe relação e situações em que não existe. Acho que correu bem! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 14/06/12)

Quando questionada sobre o que a tinha surpreendido, deu exemplo de algo que não estava relacionado com a aula, mas sim com o que deu origem à tarefa: pegar em algo que ouviu dos alunos e, com base nesses diálogos, verificarem se existiam relações entre as variáveis sugeridas. A sua surpresa esteve relacionada com o conhecimento extra estatístico dos alunos e das relações estabelecidas e, que deram origem depois de experimentação por parte da professora, a modelos matemáticos interessantes para levar para a sala de aula. Deste modo, aproveitou para dar maior relevância e profundidade ao estudo deste conteúdo estatístico:

O interessante e surpreendente foi que peguei em coisas dos alunos e fiz algo que nunca tinha feito. Aventurei-me a experimentar matematicamente essas possíveis relações e surpreendentemente percebi que podia usar para chegar onde queria, e com exemplos do dia-a-dia! Deu para arranjar três tipos de correlações lineares! Nunca tinha feito nada idêntico, sempre usei exemplos do manual e era quando fazia esta exploração! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 14/06/12)

Mais uma vez Sara referiu-se a três tipos de correlação linear, quando na realidade se queria referir ao estudo do grau da intensidade da associação linear que poderia existir entre duas variáveis, levando então a concluir que entre um par de variáveis existia uma associação linear positiva, outra uma associação linear negativa e a outra associação era pouco clara. Existiu alguma confusão com a terminologia, mostrando, mais uma vez, uso impreciso dos termos.

Sara foi questionada sobre as várias fases do ciclo de modelação e se os alunos conseguiram passar por todas as fases. A professora aproveitou a ocasião para relatar momentos em que sentiu dificuldades por parte dos alunos e referir o seu papel durante esse processo. Constatou que os alunos facilmente reconheceram a situação real e a partir daí conseguiram passar pelas várias fases do ciclo de modelação. Afirmou que o modelo real foi claramente construído, mas, no entanto, revelou alguma insatisfação quanto à interpretação do valor do coeficiente de correlação linear:

Reconheceram de imediato a situação e era o expetável! E sim, compreenderam a tarefa e passaram pelas várias fases. Tiveram alguma dúvida em compreender o que significa coeficiente de correlação e a interpretá-lo, porque houve alguma falta de atenção quando na aula anterior eu lhes expliquei os tipos de correlação. O modelo real foi imediato! Eu também direcionei e estruturei bastante a tarefa, pois tinha um objetivo claro! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 14/06/12)

Segundo Sara, a passagem do modelo real para o modelo matemático deu-se de uma forma automática e intuitiva, pois os alunos reproduziram nesta aula o que foi feito na tarefa anterior. É de lembrar que nesta tarefa Sara, tal como na anterior, solicitou o modelo matemático e como ela própria referiu, a tarefa estava estruturada nesse sentido:

Sim automaticamente. Como já tinham feito na última aula foi fácil encontrarem a função linear. Fizeram o que eu pedi na tarefa e então nem questionaram, foi intuitivo. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 14/06/12)

Indicou ainda algumas dificuldades sentidas, por parte dos alunos, na fase da testagem, que se deveram à dificuldade, já diagnosticada, relativamente à interpretação das variáveis explicativa e resposta, assim como relacioná-las com o r^2 e r constantes do modelo matemático obtido e se o valor que estavam a substituir estava ou não a ser substituído na incógnita correta. Segundo Sara, essa dificuldade já foi menor, uma vez que os alunos já o fizeram corretamente. No entanto, ainda revelaram alguma insegurança e solicitaram a sua ajuda para validarem o que estavam a fazer. Sara, tal como foi referido anteriormente, colocou questões no sentido de levar à clarificação dessa dúvida:

Sim, sim. Alguns grupos ainda continuam a ter dificuldade quanto ao que o x e o y significam, mas os outros já mais ou menos, facilmente o conseguem fazer. Notei que a dificuldade era mais para validar se estavam a substituir bem, eles estavam a fazer bem, mas chamavam-me para saber se o valor era do r . Eu aí perguntava o que significava o r , se o valor dado era dessa variável, e eles depois fizeram, conseguiram testar e perceber o significado do resultado obtido. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 14/06/12)

A professora mencionou que os alunos validaram os modelos matemáticos, perceberam e relacionaram com o aspeto dos diagramas de dispersão e, conseguiram mobilizar o conhecimento extra estatístico que tinham sobre as várias situações reais na interpretação dos resultados matemáticos. Sara explicou ainda que, no caso em os valores obtidos foram estranhos, os alunos conseguiram perceber e isso deveu-se ao facto de deterem conhecimento sobre as situações reais em estudo:

Validaram todos os casos e tenho a sensação que perceberam o significado dos resultados obtidos. Ao observarem os diagramas, se lhes tivesse dado resultados muito estranhos tenho a certeza que eles diriam à partida que não poderia ser. Isto também porque conhecem a situação real e conseguiriam entender o que faz ou não sentido. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 14/06/12)

Sara, durante a entrevista, mencionou que o envolvimento dos alunos, tanto a nível matemático, como ao nível do empenhamento e motivação foi bastante satisfatório, mostrando-se satisfeita com a aula. No entanto, e com ar preocupado, referiu que os alunos demonstraram ter algumas dificuldades associadas a ausência de pré-requisitos:

O trabalho matemático, o envolvimento é relativamente bom, mas alguns continuam a ter algumas dificuldades, mas deve-se mais a alguma falta de bases mais concreta. Mas estou contente porque estiveram sempre motivados e nunca disseram que não queriam fazer. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 14/06/12)

Síntese

Segue-se uma síntese do conhecimento para ensinar Estatística que Sara revelou na preparação, condução e reflexão desta tarefa de modelação, distinguindo-se os diferentes tipos de conhecimento.

Iniciando com o conhecimento comum matemático, recordei que nesta tarefa, este conhecimento diz respeito ao conceito de distribuição bidimensional, relação e vários tipos de associação linear entre variáveis, cálculo e interpretação do coeficiente de correlação linear e estudo do grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis e diagrama de dispersão. Sara parece estar segura relativamente à maior parte destes conceitos, mas não a todos. A professora revelou um uso não consistente do termo tipo de correlação, quando queria referir-se ao tipo de associação linear entre duas variáveis estatísticas. Referiu-se a três tipos de correlação linear, quando o que pretendia dizer era que a associação linear entre duas variáveis pode variar (positiva, negativa ou pouco clara).

No que diz respeito ao conhecimento comum não matemático observou-se que Sara revelou neste caso um bom domínio, conhecendo detalhes da realidade a estudar. Este conhecimento da realidade permitiu pensar numa forma de operacionalizar a recolha de dados reais, levando à construção de instrumentos de registo e recolha de dados de acordo com todas as atividades desportivas planificadas pelos alunos de Sara. Desta forma, observou-se que Sara demonstrou ter um bom domínio sobre a área profissional dos seus alunos, pesquisando, informando-se junto deles e dos professores das disciplinas técnicas, a fim de compreender os jogos que pretendiam preparar e quais os conhecimentos que deveriam ter sobre as crianças da amostra, antes de criarem os jogos da gincana. Esta informação e conhecimento permitiram transpor os dados para a sala de

aula, compreendendo a situação e assim ser mais simples construir modelos reais e matemáticos.

No que concerne ao conhecimento especializado matemático, foi notória alguma evolução relativamente à tarefa anterior na abordagem destes conteúdos em sala de aula. O conhecimento comum matemático evidenciado pela professora, relativamente a alguma fragilidade quanto a terminologia usada, interferiu no conhecimento especializado matemático, porque levou a que muitas vezes, durante a condução da aula e mesmo na forma como redigiu as questões da tarefa, ao uso de uma linguagem associada às distribuições bidimensionais menos correta. Persistiu nesta tarefa, a ideia que o tipo de correlação e tipo de associação entre duas variáveis é a mesma coisa. No entanto, durante a realização da tarefa e condução desta aula, Sara teve muitos momentos que evidenciou demonstrar como colocar questões, estruturando a tarefa com o objetivo de ensinar os conteúdos pretendidos, assim como conduzir a aula com intuito de levar à compreensão de significados, tais como as variáveis x e y .

Por último, o conhecimento especializado não matemático evidenciado revelou-se robusto, pois o conhecimento da realidade permitiu, a partir dos contextos reais, pensar em questões adaptadas e contextualizadas e em formas de ensinar como organizar os dados. O uso do EXCEL revelou-se uma mais-valia na compreensão das várias associações lineares que surgiram.

A terceira tarefa de modelação: “Encontrei o melhor modelo matemático”

Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação

Esta tarefa surgiu da necessidade de Sara ensinar que podiam existir outros tipos de associação entre duas variáveis estatísticas para além da associação linear. Ela teve por objetivo que os alunos compreendessem que a tendência dos pontos num diagrama de dispersão nem sempre segue uma reta, mas poderá ser uma curva. Nesse sentido, e tendo em conta todos os dados reais recolhidos, quer a partir da gincana, quer a partir dos questionários, Sara, mais uma vez, considerando diálogos e conjecturas estabelecidas pelos alunos, resolveu construir modelos matemáticos e perceber se alguns pares de variáveis levariam ou não a esse estudo. Quando questionada, na entrevista pré-aula, sobre a origem e objetivo desta tarefa, explicou:

A motivação da escolha foi desenvolver e estudar outros tipos de correlação que não apenas a linear! Eu quero que eles percebam que nem sempre a tendência entre variáveis segue uma reta. Mais uma vez, baseei-me no que ouvi dos alunos, nas diversas variáveis que surgiram e escolhi algumas relações estabelecidas pelos alunos para realizar o aprofundamento deste estudo. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

Neste excerto de entrevista, percebeu-se que Sara pretendia referir-se à provável associação não linear existente entre os pares de variáveis escolhidos.

Para além do que já foi referido relativamente ao que Sara desejava que os seus alunos aprendessem, o objetivo desta tarefa foi, à semelhança das outras, que os alunos passassem por todas as fases do ciclo de modelação e também um ponto de partida para aquisição de outros conteúdos:

Um ponto de partida para as várias regressões que existem, mas ao mesmo tempo quero que passem por todas as fases de modelação. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

A professora demonstrou saber quais os conteúdos que ia ensinar e a importância de transmitir aos seus alunos que a relação entre algumas variáveis poderá não ser a linear. Apesar do programa para o ensino profissional não dar destaque a outros modelos de regressão, Sara atribuiu importância ao ensino desse conteúdo, uma vez que os contextos proporcionavam essa abordagem:

Eu espero que eles construam vários modelos e não apenas o linear, que reflitam sobre a sua adequabilidade e escolham um que pareça melhor. Embora o programa não enfatize este aspeto, eu em colaboração com as minhas colegas, achámos interessante experimentar e ir mais além. Assim os alunos não irão ficar com a ideia que a única relação possível entre variáveis é a linear. Para além disso, o facto de ter dados reais pode levar a esta abordagem e à compreensão do que desejo. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

As variáveis estatísticas que surgiram foram: o tempo que demoram a fazer o primeiro e o segundo print e o número de acertos no jogo “*Em cheio nas latas*” e no “*Lança atira e acerta*”. As conjecturas que Sara usou foram as estabelecidas pelos alunos: “*Nos sprints, a primeira tentativa e a segunda tentativa são semelhantes!*” e “*Na gincana, os miúdos com melhor pontaria no jogo “Em cheio nas latas” também são melhores no “Lança atira e acerta”.*”

Para esta tarefa foram necessários os dados recolhidos na gincana. Sara analisou os dados referentes aos jogos “*Sprint*”, “*Em cheio nas latas*” e “*Lança atira e acerta*”. A professora recorreu à sua memória e algumas notas referentes a estabelecimento de relações no dia em que a gincana foi realizada. Sara, construiu previamente as tabelas que relacionavam os pares de variáveis e chegou a modelos matemáticos variados que poderiam suscitar discussão quanto à sua adequabilidade. A professora observou, em cada caso, a linha de tendência e achou que estas variáveis seriam um bom exemplo a explorar. Na entrevista pré aula, mencionou que fez a construção da tabela inerente aos pares de variáveis em estudo e foi verificar, com recurso ao EXCEL se conseguia ou não chegar a modelos matemáticos variados e se suscitaria discussão quanto à escolha do mais adequado. Teve o cuidado de construir modelos polinomiais porque sabia que os alunos não possuíam conhecimentos matemáticos que permitissem trabalhar com outros:

Eu fiz as tabelas, construí vários modelos, selecionei no EXCEL, várias opções na linha de tendência. Fiz só para as polinomiais porque os alunos não possuem conhecimentos matemáticos para explorar outro tipo de modelos. Foi muita na base de pensar numa tarefa que sirva para estudar outros tipos de regressão e peço mesmo para mostrar as várias curvas e no final escolher mesmo o melhor, tendo em conta, obviamente o que conhecem da situação real. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

A professora deu, à tarefa, um título alusivo à tarefa e introduziu uma imagem relacionada com o contexto real. Começou por apresentar o objetivo, indicar os conteúdos estatísticos que iriam surgir e os materiais necessários para a realização da tarefa. No objetivo, Sara explicou que os conteúdos estatísticos iriam surgir a partir dos contextos reais. Logo de seguida, fez uma introdução que permitisse compreender o propósito da tarefa e introduziu conjecturas possíveis entre as duas variáveis. Apresentou tabelas ilustrativas de como poderiam organizar os dados reais referentes às variáveis, e a partir daí, seguiram-se todas as questões baseadas não só no contexto real, como também no ciclo de modelação.

A construção da tarefa

Sara introduziu uma imagem que resultou do registo direto no dia da gincana, assim como diálogos que retrataram o tipo de relações que os alunos estabeleceram, ao mobilizarem o conhecimento extra matemático.



Figura 33: Registo fotográfico do dia da gincana

As questões que colocou, no enunciado da tarefa, tiveram o intuito de levar à construção de diversos modelos matemáticos e à interpretação e reflexão, tendo em conta a mobilização do conhecimento extra matemático, desses modelos e escolha do mais adequado.

Sara na formulação escrita da questão três, pretendeu conduzir os alunos a explorar, com recurso ao EXCEL, linhas de tendência (não necessariamente a linear) que pudessem adequar-se às nuvens de pontos. Sara, aproveitou a questão para solicitar o cálculo do coeficiente de correlação linear (termo usado pela professora).

Na entrevista pré aula e quando questionada sobre as fases do ciclo de modelação, Sara explicou que pretendia com esta questão levar os alunos a chegarem a vários modelos matemáticos. Esta fase, segundo ela seria a mais problemática, uma vez que os alunos nas outras tarefas já tinham construído um modelo linear e provavelmente a primeira opção seria esse modelo:

Eu tive o cuidado de, ao chegar a esta fase, pedir um estudo da tendência dos dados que não passasse pela escolha única e imediata do modelo linear. Eu quero que eles explorem outros tipos de correlação e observem bem a tendência dos pontos e tentem procurar outros modelos polinomiais. É provável que aconteça escolherem logaritmos, exponenciais e outros que o EXCEL permite e eu vou dizer para não experimentarem esses porque depois não sabem trabalhar com eles. Eu acho que como já estão habituados ao linear é esse que vão logo escolher, mas eu quero que olhem bem para o aspeto do gráfico e compreendam se a tendência é ou não linear. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

Na formulação escrita da quarta questão o objetivo foi levar os alunos a uma reflexão sobre a escolha de um modelo matemático. Ela pretendeu que, com base no valor do coeficiente de correlação linear (termo usado pela professora) e na observação direta

da nuvem de pontos, pensassem se havia ou não uma possível relação e que associação existiria:

Numa das questões eu questiono sobre o valor do coeficiente de correlação linear e como a partir da observação da tendência dos pontos se pode aferir acerca do tipo de correlação existente. E consequentemente escolher um modelo matemático. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

Neste excerto é notório o desconhecimento sobre o facto do coeficiente de correlação linear apenas medir o grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis estatísticas.

A formulação escrita da quinta questão surgiu após a escolha do modelo matemático e teve por objetivo levar à testagem e adequabilidade desse modelo. Sara, com esta estrutura de tarefa desejou que os alunos mobilizassem conhecimento extra matemático e interpretassem os resultados matemáticos comparando-os com a realidade:

As questões que coloquei na fase de testagem vai fazer-me perceber se os alunos escolheram o modelo só por escolher ou se conseguem interpretar os resultados a que chegam e se esses fazem algum sentido. Poderá haver modelos escolhidos que até poderão parecer inicialmente bons, porque a curva até segue a tendência dos dados, mas depois se experimentares para alguns valores não fazerem sentido nenhum. Eu quero que eles sejam capazes de criticar. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

Sara, com estas questões pretendeu recorrer aos modelos matemáticos obtidos para modelar os dados e fazer estimativas para o valor de uma variável, conhecido o valor da outra. Este tipo de abordagem teve por objetivo levar os alunos a identificarem a existência de covariação entre cada par de variáveis, tendo em conta também o que conheciam do contexto real.

Na formulação escrita da última questão, Sara apelou à comparação dos resultados obtidos com os diálogos presentes no início da tarefa. A professora pretendeu que os alunos refletissem sobre a validade dos modelos e apresentassem justificações que confirmassem ou não as conjecturas iniciais:

Por fim, pensei na última questão com o objetivo de relacionarem as conjecturas estabelecidas no início com todo o trabalho desenvolvido e me digam se os modelos são válidos e se sim, o que podem dizer sobre as conjecturas feitas. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

Planificação da aula

Sara preparou a tarefa para a explorar em uma única aula de 90 minutos com a seguinte sequência: leitura da tarefa: 10 minutos; questão 1: 10 minutos; questão 2: 10 minutos; questão 3: 10 minutos; questão 4: 10 minutos; questão 5: 20 minutos; questão 6: 15 minutos. Sara na entrevista pré-aula referiu que quando chegar à última questão, pretende dirigir-se a toda a turma para ouvir as opiniões dos vários grupos:

Eu planifiquei, tendo em conta o tempo que terão para responderem às questões. Na última questão quero ouvir todos os grupos e se calhar vou optar, quando me der conta que estão todos nessa fase, de ler a questão e esperar para ouvir o que tem a dizer... estou curiosa... vamos lá ver no que vai dar e que modelos vão escolher e porquê. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

Quanto aos recursos que teve necessidade de usar para a criação da tarefa, Sara referiu-se à tabela elaborada a partir dos dados recolhidos dos questionários e da gincana e ao EXCEL.

A organização dos alunos e grupos mantiveram-se e Sara referiu, na entrevista pré aula, que os materiais que usou para a aula foram: a tabela com os dados e que entregou aos alunos, o enunciado da tarefa e o computador (EXCEL).

Segundo a professora, os contextos escolhidos pelos alunos constituíram um elemento facilitador: no estabelecimento de relações entre variáveis estatísticas que surgiram durante a recolha de dados reais; na compreensão dos resultados matemáticos que obtiveram a partir dos modelos e posteriormente; na validação do modelo matemático na confrontação com a realidade conhecida:

Na planificação, eu tive sempre em conta o contexto e acho que é facilitador para os alunos por várias razões: eles na gincana, estando a recolher dados e tendo conhecimentos relacionados com a sua área profissional, perceberam se os jogos eram ou não adequados e até os reajustaram, no momento, às crianças; começaram a estabelecer relações entre as características físicas das crianças e os resultados dos jogos, associações essas que eu aproveitei e vai permitir perceberem se os resultados que vão obter através do modelo escolhido são ou não possíveis. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

Durante a entrevista, Sara identificou os vários pares de variáveis que usou na construção da tarefa:

A partir das várias relações que surgiram durante a gincana e após testar em casa se dariam ou não bons modelos matemáticos, escolhi as variáveis

e para esta tarefa os pares de variáveis que vão ser estudados são: o tempo que as crianças demoram a fazer o primeiro e o segundo print; e o número de acertos no jogo “Em cheio nas latas” e no “Lança atira e acerta”. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

Sara mencionou que a tarefa estava bastante estruturada porque tinha um objetivo muito claro, e pretendia que os alunos ficassem com o conhecimento relativamente à existência de outros tipos de associação, para além do linear:

A tarefa está bastante estruturada, mas eu não digo que modelos devem escolher. Nas outras tarefas eu indicava o modelo a escolher, aqui não! Eu quero que experimentem outras linhas de tendência e olhem para a nuvem de pontos e percebam que tendência seguem aqueles pontos. Quero que percebam que a tendência pode ser não linear. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

Sara, na planificação que apresentou, disse que antevia algumas dificuldades durante a implementação da tarefa: uso do EXCEL na representação do diagrama de dispersão; seleção da função que melhor se ajustaria ao conjunto de dados; respostas às questões que permitiriam testar o modelo e ainda, validação do modelo matemático.

Durante a entrevista pré aula, Sara revelou estar preocupada com o facto dos alunos puderem usar sempre o mesmo diagrama de dispersão e sobrepor as várias funções escolhidas. A professora explicou que para atenuar esse provável contratempo, iria circular pelos vários grupos e dirigir-se à turma:

Eu vou ter de verificar se, ao selecionarem, as várias linhas de tendência estão ou não a fazê-lo sobre o mesmo diagrama, pois se o fizerem vai ficar uma grande confusão e não vão perceber nada. Eu vou circular e sugerir que para cada linha de tendência que selecionem, copiem o diagrama de dispersão, assim vão poder comparar melhor e escolher. (Entrevista pré aula, 15/06/12)

A condução da aula

Construção da representação real: Sara entregou a tarefa e fez uma breve introdução sobre o pretendido e os alunos à semelhança das tarefas anteriores, começaram de imediato a trabalhar:

Tomem atenção à tarefa que acabei de entregar e leiam bem o enunciado. Cuidado que o modelo solicitado não tem de ser necessariamente linear. Qualquer coisa, qualquer dúvida, chamem-me. (Aula de Sara, 15/06/12)

Desta vez a opção recaiu sobre investigar a relação entre as variáveis: “1º tempo de sprints e 2º tempo de sprints” e a relação entre as pontarias nos jogos “*Em cheio nas latas*” e no “*Lança atira e acerta*”.

Na introdução da tarefa, Sara teve em conta a primeira fase de modelação, dando importância à construção real da situação, com a introdução, na tarefa, de uma foto (Figura 33) tirada no dia da recolha de dados (gincana) e de diálogos estabelecidos entre os alunos.

Sara estabeleceu, no início da aula, um diálogo propositado com o intuito de captar a atenção dos alunos para a imagem colocada na tarefa e os diálogos estabelecidos entre dois dos alunos da turma. Ela pretendeu que os alunos se motivassem e tivessem curiosidade em resolver a tarefa:

Sara: Leiam bem o enunciado! Já viram as variáveis que aparecem aí? Reconhecem alguma coisa?

Aluno: Sim, são os miúdos da escolinha! E aqui estão outra vez as nossas conversas?

Outro aluno: Eu acho que o que estão a dizer o Bruno e a Tânia é verdade!

Tânia: Será mesmo verdade setora? Eu acho que quem tem pontaria num jogo também tem nos outros, pois é uma questão de jeito! Esta tarefa está gira!

Aluno do grupo da Tânia: Olha, na foto estão as crianças que ficaram no nosso grupo!

Tânia: Sim, a professora andou a tirar fotos, mas eu não sabia que era para pôr na tarefa!

Sara: Acham bem?

Outro aluno: Eu acho fixe, assim sabemos porque estamos a fazer as coisas e tem mais interesse... eu acho!

Aluno: Pode até não ter nada a ver!

Sara: Explica o que queres dizer!

Aluno: Sei lá... estou a pensar... no caso da pontaria... pode ter sido sorte... não sei se há relação. Nas corridas até acho... porque se fizer um bom tempo no 1º tempo também vai fazer no 2º.

Sara: Então vamos testar e ver quem tem razão... esse é o objetivo!

Aluno: Fazemos no EXCEL? Começamos por construir tabelas?

Sara: Sim. (Aula de Sara, 15/06/12)

Construção do modelo real: Com o diálogo anterior, Sara conseguiu que os alunos percebessem por que razão andaram a recolher aqueles dados inerentes aos jogos da gincana. A professora conseguiu que os alunos estabelecessem relações a partir da realidade e formulassem conjeturas, que apresentou na tarefa, proporcionando assim, uma construção da representação real da situação. Sara teve o cuidado de fazer sentir aos seus alunos a importância dos dados recolhidos e que utilidade lhe iriam dar nesta tarefa, como

ilustra o excerto anterior. A mobilização do conhecimento extra matemático permitiu conduzir os alunos à construção do modelo real. Ao compreenderem a tarefa, os alunos passaram, tal como era solicitado na tarefa, à organização dos dados em tabelas. Essas tabelas permitiram estabelecer para cada criança os resultados obtidos no 1º e 2º *sprint* (para o primeiro par de variáveis) e os resultados da pontaria nos dois jogos referidos. Logo de seguida, os alunos, tal como era pedido, passaram à construção do diagrama de dispersão para cada par de variáveis. Os modelos reais obtidos foram os seguintes:

Nº de identificação da criança	Tempo do 1º Sprint	Tempo do 2º Sprint
1	5,17	5,71
2	6,57	5,49
3	5,76	4,95
4	4,81	4,99
5	5,94	6,84
6	3,19	3,12
7	3,51	3,42
8	4,72	4,5
9	5,17	5,98
10	4,09	5,17
11	4,5	4,54
12	4,99	4,9
13	7,6	8,73
15	6,03	4,68
16	6,52	6,16
17	6,43	5,04
18	4,68	4,77
20	4,36	4,32
21	5,08	5,17
22	5,44	5,49
23	5,22	5,04
24	8,41	5,26

Nº de identificação da criança	Nº de acertos - Em cheio nas latas	Nº de acertos "Lança atira e acerta"
1	4	1
2	9	2
3	0	5
4	6	3
5	8	2
6	8	0
7	9	1
8	10	2
9	9	3
10	9	3
11	4	0
12	10	4
13	7	0
15	1	0
16	7	1
17	5	1
18	7	1
20	9	3
21	4	0
22	8	1
23	9	3
24	4	0

Figura 34: Exemplo de tabelas, obtidas por um dos grupos de alunos (15/06/12)

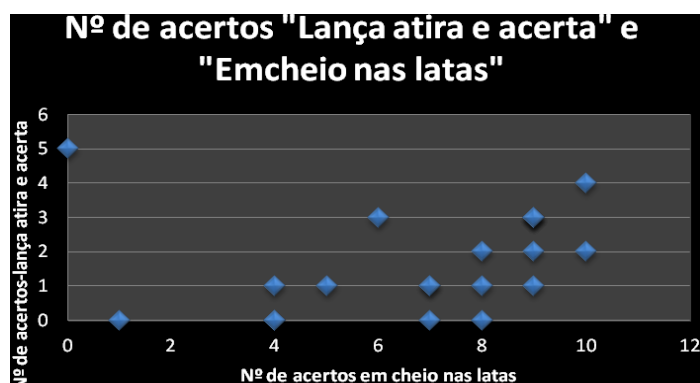
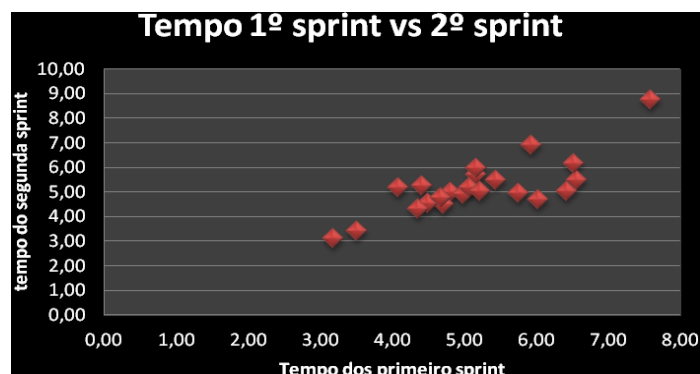


Figura 35: Exemplos de diagramas de dispersão, obtidos por um grupo de alunos (15/06/12)

Nesta fase, Sara circulou pelos grupos com o objetivo de perceber se os modelos reais estavam bem construídos. A este nível pretendeu que os seus alunos lessem para além da tabela, questionassem (formulação de questões) e refletissem sobre o que estavam a ver e fazer. Sara ao colocar o exemplo das tabelas que pretendia que construísem, levou a que os alunos dessem sentido aos dados. No caso desta tarefa e das distribuições bidimensionais, este facto esteve presente na construção do diagrama de dispersão tendo permitido aos alunos a compreensão dos dados e da provável relação entre as duas variáveis que estavam a estudar. Sara colocou, no enunciado da tarefa, questões, (questão quatro), logo após a construção do diagrama de dispersão, que permitiram tirar algumas conclusões, através da observação direta, acerca da associação entre variáveis.

Construção dos modelos matemáticos: À semelhança do que tinham feito na tarefa anterior, e embora Sara referisse que a possível relação entre os pares de variáveis, pudesse ser não linear, os alunos optaram por construir o modelo de regressão linear. Os primeiros modelos matemáticos obtidos foram os lineares. Alguns exemplos são apresentados a seguir:

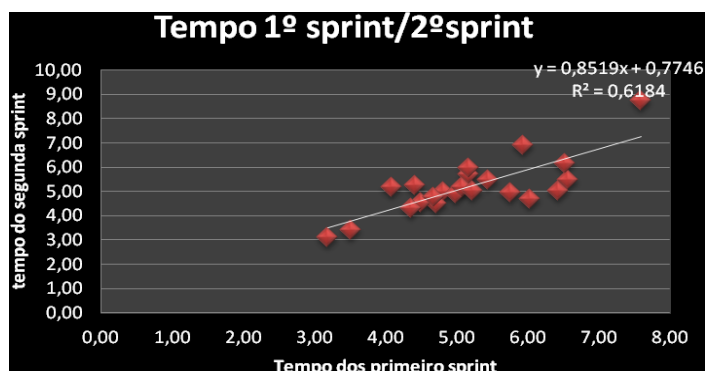


Figura 36: Exemplo da equação do modelo de regressão linear obtido por um grupo de alunos, para as variáveis “tempo do 1ºsprint/tempo do 2º sprint” (15/06/12)

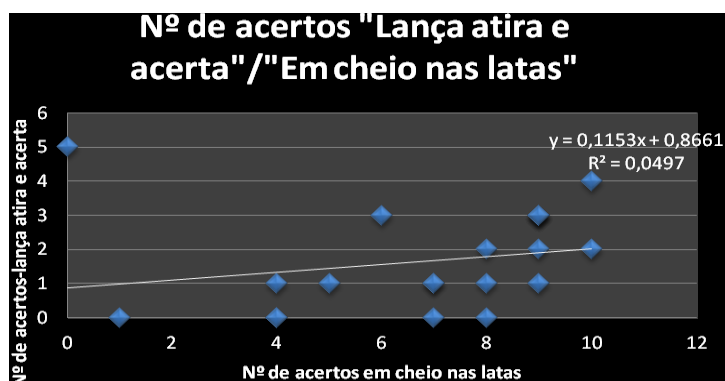


Figura 37: Exemplo da equação do modelo de regressão linear obtido por um grupo de alunos, para as variáveis “Acerta em cheio nas latas e Lança, atira e acerta” (15/06/12)

Todos os alunos chegaram a este primeiro modelo matemático. A professora deslocou-se pelos grupos e não questionou sobre o facto de aparecer um ponto que poderia estar mais afastado dos outros. Caso esse *outlier* não existisse, o modelo matemático seria o seguinte:

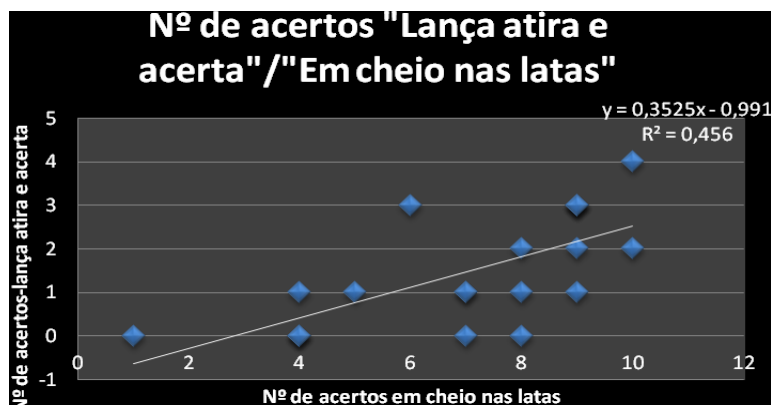


Figura 38: Exemplo da equação do modelo de regressão linear da Figura 36 sem inclusão do *outlier*

A eliminação deste *outlier* faria com que o valor do coeficiente linear fosse mais próximo de 0.5, levando a concluir que a reta de regressão linear estaria muito mais próxima de todos os pontos, permitindo posteriormente a melhor previsão de valores para a variável resposta, caso fosse este o modelo escolhido. Como esse aspeto não foi detetado nem explorado, os alunos por observação do declive da reta de regressão linear concluíram que a relação entre as duas variáveis seria praticamente nula, levando-os, por sugestão de Sara, à procura de outros modelos matemáticos que não fossem necessariamente o linear.

Sara ao deslocar-se pelos vários grupos e ao perceber que não estavam a construir outros modelos matemáticos, interveio em voz alta e para toda a turma, no sentido de lerem o que era pretendido, levando-os a compreender que poderiam procurar mais modelos. A professora pediu para os alunos observarem a forma como estava a nuvem de pontos e questionou-os:

Sara: Já leram bem a questão 3? Só estão a construir o modelo linear! Mas o que está lá?

Aluno: (o aluno lê a questão 3) “Consideremos que existe correlação entre as duas variáveis, mas não necessariamente linear. Teste as várias linhas de tendência.”

Sara: É isso mesmo... não necessariamente linear!

Aluno: Podemos ver outras? Como?

Outro aluno: Quando escolhermos a linha de tendência estão lá mais opções! Podemos escolher todas?

Sara (em voz alta): Cuidado! Atenção! Ao escolherem a linha de tendência no EXCEL, para além da linear, podem escolher a polinomial, as outras opções não porque não têm conhecimentos para trabalhar com esses modelos!

Sara: Olhem bem para as nuvens de pontos, acham que segue uma tendência linear?

Aluno: Acho que não!

Sara: Será que essa tendência se parece com uma reta?

Aluno: Parece mais... curva?

Sara: Então experimentem e vejam lá qual poderá ser o melhor modelo!

(Aula de Sara, 15/06/12)

Os alunos testaram outro tipo de modelo de regressão e a curva sobrepôs-se à reta de regressão linear que estava no diagrama de dispersão. Sara ao dar-se conta do sucedido, referiu a importância de copiarem o mesmo diagrama de dispersão várias vezes e para cada um escolherem vários tipos de modelos de regressão e calcularem os respetivos coeficientes de correlação linear (termo usado pela professora). Um exemplo de vários modelos matemáticos sobrepostos é o seguinte:

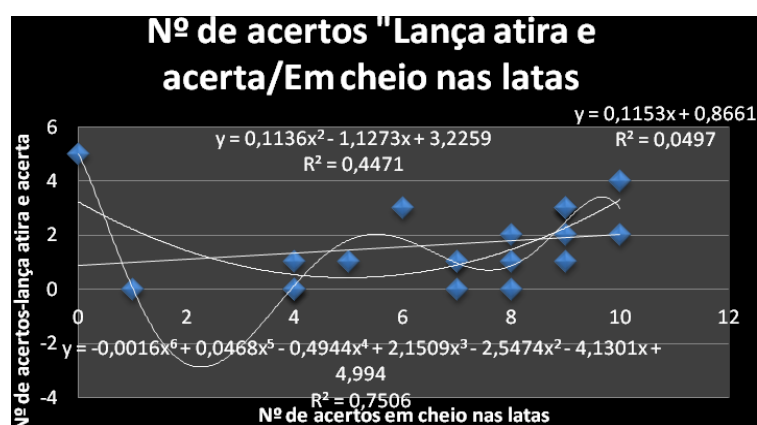


Figura 39: Exemplo da construção de várias linhas de tendência sobrepostas e respetivas equações de modelos de regressão (15/06/12)

Sara percebeu que estavam a fazer sobreposições de modelos matemáticos no mesmo diagrama dispersão e deslocou-se a todos os grupos a fim de pedir que o fizessem separadamente. O excerto seguinte retrata uma das suas intervenções junto de um dos grupos:

Sara: Então em que ponto estão? Já experimentaram vários modelos?

Aluno: Sim!

Sara: Deixa-me ver até cá abaixo! As linhas estão umas em cima das outras!

Como é que conseguem perceber qual é a que tem melhor correlação de todas?

Aluno: Podemos ver pelo tal r !

Sara: Sim, mas façam separadamente! Para cada modelo matemático selecionado façam *copy* do diagrama de dispersão e façam vários! É mais fácil de perceber a tendência e até conseguirem perceber o valor do r !

Aluno: Então fazemos vários separados?

Sara: Sim!

Aluno: Ok! (Aula de Sara, 15/06/12)

Sara disse aos seus alunos para explorarem todos os modelos de regressão polinomiais possíveis, no EXCEL, e só depois decidirem qual parecia mais adequado:

Sara: Experimenta lá agora os vários graus para a polinomial! Grau 2, 3... até ao seis!

Aluno: Assim?



Figura 40: Exemplo da construção de várias linhas de tendência distintas para o mesmo conjunto de dados bivariados (15/06/12)

Sara: Sim... façam lá esses! (Aula de Sara, 15/06/12)

Para que os alunos percebessem o modelo que teriam de escolher, Sara referiu que deveriam analisar o valor do r^2 , calcular o valor do coeficiente de correlação linear e interpretá-lo. Com esta intervenção demonstrou que não sabe que o valor do coeficiente de correlação é uma medida que mede o grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis. Nesse sentido, induziu os alunos a escolherem um modelo matemático tendo em conta o valor do coeficiente de correlação, calculado a partir da raiz quadrada do coeficiente de determinação:

Sara: Já têm os modelos todos?

Aluno: E agora escolhemos como? Pelo valor do r ?

Sara: Podem observar o valor do r^2 e tentar interpretá-lo no sentido de escolherem um que vos pareça adequado!

Aluno: Então assim o melhor é este de grau 6!

Sara (dirige-se a toda a turma): vejam em cada caso o valor de r^2 e a partir desse valor podem ver qual poderá ser o melhor modelo! Vejam o que diz a questão 4! Depois no final têm que dizer qual é o modelo! (Aula de Sara, 15/06/12)

Sara interrogou os alunos sobre os modelos obtidos, no sentido de os levar a pensar se naqueles modelos, cujas tendências parecem seguir curvas, a associação entre as variáveis seria positiva, negativa, fraca, forte ou nula:

Sara: Olha aqui... desculpem... deixem ver... aqui neste caso em que fazem curvas, a correlação... podemos falar em correlação positiva ou negativa como a linear? Conseguem perceber a tendência?

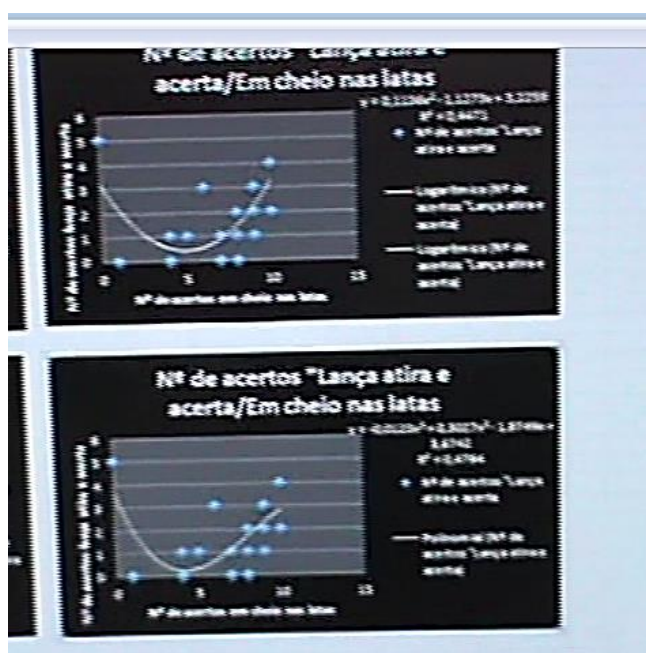


Figura 41: Exemplos de modelos de regressão polinomiais (15/06/12)

Aluno: Não!

Sara: Então como podem saber?

Aluno: Ver o valor de r^2 e de r !

Sara: Sim, vejam isso! E tendo em conta isso, qual é o grau da função polinomial que escolhem?

Aluno: Qual é o grau? Sei lá!

Outro aluno: É aquele número maior que está no x... não é?

Sara: Então qual é o grau que tem melhor correlação linear?

Aluno: Então é o 6!

Sara: Apontem tudo! (Aula de Sara, 15/06/12)

Os alunos, ao analisarem o r^2 (coeficiente de determinação), concluíram que o modelo matemático que melhor se adequava era o polinomial de grau seis e que quanto maior fosse o valor melhor seria o modelo. Os alunos calcularam a raiz quadrada desse valor, e Sara referiu-se ao valor de correlação linear, não se apercebendo que esse termo só se usa para o caso de estudarmos a associação linear entre duas variáveis quantitativas. O valor do “coeficiente de correlação”, segundo Sara, deste modelo era o que se encontrava mais próximo de 1 e a tendência da curva era a que estava mais próxima dos pontos do diagrama de dispersão, logo o modelo de regressão polinomial de grau seis, era a melhor opção para aquele conjunto de dados. Estas conclusões surgiram da ideia transmitida pela professora.

De seguida são apresentados alguns modelos matemáticos (funções polinomiais) experimentados pelos alunos e no final exemplos de um modelo polinomial de grau 6 para cada um do par de variáveis que foram estudados:

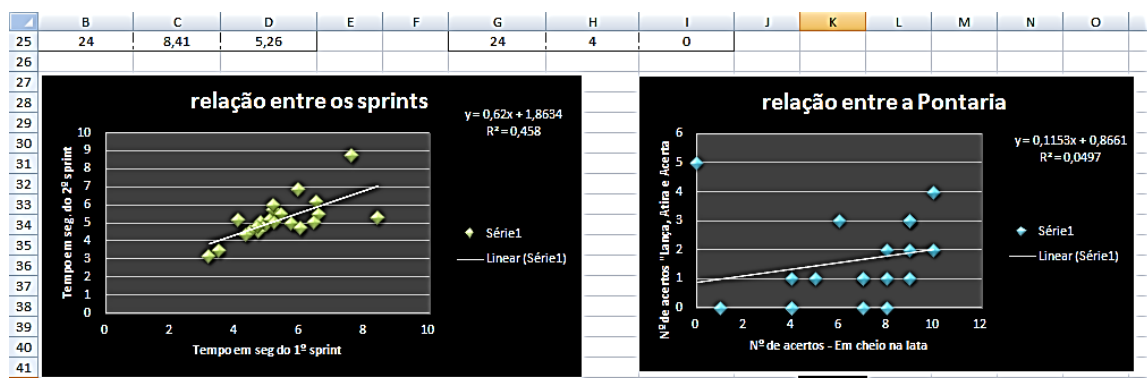


Figura 42: Exemplos de retas do modelo linear e respetivas equações das regressões lineares, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12)

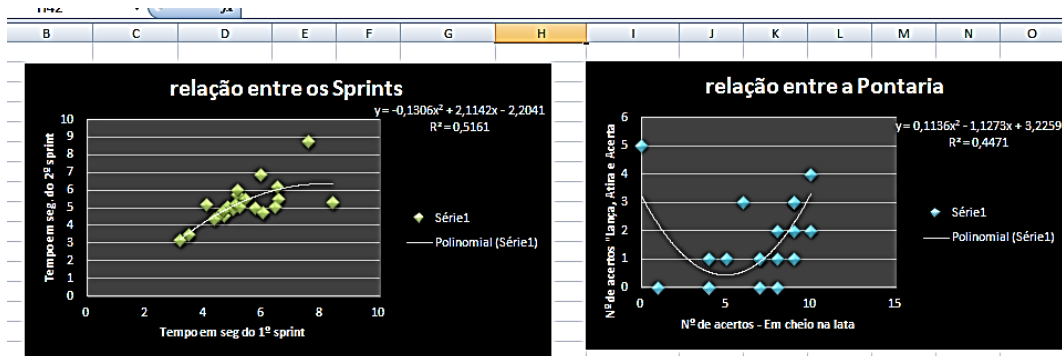


Figura 43: Exemplos de “curvas” referentes ao modelo de regressão quadrática e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12)

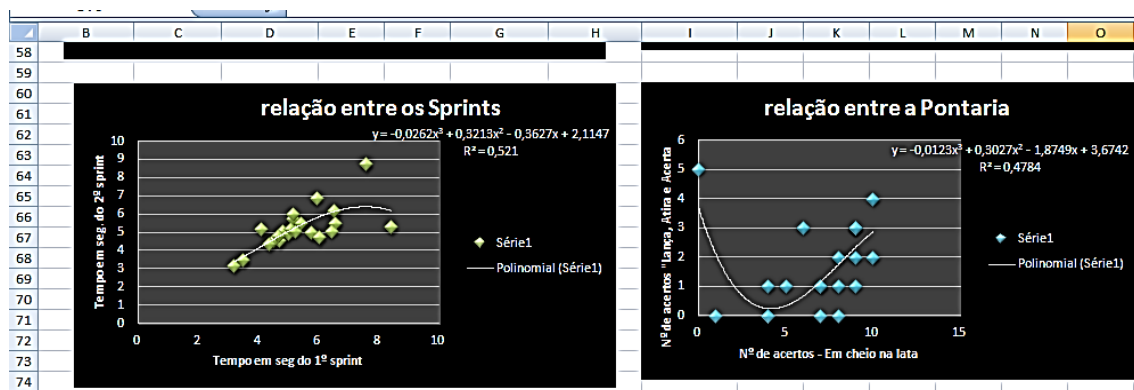


Figura 44: Exemplos de “curvas” referentes ao modelo de regressão cúbica e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12)

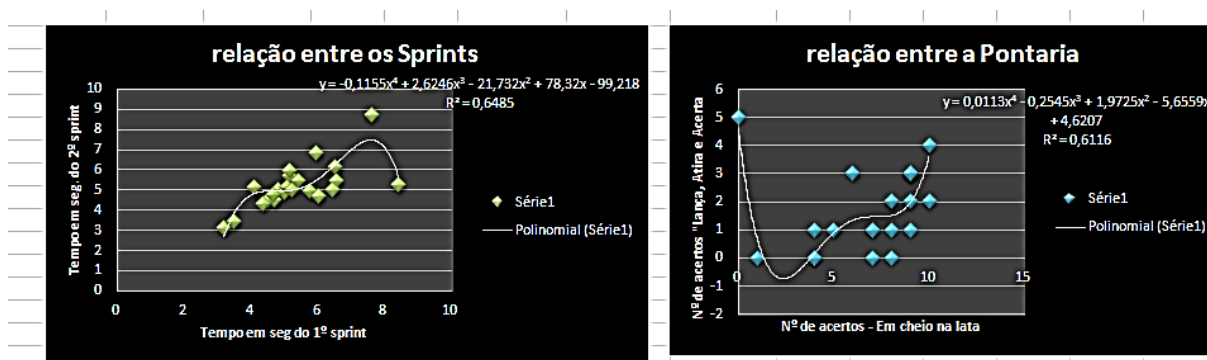


Figura 45: Exemplos de “curvas” referentes ao modelo de regressão quártica e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12)

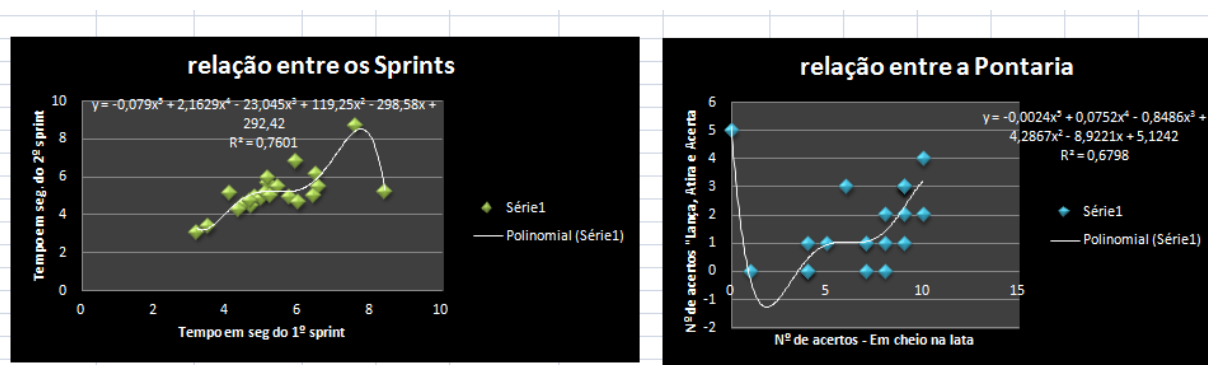


Figura 46: Exemplos de “curvas” referentes ao modelo de regressão polinomial de grau 5 e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12)

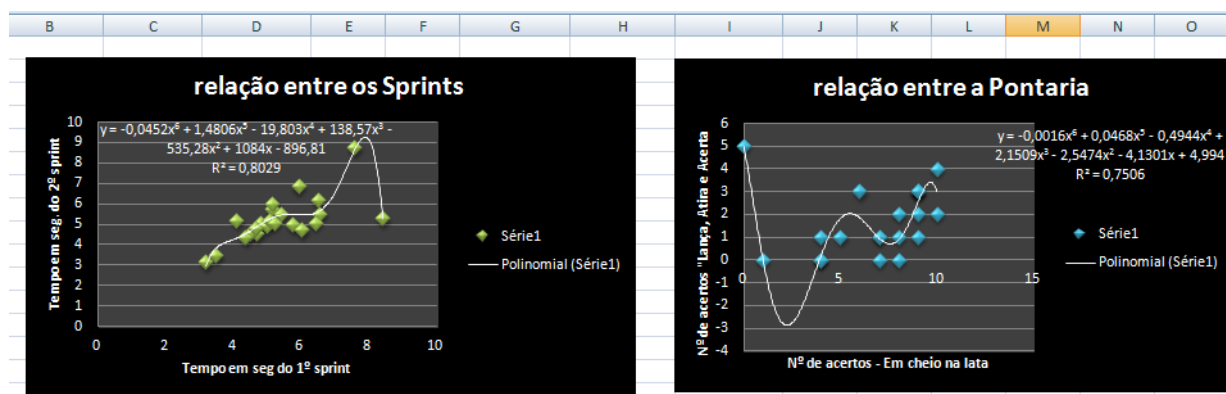


Figura 47: Exemplos de “curvas” referentes ao modelo de regressão polinomial de grau 6 e respectivas equações, obtidas por um grupo de alunos (15/06/12)

Sara ao pensar na tarefa, colocou questões no sentido de seguirem os passos da tarefa e não se esquecerem assim de nenhum aspeto.

o que melhor traduz cada uma das situações.

ão obtida e determine o coeficiente de correlação.

Função escolhida	Coeficiente de correlação (r)
$y = 0,00462x^6 + 1,486x^5 - 49,803x^4 + 128,95x^3 - 520,25x^2 + 886x - 834,81$	$(R^2 = 0,8029) r = 0,896$
$y = 0,00161x^6 + 0,00615x^5 - 0,4974x^4 + 2,1969x^3 - 5,6482x^2 + 4,3044x - 4,934$	$(R^2 = 0,7306) r = 0,855$

do diagrama e tendo em conta os coeficientes de correlação
 idera a possível correlação? Existe ou não? Será positiva ou

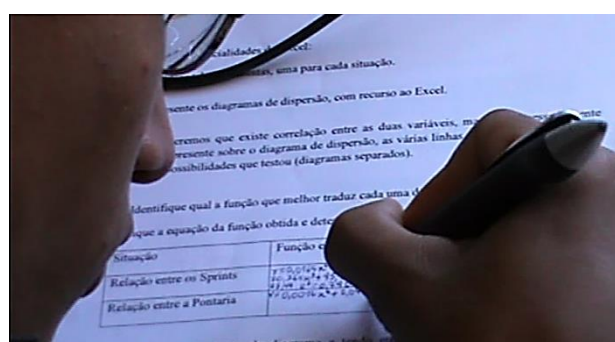


Figura 48: Exemplo de resposta de um dos grupos relativamente à escolha do modelo matemático (15/06/12)

A construção dos modelos matemáticos fez-se com alguma confusão, estando relacionada com o facto de terem construído os vários modelos matemáticos no mesmo diagrama de dispersão. Sara ao deparar-se com esta sobreposição pediu aos alunos para construírem um diagrama de dispersão para cada modelo matemático que quisessem construir. No final apresentaram os vários modelos e escolheram todos o polinomial de grau 6 uma vez que o valor do coeficiente de correlação “linear” (segundo o termo usado por Sara) era o mais elevado. Sara neste sentido evidenciou alguma falta de experiência neste tipo de explorações para estes modelos, raramente discutidos em sala de aula. A forma como conduziu as questões em sala de aula, levou os alunos a escolherem nesta fase o modelo de regressão polinomial de grau 6 associado ao valor do coeficiente de correlação “linear”. Muitos aspetos não foram pensados pela professora ou por falta de experiência ou alguma falta de desconhecimento sobre estes conteúdos estatísticos.

Obter resultados matemáticos: Tal como nas outras tarefas, a formulação escrita da questão cinco, teve o objetivo de levar os alunos à próxima fase do ciclo de modelação: fase que corresponde à testagem dos modelos matemáticos escolhidos. As questões foram adaptadas ao contexto real e adaptadas ao curso profissional e às variáveis que estavam a ser estudadas. Os alunos não apresentaram dificuldades na interpretação do significado do x e do y nos dois modelos escolhidos e rapidamente passaram à testagem e estimativa de valores.

A primeira alínea da questão apelava à previsão de qual seria o tempo realizado no segundo *sprint* por um aluno que no primeiro fez um tempo de exatamente 5 segundos. Segundo o modelo escolhido a resposta seria aproximadamente 4,8 segundos o que corresponde a um valor possível. Sara solicitou a estimativa de um valor no intervalo de possibilidades.

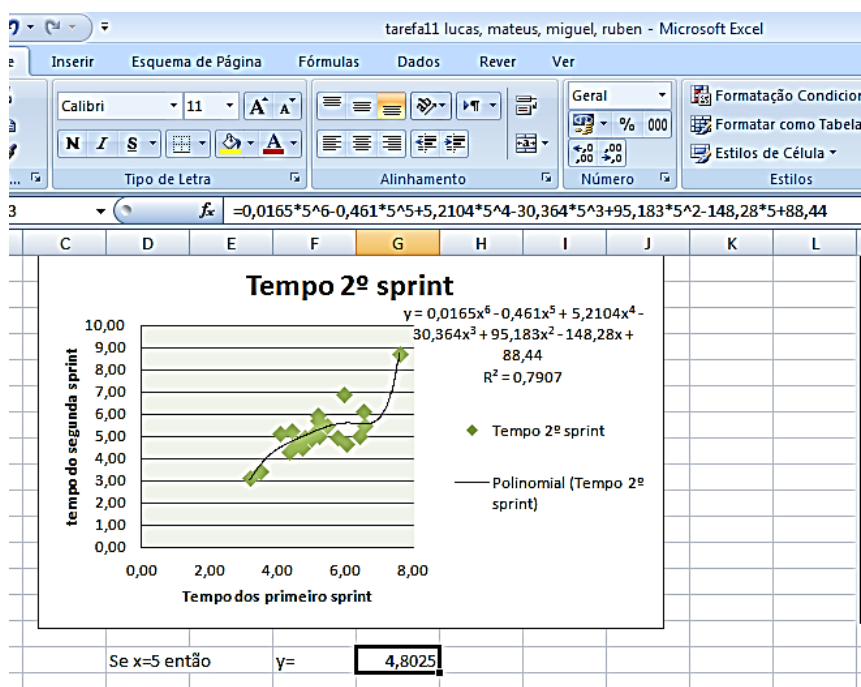


Figura 49: Exemplo do resultado obtido, por um grupo de alunos, a partir da equação do modelo de regressão escolhido, para estimarem valores (15/06/12)

Sara: Estão a testar o modelo matemático que obtiveram para as variáveis *sprint*?

Aluno: Sim, estamos a substituir o 5 segundos do 1º *sprint* e ver qual é o valor que vamos obter para o 2º *sprint*.

Outro aluno: Não podemos testar para o caso de 30 segundos, podia ser uma corrida com mais metros?!

Sara: O modelo que obtiveram foi para estas crianças... e que fizeram estes tempos, se fizemos uma previsão para valores que eles não obtiveram essa estimativa pode não ser muito boa!

Aluno: Então se fossem atletas adultos, os valores obtidos para o 1º *sprint* e 2º *sprint* seriam outros e o modelo podia ser diferente?

Sara: Sim! (Aula de Sara, 15/06/12)

Interpretação dos resultados matemáticos: As várias questões pensadas por Sara para a obtenção de resultados, tiveram o intuito de conduzir os alunos a interpretá-los no contexto real. Por exemplo, a segunda alínea da questão cinco visava testar o outro modelo matemático escolhido: “Caso um aluno que no jogo “Em cheio nas latas” deitou abaixo 8 latas, quantas se prevê que encesta no jogo “Lança atira e acerta?”

O valor obtido foi negativo e não era possível tendo em conta a situação real.

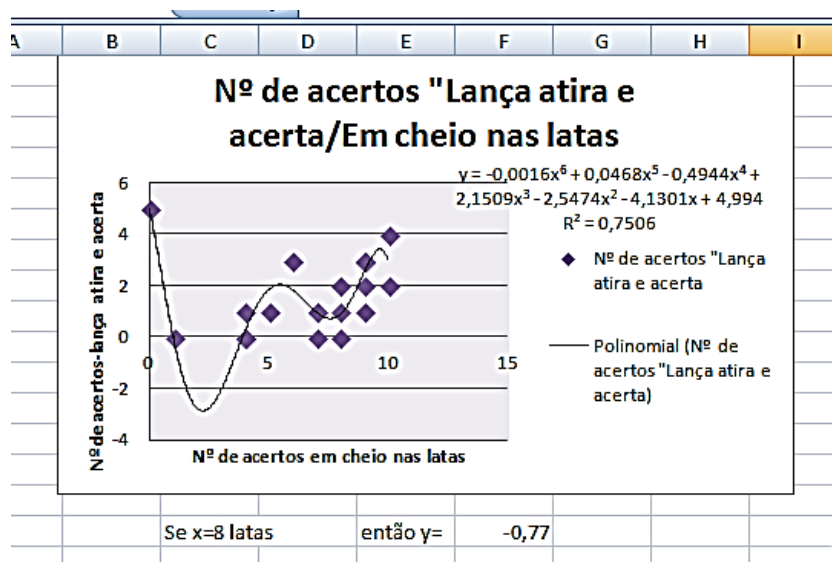


Figura 50: Exemplo do cálculo efetuado, por um grupo de alunos, a partir da equação do modelo de regressão escolhido, para estimarem valores (15/06/12)

O objetivo era que os alunos refletissem sobre a adequabilidade do modelo matemático e previsão de valores obtidos de modo a compreenderem o sentido dos mesmos na situação real. Sara conseguiu que os alunos entendessem que as previsões a partir dos modelos matemáticos são válidas em determinados contextos e uma equação de um modelo de regressão pode ter algumas limitações quando é usada para fazer previsões. A previsão de resultados matemáticos permitiu aprofundar este aspeto e compreender se o modelo escolhido era ou não um bom modelo para fazer estimativas.

A fase de interpretação de resultados matemáticos foi realizada com sucesso, pois os alunos conseguiram comparar o que obtiveram com a realidade e o conhecimento extra matemático, conseguindo criticar os resultados.

Validação do modelo matemático: Os alunos refutaram o segundo modelo matemático, mas não fizeram o que se pretende nesta fase do ciclo de modelação. Sara não incentivou os alunos a procurarem um outro modelo, acabando por dizer a estes que não era o melhor. Sara poderia ter explorado melhor esta conclusão, colocando questões a toda a turma no sentido de os levar a refletir sobre o porquê da não validação do modelo. Neste contexto, a professora revelou alguma insegurança na condução deste tipo de situações demonstrando que o seu conhecimento nesta área necessita de aprofundamento:

Aluno: Setora está a dar um número negativo de acertos! Não pode ser!

Está alguma coisa mal!

Sara: O que foi que aconteceu? Substituíram bem?

Aluno: Sim!!!

Sara: E então o que podem dizer?

Aluno: Este modelo não é bom para fazer estas previsões!

Outro aluno: Mas o valor do r era o melhor... o que é que se passou?

Sara: Nem sempre podemos escolher o modelo pelo valor do coeficiente de correlação linear ou pela tendência dos pontos, este era o que parecia seguir a tendência dos pontos, mas para fazer previsões não se revelou o mais adequado!

Aluno: Então dizemos que não pode ser!

Sara: Sim, escrevam isso! (Aula de Sara, 15/06/12)

Sara elaborou a tarefa tendo em conta o conhecimento que tem da Estatística, nomeadamente sobre as distribuições bidimensionais. O programa prevê que seja abordada a regressão linear e faz uma breve referência sobre a possibilidade de nem todos os dados seguirem uma tendência linear, não sendo sugerida esse tipo de aprofundamento. Nesta tarefa, Sara optou por realizar esse estudo a partir de uma situação real e envolver os alunos nesta temática. Foi rico não só do ponto de vista do ensino da Estatística, mas também pela motivação e empenhamento. Sara optou por sugerir a construção de outros modelos de regressão que não fossem necessariamente o linear. Esse aspeto foi bem conseguido, mas muito mais poderia ter sido analisado.

Nesta tarefa, os alunos foram levados a refletir sobre os resultados que obtiveram, tendo em conta o contexto que conheciam. Este facto revelou que Sara não só estava consciente do que é uma tarefa de modelação e modelação matemática, como evidenciou

dar extrema importância aos contextos reais, cruciais quer para o ensino da Estatística, quer para a modelação matemática.

Reflexão imediata de Sara sobre a aula

Após a aula terminar e com o objetivo de recolher de forma imediata as reflexões de Sara sobre o decorrer da aula, foi realizada uma entrevista de curta duração. Sara demonstrou alguma insatisfação relativamente à forma como a aula decorreu. A sua insatisfação esteve relacionada com o facto de ela ter a perceção que surgiram alguns imprevistos: num dos modelos e na fase de testagem, os valores obtidos para a estimativa solicitada foram negativos e segundo Sara, quando resolveu a tarefa, não se deu conta desse resultado. Com alguma hesitação, referiu que talvez tenha sido positivo ter surgido esse imprevisto porque levou-os a refletir sobre a validade do modelo no contexto real:

Um bocadinho diferente do que eu estava à espera, porque num dos modelos houve valores que deram diferente do que eu tinha previsto! Deu resultados diferentes do que estava à espera, devo-me ter enganado quando resolvi, é bem possível! Fiz anteontem à noite, mas fiz aquilo muito rapidamente e os valores deram-me positivos e até estava mais ou menos dentro do aceitável! Curiosamente, foi dar um número negativo, mas se calhar até foi positivo, porque fê-los refletir no contexto real sobre o modelo. Eu não mostrei surpresa, tentei dar volta à situação, fiz de conta que estava tudo previsto, não foi, mas pronto! e... eles não se deram conta disso! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 15/06/12)

Quando questionada sobre o que mais a surpreendeu, Sara explicou que foi o facto do modelo obtido pelos alunos não ter levado aos resultados esperados.

Sara foi questionada sobre as várias fases de modelação, nomeadamente como se processou todo o ciclo se os alunos conseguiram passar por todas as fases. A professora referiu em primeiro lugar a fase da construção da representação real, enfatizando a introdução de uma foto como o ponto de partida para o reconhecimento imediato da situação real e vontade em trabalhar:

Sim, eles compreenderam a situação, porque houve reconhecimento da situação, sim! Deram-se logo conta que a foto era da situação vivida e esta não só motivou logo para o início da tarefa como eles compreenderam e começaram muito rapidamente a fazer e perceberam logo qual era o caminho a seguir! Tiveram logo curiosidade e começaram a trabalhar. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 15/06/12)

Sara mencionou que, na segunda fase de modelação, os alunos compreenderam facilmente a situação e a construção do modelo real foi feita de forma intuitiva e rápida, à semelhança do que já tinha sido feito anteriormente. Os alunos construíram as tabelas relativas aos dois pares de variáveis, assim como, os respetivos diagramas de dispersão. Mais uma vez, foi referido que a construção dos modelos reais foi solicitada e a tarefa construída nesse sentido:

Sim, construíram as tabelas e os diagramas para cada par de variáveis. No início viram logo que tinham que fazer as tabelas à semelhança das tarefas anteriores e também fizeram logo os diagramas de dispersão. Fui intuitivo e rápido. Eu estruturei a tarefa de modo a que eles construíssem o modelo real. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 15/06/12)

Quanto à construção dos modelos matemáticos, Sara salientou o facto da escolha do modelo se dever ao valor do coeficiente de correlação linear, evidenciando que desconhece que este só faz sentido ser calculado, caso a associação entre duas variáveis seja linear e que o r^2 é o coeficiente de determinação (permite verificar a qualidade da aproximação entre duas variáveis, através do cálculo da soma dos quadrados dos desvios):

Eles tentaram procurar o melhor modelo, pois construíram vários tipos de regressão, através do coeficiente de correlação linear e escolheram qual era o melhor deles, a partir daí! Ajudei-os um pouco, como isto era um bocadinho novo para eles, mas no sentido de os orientar! Acho que a maioria deles optou entre dois ou três e pensou: agora, escolho o que tem melhor coeficiente. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 15/06/12)

Foi explicado que os alunos conseguiram interpretar os resultados matemáticos obtidos e compararam-nos com a realidade. Algumas interrogações surgiram relativamente aos resultados, levando Sara a questionar-se sobre o porquê de alguns valores obtidos. Segundo ela, tinha testado previamente os dois modelos e ambos levavam a resultados aceitáveis, mas o obtido pelos alunos levou a outras conclusões:

Eles conseguiram chegar aos resultados, porque na pergunta seis, eles testaram um deles e os resultados faziam todo o sentido ao compará-los com a realidade, os tempos do 1º *sprint* e do 2º *sprint*. No outro, eles ao testar e ao tentar validar, quando foram tentar chegar ao resultado, viram que não funcionou muito bem, e colocaram muitas dúvidas porque aquilo não podia ser assim! Eles não queriam aceitar aquele valor! E perceberam que no contexto do problema aquilo não ia bater certo. Eles até pensaram que estavam enganados e eu até pensei que eles estavam enganados, porque

quando eu fiz aquilo deu-me outra coisa. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 15/06/12)

Pela forma como relatou o ocorrido, Sara demonstrou ter percebido a dificuldade dos alunos e engano por ela cometido quando preparou a aula. Quando questionada sobre a validação dos dois modelos matemáticos, Sara apontou que um dos modelos foi facilmente validado, mas o outro não fazia sentido e os alunos refutaram-no. No entanto, reconheceu que não explorou bem a situação porque foi surpreendida e, segundo o seu conhecimento, a escolha de um modelo a partir da interpretação do valor do coeficiente de correlação linear não é suficiente para escolher um modelo que melhor se adeque a uma situação real:

Sara: O primeiro par de variáveis, o modelo escolhido por eles foi validado, mas o outro caso, a maior dos alunos rejeitou! Acho que eles perceberam que aquilo não podia funcionar muito bem, o outro não, mas espero que eles tenham posto isso no papel para eu ler aquilo com mais atenção! Eu não explorei isso com eles, não estava à espera daquele resultado e acho que tenho de fazer de outra forma!

Investigadora: Nesse modelo rejeitado, houve reajustes? Os alunos foram procurar outro que pudesse corresponder ao possível? E tu conduziste-os nesse sentido?

Sara: Não! Eles procuraram o melhor pelo coeficiente de correlação linear, mas pelo coeficiente já vi que não funciona muito bem, mas é verdade não os conduzi a isso, fica para uma próxima! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 15/06/12)

Existiu alguma insegurança na condução desta aula e lacunas relativamente à forma como foi feita a escolha de um modelo de regressão não linear.

Sara, durante a entrevista, disse que o envolvimento dos alunos, tanto a nível matemático, como ao nível do empenhamento e motivação foi bastante satisfatório, mostrando-se satisfeita com a aula:

Está boa, eles estão envolvidos e cada dia que passa, eles já estão dentro mais do contexto, das tarefas e a nível matemático eles já sabem o que é para fazer muito facilmente. Estão motivados e posso dizer que foi bastante satisfatório. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 15/06/12)

A professora, ao refletir sobre possíveis reajustes na tarefa ou planificação da aula, destacou a necessidade de explorar mais a parte final da tarefa. Mencionou a intenção de

colocar mais questões no sentido de levar à reflexão sobre a adequabilidade do modelo matemático e escolha, caso necessário, de outro:

Alterava duas ou três coisinhas na tarefa, fazia uns reajustes, acrescentava uma outra questão para os fazer pensar, o porquê que isto funciona ou o porquê que isto não funciona! E levar a refletir sobre se o modelo matemático é válido. Vou colocar uma questão do tipo: “se o modelo matemático não funcionar, escolhe outro e testa-o”. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 15/06/12)

Este acontecimento despertou em Sara a necessidade de ser mais cuidadosa na condução deste tipo de aulas e fê-la refletir sobre o sucedido.

Síntese

Segue-se uma síntese do conhecimento para ensinar Estatística que Sara revelou na preparação, condução e reflexão desta tarefa de modelação, distinguindo-se os diferentes tipos de conhecimento.

Iniciando com o conhecimento comum matemático, verificou-se que Sara teve necessidade de o convocar. Nesta tarefa, este conhecimento diz respeito ao conceito de distribuição bidimensional, associação não linear entre variáveis e diagrama de dispersão. Sara pareceu estar insegura relativamente à maior parte destes conceitos, embora não tivesse noção desse facto. A professora recorreu ao cálculo da raiz quadrada do coeficiente de determinação, referindo-se a esse valor como sendo o coeficiente de correlação linear. Demonstrou não conhecer que o valor do coeficiente de correlação mede apenas a associação linear entre duas variáveis e não outra. Apesar de não deter esse conhecimento, compreendeu que a associação entre duas variáveis nem sempre é linear e nem sempre a representação gráfica dos pontos segue uma reta.

No que diz respeito ao conhecimento não matemático comum, observou-se que Sara revelou neste caso um bom domínio, conhecendo detalhes da realidade a estudar. A professora aproveitou contextos reais conhecidos e de conjecturas anteriormente estabelecidas pelos seus alunos para criar esta tarefa relacionada com a realidade. Mais uma vez, observou-se que Sara demonstrou ter um bom domínio sobre a área profissional dos seus alunos. Esta informação e conhecimento permitiram transpor os dados para a sala de aula, compreender a situação e assim ser mais simples construir modelos reais e

matemáticos. Para além disso, soube usar o EXCEL como uma ferramenta útil para a investigação das possíveis relações e assim criar a tarefa.

No que concerne ao conhecimento especializado matemático foi notória alguma fragilidade na forma como preparou e conduziu a aula. O conhecimento comum matemático evidenciado pela professora, relativamente a alguma fragilidade quanto ao desconhecimento que o coeficiente de correlação linear mede apenas a associação linear entre duas variáveis, interferiu no conhecimento especializado matemático. Levou a que durante a condução da aula e mesmo na forma como redigiu as questões da tarefa, à escolha de um modelo matemático a partir de um pressuposto menos correto. A raiz quadrada do coeficiente de determinação, não correspondia ao valor do coeficiente de correlação linear, tal como Sara mencionava. Para além disso, não se referiu ao significado do valor do coeficiente de determinação. Na nuvem de pontos construída para as variáveis “número de acertos no jogo lança, atira e acerta e no jogo em cheio nas latas”, surgiu um *outlier*. Como alguns alunos construíram o modelo de regressão linear, esse aspeto poderia ter sido explorado pela professora no sentido de levar os alunos a compreenderem qual a influência que a eliminação desse ponto teria no valor do coeficiente de correlação. Como esse aspeto não foi detetado e explorado, os alunos a partir da observação do declive da reta de regressão e valor do coeficiente de correlação linear, concluíram que não havia relação entre as variáveis. Sara apenas interveio no sentido de solicitar então outros modelos. Sara não conseguiu prever que o modelo matemático poderia ser refutado e, como tal, nem no enunciado escrito da tarefa e nem durante a aula, colocou questões que levassem à procura de um outro modelo mais adequado. Neste caso, revelou inexperiência na gestão deste tipo de situações. No entanto, durante a entrevista pós aula, Sara consciencializou-se que durante a fase de validação, deve explorar, no futuro, melhor esta fase e colocar questões que permitam conduzir a uma maior reflexão, por parte dos alunos, sobre a adequabilidade de dado modelo matemático e, caso seja refutado, tenham de construir outro. Neste sentido, parece ter havido uma evolução relativamente a esta dificuldade e estar superada. Relativamente às dificuldades sentidas e referidas por Sara, esta destacou a fase de testagem do modelo matemático. A professora explicou, que quando preparou a aula, não previu algumas situações e que não se deu conta que iriam surgir valores negativos a partir de um dos modelos matemáticos obtidos. Reconheceu que não explorou bem a situação, uma vez que foi surpreendida. No entanto, mencionou que o contexto real permitiu-lhe “dar volta à situação” e tentar minimizar o impacto do imprevisto surgido. Sara explicou que tomou

consciência que não tinha preparado bem a aula, tendo-se apercebido que a escolha de um modelo matemático não pode estar dependente do valor do coeficiente de correlação linear. A professora tem esta interpretação, uma vez que, segundo ela, o valor do coeficiente de correlação linear não é suficiente para fazer essa escolha, sendo necessário ter também em conta o contexto real. Foi notório que o facto de desconhecer alguns aspetos inerentes aos conteúdos sobre as distribuições bidimensionais (conhecimento comum matemático) interferiu com o seu conhecimento especializado matemático, expondo-a a situações que por vezes suscitaram dificuldades na forma como conduziu a aula.

Por último, o conhecimento especializado não matemático evidenciado revelou-se robusto, pois o conhecimento da realidade permitiu, a partir dos contextos reais, pensar em questões adaptadas e contextualizadas, assim como ensinar a organizar os dados reais em tabelas. Este conhecimento da realidade foi crucial na interpretação dos resultados matemáticos obtidos, permitindo-os criticar de forma mais reflexiva e conhecedora. Embora a fragilidade do conhecimento comum e especializado matemático tivesse conduzido a escolhas de modelos menos ponderadas, o facto de conhecer os contextos permitiu minimizar a aprendizagem menos correta destes conteúdos.

Evolução de Sara relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação

Seguidamente passarei a fazer uma descrição e análise, a partir da reflexão de Sara, sobre os vários tipos de conhecimento revelados por esta, durante a preparação, condução e reflexão das aulas, assim como, as dificuldades sentidas, superadas e por superar relativas aos vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística.

Conhecimento comum matemático

Sara fez uma reflexão positiva sobre a evolução do seu conhecimento da Estatística ao longo deste trabalho, dando destaque às distribuições bidimensionais:

Neste momento sinto que as minhas competências profissionais evoluíram bastante. Aquilo que eu usava, aquilo que eu tinha para ajudar os alunos e para preparar e para os ensinar ... agora estão muito mais ricos os conhecimentos que eu tenho! E acrescentei várias coisas aquilo que tinha! O facto de existir partilha e o trabalho colaborativo permitiram-me refletir, ter ideias tiradas de outros colegas e dessa forma a partir da partilha mudei.

Através da partilha de ideias consegui refletir melhor as coisas e descobrir que se consegue afinal aprofundar mais! Consegui ganhar mais confiança! O facto de trabalhar em grupo e conseguir produzir coisas novas e ver se funciona! Por exemplo, no caso das variáveis bidimensionais com tarefas de modelação que fizemos, foi uma grande confiança que eu ganhei este ano (Última entrevista, 25/07/12)

Atribuiu essa evolução ao facto de ter integrado uma equipa de trabalho colaborativo, destacando que as suas competências profissionais e conhecimentos sobre as distribuições bidimensionais melhoraram bastante, porque houve partilha, reflexão entre todas as professoras, ganhando confiança e segurança durante a leção do módulo de Estatística.

A forma como as tarefas foram construídas e a condução das aulas de modelação evidenciou que Sara necessita aprofundar conceitos inerentes às distribuições bidimensionais. Na entrevista final, embora referindo que o seu conhecimento evoluiu, não foi notório que tivesse percebido que alguns conceitos estavam pouco claros a até compreendidos de forma menos correta:

Eu senti que aprofundei o meu conhecimento sobre as distribuições bidimensionais. Estudei e debrucei-me sobre alguns aspetos a que não estava habituada. Estou a falar da regressão linear. Nunca tinha explorado este aspeto e para isso pedi para calcularem o coeficiente de correlação linear. (Última entrevista, 25/07/12)

Conhecimento comum não matemático

Sara explicou que à medida que foi aprofundando o conhecimento sobre a área profissional dos seus alunos, foram surgindo ideias para contextos reais. A partir dessas situações reais, Sara e os alunos pensaram em organizar uma gincana. Para esse efeito, a professora pensou numa forma de organizar e construir tabelas que permitissem recolher pontuações e tempos dos jogos da gincana:

No início não estava a ver muito bem como poderia arranjar variáveis na área do desporto e que pudessem relacionar-se. Ao pesquisar sobre a área profissional dos alunos, ao falar com eles e com os colegas das disciplinas técnicas, surgiram ideias para organizar uma gincana. Os contextos reais ajudaram muito e também o facto de os alunos perceberem do assunto. Depressa pensei em tabelas para recolher as pontuações e tempos de jogos. (Última entrevista, 25/07/12)

Nesta entrevista final, Sara reconheceu que os contextos reais foram um meio facilitador para a construção de instrumentos que permitiram recolher os dados. Esses instrumentos de recolha ajudaram, posteriormente, no estabelecimento de relações a partir do contacto direto com a realidade e senso comum:

Os alunos a partir do que viam e do que recolhiam estabeleceram relações baseadas no que conheciam. (Última entrevista, 25/07/12)

Conhecimento especializado matemático

Existiram aspetos que sofreram evolução quer devido à reflexão feita em conjunto com as colegas, quer devido a situações de aula que foram surgindo. Sara, tal como todas as outras professoras, nunca tido trabalhado o tema Estatística com esta profundidade e abordagem. As distribuições bidimensionais eram lecionadas no final do ano letivo e pouco exploradas e sem grande preocupação em preparar uma tarefa a partir de dados reais. De um modo geral, optava por seleccionar um exercício resolvido num manual:

As distribuições bidimensionais trabalhava-as, fazendo qualquer exerciciozinho ou dois exemplos ali mais no final do capítulo, mas em grande preocupação com a realidade. (Última entrevista, 25/07/12)

A importância que Sara dava ao ensino e aprendizagem das distribuições bidimensionais evoluiu de forma positiva. Ela explicou que antes lecionava estes conteúdos de forma muito superficial, não aprofundando muito porque não se sentia muito à vontade e nem sabia muito bem como explorar:

Acabava por fazê-lo de uma forma muito superficial, damos um exemplo e já está! Dava um exemplo do livro, porque não sabia muito bem como explorar e por isso dava de forma rápida e a partir de um exemplo já resolvido. (Última entrevista, 25/07/12)

Na reflexão que fez, explicou que os imprevistos surgidos em aula foram importantes para reajustes nas tarefas seguintes e permitiram repensar sobre as mesmas:

Às vezes deparava-me com dificuldades dos alunos, algumas coisas que eu não estava à espera e tentava melhorar de modo a que isso não acontecesse na próxima tarefa. Tudo isso vai contribuindo para que, tarefa após tarefa, as coisas sejam feitas de forma um bocadinho diferente. É claro que nem sempre é possível fazer modificações, mas penso que se consegue. As respostas que eles davam servia muitas vezes para reformular as outras tarefas seguintes. (Última entrevista, 25/07/12)

Conhecimento especializado não matemático

Sara mencionou que a forma como passou a conduzir as aulas e a ensinar evoluiu ao longo do ano letivo. As metodologias diversificaram-se e novas abordagens de conteúdos foram, por ela, adotadas destacando as tarefas de modelação:

Evoluiu imenso! Evoluiu e é sem dúvida graças a este trabalho que desenvolvemos em conjunto que me levou a ter mudanças na prática diferentes das que eu tinha até ao momento. Evoluí e acrescentei ao que já tinha, sendo uma mais-valia depois para os alunos. Até ao momento, eu diria até há seis meses atrás, provavelmente identificava-me muito mais com as aulas em que fazia explicações orais, esquemas, exercícios mais rotineiros. De momento, embora já usasse tecnologia, vi as suas potencialidades e nomeadamente, descobri que as tarefas de modelação permitiram ir mais além, sendo uma mais-valia para o ensino. (Última entrevista, 25/07/12)

Um dos maiores receios iniciais de Sara era não conseguir motivar os alunos para tarefas com estas características ou ainda não conseguir pensar em contextos reais com interesse para estes. Na entrevista final, reconheceu a importância dos contextos e atribuiu a estes o sucesso do trabalho desenvolvido junto dos alunos:

Sinto que eles, antes eu não tinha muitas expectativas relativamente ao envolvimento e desempenho deles, porque eles antes esperavam que as coisas lhes aparecessem feitas, não se envolviam muito. Nas tarefas envolveram-se mais do que nas aulas convencionais, mas de facto fui ao encontro das expectativas deles e foi uma forma de motivar e agarrar um bocadinho a turma através da motivação. Os recursos usados, nomeadamente o EXCEL foi bom para a motivação e o facto de estarem envolvidos na construção de grelhas e tabelas a partir dos dados resultantes dos contextos conhecidos, motivou-os e levou-os a envolverem-se... eu tinha algum medo inicial que não aderissem ou que não me surgisse nada motivador, mas foi muito bom. (Última entrevista, 25/07/12)

Um dos maiores receios apontados por Sara diz respeito às fases do ciclo de modelação. Segundo ela, no início, não sabia muito bem que questões colocar ou que estrutura de tarefa criar de modo a que todas as fases do ciclo de modelação fossem contempladas. Sara mencionou que ao experimentar e ao refletir sobre as tarefas, essas dúvidas foram-se dissipando:

Às vezes tínhamos a tarefa, mas agora, ok, o que fazer? Quero introduzir este tema, mas agora como é que vou fazer para passar por todas as fases? Será que funciona, será que...? Temos que testar, temos que... será que é preciso mudar algumas coisas? Mas foram dificuldades que se conseguem

ultrapassar. Às vezes custa o início, mas depois a primeira pergunta, surge a segunda, etc...pensei em tabelas, etc... (Última entrevista, 25/07/12)

Sara reconheceu que houve evolução relativamente à sua compreensão relativamente ao que é uma tarefa de modelação matemática:

As primeiras tarefas eram simples e não passavam por todas as fases de modelação que supostamente devia passar, mas só os conteúdos que tínhamos também não conseguíamos ir mais além, porque ao mexer em coisas que os alunos não sabiam à partida, não se conseguia conjugar tudo. Nas últimas tarefas, as das distribuições, já se conseguia mexer com tudo o que eles já conheciam e descobrir e aprender até ao momento... e já tínhamos um leque de informação muito grande que podíamos usar na modelação e já tínhamos muito mais ferramentas para fazer modelação. (Última entrevista, 25/07/12)

No quadro 11 apresento uma síntese que retrata o que Sara referiu como mais significativo da sua evolução e que procurei cruzar, essas evidências, com os vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística:

Quadro 11: Aspetos mencionados por Sara sobre a sua evolução

Tipos de conhecimento	Conhecimento matemático	Conhecimento não matemático
Comum	Aprofundou o seu conhecimento sobre as distribuições bidimensionais.	Passou a envolver os alunos na recolha de dados reais e construção de grelhas dos jogos; Pesquisou sobre a área profissional dos alunos; Reconheceu que os contextos reais foram um meio facilitador para o estabelecimento de relações entre variáveis e que estas surgiram naturalmente a partir do senso comum.
Especializado	Ao lecionar as distribuições bidimensionais deixou de selecionar exemplos do manual e passou a criar tarefas e a pensar em questões baseadas em dados reais, pesquisando possíveis associações entre variáveis estatísticas.	Passou a usar novas abordagens, metodologias e a usar mais recursos no ensino das distribuições bidimensionais, como por exemplo: ensinar a usar o EXCEL, a construir tabelas e gráficos de modo a que os alunos fossem bem sucedidos.

	Passou a dar maior importância ao ensino das distribuições bidimensionais.	
--	--	--

Síntese global relativa a Sara

Nesta última secção, faço uma síntese global sobre as características do conhecimento para ensinar Estatística de Sara, tendo em conta as dimensões que considero e que vão de encontro às três questões de investigação.

Sara e as características do conhecimento para ensinar Estatística revelado na prática de ensino com tarefas de modelação

Quadro síntese de Sara

Seguidamente, tendo em conta uma adaptação do modelo de Groth (2007) às várias fases do ciclo de modelação de Ferri (2006) quanto aos quatro tipos de conhecimento para ensinar Estatística, apresento, um quadro resumo (quadro 12) com evidências desses conhecimentos ao longo da preparação, condução e reflexão das aulas de modelação estatística:

Quadro 12: Aspetos do conhecimento de Sara para ensinar Estatística com tarefas de modelação para o estudo das distribuições bidimensionais (adaptado de Groth, 2007)

Fases da modelação	Tipos de conhecimento	Conhecimento matemático	Conhecimento não matemático
Construção da representação real	Comum	Reconheceu que poderiam emergir variáveis, a partir de um questionário e que poderiam relacionar-se; Reconheceu que poderiam emergir variáveis a partir de um evento desportivo e que poderiam relacionar-se.	Pesquisou sobre área profissional dos alunos, a fim de aprofundar o seu conhecimento sobre gestão desportiva; Identificou uma situação real relacionada com características físicas e motoras de crianças do pré-escolar, porque esteve em contacto com o terreno;

			Soube construir instrumentos de recolha de dados adequados (questionários e tabelas de registo de pontuações e tempos de jogos).
	Especializado	Proporcionou durante a “observação” das respostas aos questionários e recolha de dados, no dia da gincana, oportunidade de discussão e incitou os alunos a “olharem” para os dados e observarem as crianças de modo a estabelecerem relações.	Reconheceu eventual conhecimento dos alunos sobre contextos da situação em estudo porque são alunos de gestão desportiva; Nas tarefas usou intencionalmente fotos ou imagens que levaram à construção da representação real vivida e que a professora teve intenção de levar à motivação e interesse pela realização das tarefas.
Construção do modelo real	Comum	Compreendeu que existiam possíveis associações lineares ou não entre as várias variáveis estatísticas, compreendendo a importância da construção de tabelas e diagramas de dispersão para organizar os dados; Revelou um uso não consistente dos termos tipo de correlação; Pareceu não atribuir importância ao aparecimento de <i>outliers</i> nos diagramas de dispersão.	Construiu tabelas e diagramas de dispersão com recurso ao EXCEL; Revelou saber que no EXCEL, a representação de números decimais faz-se com vírgula.
	Especializado	Usou como exemplo introdutório ao estudo das distribuições bidimensionais, uma tabela escolhida a partir de um manual.	Reconheceu dificuldades na construção de tabelas, pois umas crianças tinham respostas a todas as questões dos

		<p>No entanto, poderia ter usado uma com dados reais;</p> <p>A partir dos modelos reais obtidos, poderia ter explorado a partir da representação gráfica dos dados, qual poderia ser a influência da eliminação de um <i>outlier</i> no estudo do grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis.</p>	<p>questionários, outras não tinham feito todos os jogos, e no entender da professora poderia suscitar dúvidas na organização dos dados e ajudou os alunos nesse sentido;</p> <p>Reconheceu o EXCEL como uma boa ferramenta para a construção dos modelos reais e ensinou os alunos a usá-lo.</p>
Construção do modelo matemático	Comum	<p>Reconheceu a adequabilidade da equação da reta de regressão linear aos conjuntos de dados.</p> <p>Reconheceu que duas variáveis podem estar associadas linearmente, positivamente, negativamente e terem uma associação não clara;</p> <p>Revelou saber que nem sempre a tendência de pontos é linear, podendo haver associações não lineares entre variáveis;</p> <p>Não demonstrou saber que o valor do coeficiente de correlação linear é uma medida que só mede a associação linear entre duas variáveis;</p> <p>Pareceu não dar importância ao aparecimento de <i>outliers</i> e ao efeito da sua eliminação na construção da reta de regressão linear;</p> <p>Escolheu um modelo matemático a partir</p>	<p>Usou o EXCEL como recurso para construir várias linhas de tendência.</p>

		do cálculo e interpretação do valor da raiz quadrada do coeficiente de determinação, denominando-o por coeficiente de correlação linear.	
	Especializado	<p>Usou um exemplo retirado de um manual para explicar como construir um modelo matemático. No entanto, tinha dados reais ao seu dispor;</p> <p>O conhecimento comum matemático interferiu, por vezes, na forma como colocou questões: A professora solicitou tipos de correlação distintos, quando quis pedir a construção de modelos de regressão linear que levassem ao estudo do grau da intensidade da associação linear entre as várias variáveis estatísticas; Pareceu não dar importância à colocação de questões que explorasse o facto de existirem <i>outliers</i>;</p> <p>A professora desconhece em que situações em que se usam alguns termos e usou-os quer no enunciado da tarefa, quer durante a condução e reflexão sobre a aula;</p> <p>Deu importância à elaboração de questões que levassem à construção dos vários</p>	<p>Durante a condução da aula dirigiu-se aos alunos e circulou pelos lugares a fim de verificar se as tabelas estavam bem construídas, pois caso contrário comprometeria a construção adequada do modelo matemático pretendido;</p> <p>Ensinou os alunos a construir vários modelos matemáticos a partir do diagrama de dispersão.</p>

		modelos de regressão.	
Obtenção de resultados matemáticos	Comum	Demonstrou saber a importância de testar o modelo matemático e solicitar previsões dentro do intervalo de dados ou para valores muito próximos destes; Reconheceu a validade da utilização da reta de regressão linear para a previsão de valores; Compreendeu o significado do x e do y na função que representava o modelo matemático.	Evidenciou saber que as previsões devem ser pedidas tendo em conta o contexto real; Usou o EXCEL para fazer substituições no modelo matemático e obter resultados.
	Especializado	Soube colocar, questões no sentido de clarificar o significado do x e do y a fim de os alunos conseguirem interpretá-los e compreenderem como trabalhar o modelo matemático.	Ensinou a usar o EXCEL, de modo a fazer corretamente substituições no modelo matemático escolhido.
Interpretação de resultados matemáticos	Comum	Reconheceu que os resultados matemáticos obtidos são possibilidades para uma dada amostra e contexto e que o modelo matemático tem limitações; Compreendeu os resultados matemáticos obtidos, tendo em conta o seu sinal e ordem de grandeza.	Conseguiu interpretar os resultados matemáticos obtidos a partir do modelo, tendo em conta a realidade.
	Especializado	Conduziu as aulas estabelecendo diálogos de modo a que não surgissem interpretações erradas a partir dos	Antecipou interpretações incorretas dos alunos a partir dos resultados matemáticos obtidos e previu

		resultados matemáticos obtidos.	esclarecimentos apelando ao sentido crítico tendo em conta o que conhecem da situação real; Reconheceu a importância de conhecer os contextos reais para interpretar adequadamente os resultados matemáticos obtidos.
Validação do modelo matemático	Comum	Reconheceu que para validar um modelo é necessário interpretar os resultados matemáticos: evidenciou esse conhecimento na forma como estruturou as tarefas; Parece não dar importância à necessidade de procurar outros modelos matemáticos no caso de refutar o inicial.	Não reconheceu que o contexto real pode ser um indicador de um modelo matemático ser refutado em prol de outro, uma vez que não sentiu necessidade de construir outro, caso não se adequasse à amostra.
	Especializado	Pareceu nem sempre saber como questionar os alunos sobre em que condições, ou para que amostra, determinado modelo poderia ser válido, deixando por explorar algumas situações surgidas durante a realização das tarefas.	Revelou compreender a importância de solicitar questões que apelassem à comparação entre as conjecturas inicialmente estabelecidas e as conclusões obtidas a partir das interpretações emergentes dos resultados matemáticos, na identificação da validade de um modelo matemático.

Caracterização global do conhecimento para ensinar Estatística de Sara

A partir da análise do quadro e relativamente a cada tipo de conhecimento para ensinar Estatística, destaco o que se revelou mais robusto e frágil de Sara:

Conhecimento comum matemático: Sara ao longo da preparação das tarefas e condução das aulas evidenciou estar à vontade com alguns conteúdos estatísticos e mais insegura quanto a outros, demonstrando que desconhece alguns aspetos.

Sara revelou conhecer que nem sempre os dados seguem uma tendência linear e compreendeu que a interpretação do valor do coeficiente de correlação informa acerca do tipo de associação linear entre duas variáveis estatísticas. A professora evidenciou saber que se devem efetuar cálculos a partir do modelo para determinar previsões no intervalo de possibilidades e reconheceu a importância da equação da reta de regressão linear para prever resultados, assim como dos outros modelos surgidos em outras tarefas de modelação. Sara demonstrou compreender que por vezes os alunos consideram apenas a existência de associação entre duas variáveis, quando o sinal do coeficiente de correlação linear é positivo, rejeitando a associação inversa como algo pouco aceitável.

Sara cometeu algumas incorreções quanto à terminologia usada, evidenciando que alguns conceitos carecem de clarificação e aprofundamento. Algumas vezes referiu-se ao tipo de correlação quando pretendia saber se, tendo em conta o valor do coeficiente de correlação linear obtido, a associação linear entre as variáveis era positiva, negativa ou pouco clara. Durante as entrevistas que antecederam as aulas, foi notória alguma confusão entre o que se entende por relação entre duas variáveis bidimensionais (direta ou inversa) e interpretação do coeficiente de correlação linear como medida do grau de associação linear entre as duas variáveis. Sara pretendeu dizer que o valor do coeficiente de correlação linear pode ser positivo, negativo ou ser nulo e como tal poder-se-á concluir que a relação entre duas variáveis poderá ser direta ou inversa e associação linear entre estas ser: positiva, negativa ou não clara. Sara solicitou aos alunos que estes escolhessem os modelos matemáticos, tendo em conta o valor do coeficiente de correlação linear, quando se queria referir à raiz quadrada do valor do coeficiente de determinação. A sua intervenção durante as aulas e as questões colocadas nas tarefas demonstraram que desconhece que o valor do coeficiente de correlação é uma medida que apenas mede o grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis e não outra e esse termo só se usa nessas condições. Este conhecimento menos correto influenciou outros tipos de conhecimento, nomeadamente o conhecimento especializado matemático, pois ao

preparar as questões teve em conta essa ideia. Foi evidente a complexidade inerente ao ensino e aprendizagem sobre dados e relações bivariadas.

Conhecimento comum não matemático: No que diz respeito ao conhecimento comum não matemático, observou-se que Sara revelou neste caso um bom domínio, conhecendo detalhes da realidade a estudar. Isto deve ficar a dever-se ao facto de num momento anterior ter havido contato com o terreno e a professora ter aprofundado o seu conhecimento sobre a área profissional dos alunos, procurando assim temas de interesse e apelativos para estes. Após pesquisar sobre a área profissional dos alunos, ter falado com os colegas das disciplinas técnicas e as colegas numa das sessões de trabalho colaborativo, Sara pensou numa forma de operacionalizar a recolha de dados reais, levando à construção de instrumentos de registo e recolha de dados de acordo com as atividades desportivas planificadas pelos seus alunos. Depois de ter pensado, conjuntamente com os alunos, em atividades que poderiam realizar com as crianças do pré-escolar, Sara e os alunos criaram tabelas de registo de pontuações e tempos para os jogos que integrariam a gincana. Na primeira tarefa (antes das de modelação) e em outras não descritas neste estudo, Sara reconheceu que se devia proceder à limpeza dos dados.

Em muitas ocasiões, os dados que foram usados tiveram que ser alvo de maior atenção, porque relativamente aos questionários, nem todas as crianças tinham dados referentes a todas as questões, e no que diz respeito às tabelas de registo dos jogos, algumas crianças não realizaram todas as atividades. Relativamente ao que já foi descrito sobre a limpeza dos dados, Sara para além de ter demonstrado conhecer a importância de o fazer, revelou entender que o deveria fazer devido ao que conhecia também dos contextos reais. Crianças que não tinham realizado os jogos, ou cujos questionários não estavam completos, não poderiam conduzir a modelos reais ou matemáticos (modelos de regressão) corretos e adequados à situação real.

Conhecimento especializado matemático: No que diz respeito a este tipo de conhecimento, parece que há alguma in experiência na abordagem destes conteúdos em sala de aula. Por exemplo, na primeira tarefa de modelação, Sara pensou numa forma de fazer uma explicação sobre os vários conteúdos inerentes às distribuições bidimensionais e para isso preparou e apresentou um conjunto de diapositivos, recorrendo simultaneamente ao EXCEL. A professora dispondo de dados reais, poderia tê-los usado como exemplo, para fazer uma primeira abordagem às distribuições bidimensionais, optando por usar um exemplo de um manual e cuja prática era a usual.

O conhecimento comum matemático evidenciado por Sara, relativamente ao desconhecimento que o coeficiente de correlação linear mede apenas a associação linear entre duas variáveis, interferiu no conhecimento especializado matemático. Levou a que durante a condução das aulas e mesmo na forma como redigiu as questões da tarefa, à escolha de um modelo matemático baseado num pressuposto menos correto. Outras explorações poderiam ter sido feitas. Por exemplo, durante a exploração da quarta questão da terceira tarefa de modelação, Sara poderia ter explorado em sala de aula, o facto de existirem *outliers*, mas a forma como interveio perante os vários grupos, não demonstrou que atribuísse importância a este facto. Embora, a professora colocasse questões que apelassem à comparação entre os resultados matemáticos e a realidade, não solicitou aos alunos, nem na fase de preparação, nem durante a condução da aula, que estes refletissem sobre a necessidade de construir outro modelo matemático, caso não validassem o inicial. O facto de este aspeto não ter sido explorado, reflete que na sua planificação esta situação não foi pensada ou por desconhecimento ou por nunca ter sido trabalhada em sala de aula e não fazer parte da sua prática habitual. Sara demonstrou nem sempre estar preparada para responder às necessidades e intervenções dos seus alunos.

No entanto, existiram aspetos positivos. Quando durante a primeira aula de modelação, a professora introduziu os conteúdos referentes aos dados bivariados, não se limitou a falar de retas, mas também de curvas que poderiam se ajustar melhor à nuvem de pontos e deu um exemplo, colocando questões aos seus alunos. A professora apelou aos conhecimentos já anteriormente lecionados aquando do módulo “Funções polinomiais”, o que demonstrou que ela pensou numa forma de abordar o que pretendia ensinar, tendo em consideração o que os alunos já conheciam. Durante a fase de discussão, na última aula de modelação, Sara colocou questões pertinentes sobre o tipo de associação possível entre as duas variáveis estudadas, tendo em conta a tendência dos pontos constante na representação dos dados, valorizando a representação gráfica. Deste modo, soube como suscitar uma reflexão rica sobre a análise gráfica dos dados para concluir acerca de uma possível associação entre duas variáveis. Na primeira e segunda tarefa, a professora interpelou os alunos sobre a previsão de dados para valores fora do intervalo de dados com o intuito de perceberem que o modelo linear obtido só era válido para a amostra de crianças conhecida. Embora não tenha colocado, nas tarefas uma questão que perguntasse diretamente sobre a validade do modelo, através de questões colocadas durante as aulas, conseguiu que compreendessem em que contexto seria válido.

Em suma, notou-se, que durante o estudo das distribuições bidimensionais, Sara esteve à vontade com o modelo de regressão linear, mas numa das tarefas em que os alunos poderiam estudar outros modelos de regressão, foi notória alguma insegurança por parte dela, na solicitação de justificações aos alunos e interpretação das linhas de tendência e validação desses modelos. O conhecimento comum matemático evidenciado pela professora, relativamente a alguma fragilidade quanto a terminologia usada e alguma falta de aprofundamento de conceitos estatísticos, interferiu no conhecimento especializado matemático, porque levou a algumas vezes, durante a condução da aula e preparação das questões, ao uso de uma linguagem associada às distribuições bidimensionais menos correta.

Conhecimento especializado não matemático: Durante as entrevistas que antecederam as aulas e planificações, a professora anteviu dificuldades nas várias fases da concretização de cada tarefa, nomeadamente no uso do EXCEL e construção de tabelas e gráficos, o que evidenciou que esta teve em conta os conhecimentos não matemáticos dos alunos e ausência de alguns pré-requisitos. Para a minimização dessas dificuldades, apresentou, durante as entrevistas, algumas possíveis intervenções. Para além disso, em muitas situações imprevistas de aula conseguiu gerir a aula na condução do sucesso dos seus alunos. Sara teve o cuidado de introduzir diálogos (estabelecidos pelos alunos durante a gincana ou aulas) e/ou fotos que tiveram o propósito de não só levar à construção da representação real, como levar à mobilização do conhecimento extra matemático dos alunos. As fotos despertaram curiosidade e revelaram-se importantes, dando significado aos dados que tinham sido recolhidos a partir dos questionários. Sara teve o cuidado de apresentar exemplos de tabelas de modo a facilitar a construção das mesmas por parte dos alunos. Neste sentido, Sara fez referência ao contexto real e à situação conhecida pelos alunos com o intuito de ensinar os alunos a construir corretamente uma tabela com recurso ao EXCEL. Na construção dos modelos matemáticos, a professora teve o cuidado de ensinar os alunos como construir vários modelos matemáticos em simultâneo. Para isso, solicitou que construíssem um diagrama de dispersão para cada modelo matemático pretendido. Teve o objetivo de permitir uma rápida comparação entre os vários modelos, reconhecendo assim o uso do EXCEL como um recurso fundamental para o estudo das distribuições bidimensionais e um meio facilitador na construção e visualização de vários modelos matemáticos, garantindo o sucesso dos alunos e dando sentido aos dados. Este conhecimento revelou-se robusto.

Em suma, o conhecimento não matemático revelou-se robusto e o conhecimento matemático evidenciou alguma fragilidade. Foi notório que o conhecimento comum matemático influenciou e condicionou o conhecimento especializado matemático, quer na forma como preparou as tarefas, quer na forma como conduziu as aulas. O conhecimento dos contextos favoreceu o ensino e aprendizagem das distribuições bidimensionais e proporcionou oportunidade da professora sentir necessidade de aprofundar o seu conhecimento não matemático, levando a interpretações e conclusões interessantes sobre os resultados matemáticos. Desta forma, conseguiu pensar em questões mais ricas e desafiadoras, e durante a condução das aulas conseguiu compreender e ultrapassar alguns constrangimentos, que se não conhecesse o contexto real, seria mais difícil de contornar.

Sara e o conhecimento para ensinar Estatística nas diferentes fases das tarefas de modelação estatística

A partir da análise do quadro e relativamente a cada fase de modelação, destaco os conhecimentos que foram evidenciados como robustos e os que estiveram mais frágeis:

Construção da representação real: Nesta fase de modelação, todos os tipos de conhecimentos revelaram-se robustos. Sara demonstrou saber: identificar variáveis a partir de um dado contexto (conhecimento comum matemático); pesquisar e aprofundar sobre a área profissional dos seus alunos e construir instrumentos que permitissem recolher dados reais a partir de jogos (conhecimento comum não matemático); incitar os alunos a observarem os dados e assim estabelecerem relações entre as variáveis. As questões iniciais foram abertas e ricas, relacionadas com a sua área profissional e conduziram ao estabelecimento de conjecturas e formulação do problema em estudo (conhecimento especializado matemático); usou fotos do registo direto da situação como uma forma de levar à construção da situação real (Ferri, 2006) (conhecimento especializado não matemático).

Construção do modelo real: Nesta fase, o conhecimento não matemático foi robusto, mas o conhecimento matemático manifestou alguma fragilidade. Quanto ao conhecimento não matemático, Sara demonstrou saber: construir tabelas e diagramas de dispersão com recurso ao EXCEL (conhecimento comum); ensinar os alunos a usar corretamente o EXCEL na construção das tabelas de modo a garantir o sucesso dos mesmos (conhecimento especializado); Relativamente ao conhecimento matemático,

Sara revelou na construção do modelo real, um uso não consistente dos termos correlação e associação (conhecimento comum) e não usou, como exemplo introdutório ao estudo das distribuições bidimensionais, uma tabela com dados reais, mas sim uma escolhida a partir de um manual (conhecimento especializado). No entanto, teve o cuidado de conduzir os alunos à formulação do problema da investigação estatística—colocando questões iniciais desafiadoras, relacionadas com a sua área de interesse e alcançáveis de serem resolvidas, facilitando assim a construção do modelo real.

Construção do modelo matemático: Nesta fase, o conhecimento não matemático revelou-se robusto, mas o conhecimento matemático manifestou alguma fragilidade, quer nos conteúdos estatísticos que demonstrou não estarem bem clarificados, quer na forma como preparou ou conduziu as aulas. Quanto ao conhecimento não matemático, a professora demonstrou saber: usar o EXCEL na construção de vários modelos matemáticos (conhecimento comum); ensinar a usar o EXCEL, na construção de vários modelos matemáticos a partir dos diagramas de dispersão; colocar questões desafiadoras no sentido dos alunos assumirem um papel mais ativo na sua aprendizagem e questões abertas e estaticamente ricas relacionadas com a sua área profissional de modo a entenderem, a partir da mobilização do conhecimento extra matemático, a partir das tabelas, se os modelos matemáticos estavam ou não bem construídos (conhecimento especializado). No que concerne ao conhecimento matemático, surgiram alguns constrangimentos. Sara demonstrou: não saber que o coeficiente de correlação linear mede apenas a associação linear entre duas variáveis e não outra (conhecimento comum); não aproveitou o facto de existirem *outliers*, para colocar questões que permitissem estudar a influência da eliminação desses pontos na reta de regressão linear e no valor do coeficiente de correlação linear, demonstrando não atribuir importância a este aspeto na exploração das aulas (conhecimento especializado).

Obter resultados matemáticos: Nesta fase de modelação, todos os tipos de conhecimento revelaram-se robustos. Sara demonstrou: saber que se deve testar o modelo matemático e solicitar cálculos a partir do modelo para determinar previsões no intervalo de possibilidades (conhecimento comum matemático); reconhecer que as previsões devem ser solicitadas tendo em conta o contexto real (conhecimento comum não matemático); saber colocar questões no sentido de clarificar o significado do x e do y , a fim dos alunos conseguirem interpretá-los e compreenderem como trabalhar com o modelo matemático (conhecimento especializado matemático); saber ensinar a usar o

EXCEL, de modo a conduzir os alunos a fazerem substituições no modelo matemático escolhido e a obterem resultados matemáticos (conhecimento especializado não matemático), sendo assim o computador um recurso decisivo para trabalhar com os alunos uma matemática mais realista.

Interpretar resultados matemáticos: Nesta fase, todos os tipos de conhecimentos revelaram-se robustos. Sara evidenciou saber: que os resultados matemáticos obtidos são possibilidades para uma dada amostra e que os modelos matemáticos apresentam limitações tendo em conta o contexto real (conhecimento comum matemático); interpretar os resultados matemáticos obtidos a partir do que conhece da realidade (conhecimento comum não matemático); como conduzir as aulas estabelecendo diálogos de modo a que não surgissem interpretações erradas a partir dos resultados matemáticos obtidos (conhecimento especializado matemático), monitorizando o trabalho dos alunos e levando à reflexão sobre a evolução da produção matemática e à exploração de novas ideias em discussão com os colegas; reconhecer a importância de conhecer os contextos reais para interpretar adequadamente os resultados matemáticos obtidos (conhecimento especializado não matemático), de modo a relacionar o conhecimento do contexto com o conhecimento estatístico, relacionando os dados da situação com os dados obtidos.

Validação do modelo matemático: Nesta fase, Sara revelou alguma fragilidade na maioria dos conhecimentos. Demonstrou saber compreender a importância de solicitar questões que apelassem à comparação entre as conjecturas inicialmente estabelecidas e as conclusões obtidas a partir das interpretações emergentes dos resultados matemáticos (conhecimento especializado não matemático). Não reconheceu: a importância da necessidade de procurar outros modelos matemáticos no caso de refutar o inicial (conhecimento comum matemático); que o contexto real pode ser um indicador de um modelo matemático ser refutado em prol de outro, uma vez que não sentiu necessidade de construir outro, caso não se adequasse à amostra (conhecimento comum não matemático); a necessidade de questionar os alunos sobre em que condições, ou para que amostra, determinado modelo poderia ser válido, deixando por explorar algumas situações surgidas durante a realização das tarefas (conhecimento especializado matemático).

Em suma, as fases de modelação que evidenciaram maior fragilidade nos vários tipos de conhecimento foram: a construção do modelo real, a construção do modelo matemático e a validação do modelo matemático. Quanto às restantes fases, Sara

evidenciou robustez nos vários tipos de conhecimento, embora seja evidente alguma fragilidade no conhecimento matemático.

Sara e as dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística

Destacam-se, a seguir, as dificuldades de Sara relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que se evidenciaram ao longo das fases das práticas de ensino de aulas de modelação estatística. Na primeira tarefa desta fase de “pré-modelação”, durante a entrevista de reflexão pós aula, Sara mencionou que sentiu dificuldades em focar a atenção dos alunos no que pretendia que fizessem na tarefa. Explicou que isto deveu-se à característica pouco usual desta tarefa, onde os alunos assumiam um papel mais ativo. Para além disso, houve uma dificuldade, por ela referida na entrevista pós aula, relacionada com a gestão do tempo. Sara explicou que a tarefa estava extensa e nem todos os alunos conseguiram chegar ao fim. Problema esse, que ela afirmou ter de rever no futuro. Na quarta tarefa desta fase de “pré-modelação”, essa dificuldade foi ultrapassada e a professora começou a ter maior atenção a este aspeto da gestão do tempo, diminuindo o número de questões.

Em ambas as tarefas da fase de “pré-modelação”, Sara durante as entrevistas de reflexão imediata pós aula, referiu que todas as fases do ciclo de modelação estiveram presentes. Segundo ela, a passagem dos dados reais, que constavam numa tabela, onde para cada criança constavam os dados dos questionários e jogos, para uma tabela onde os organizava segundo as variáveis em estudo, correspondia ao modelo matemático. A obtenção de resultados matemáticos (outra das fases de modelação), segundo Sara, eram as frequências simples e relativas calculadas pelos alunos. Este aspeto evidenciou que a professora, nesta fase, ainda não tinha clarificado o que distingue um modelo real de um modelo matemático.

Na primeira e segunda tarefa de modelação, Sara não se referiu, durante a entrevista pós aula, a nenhuma dificuldade sentida durante a preparação da tarefa ou condução da aula. No entanto, foram evidentes algumas dificuldades por superar, nomeadamente relativamente ao conhecimento comum matemático e conhecimento especializado matemático. Na preparação da primeira e segunda tarefa de modelação e condução da aula, Sara demonstrou ter dificuldade, em usar termos relacionados com correlação e associação entre duas variáveis. Constatou-se que esta dificuldade, relativamente a um uso não consistente dos termos correlação e associação continuaram

por superar. Foi notória alguma confusão entre o que se entende por relação entre duas variáveis (direta ou inversa) e interpretação do valor de coeficiente de correlação linear, como medida do grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis. Durante a entrevista pré aula e condução da aula da terceira tarefa de modelação, Sara continuou a demonstrar dificuldades relativamente ao conhecimento que evidencia ter sobre os conteúdos estatísticos relacionados com as distribuições bidimensionais. Estas dificuldades não foram identificadas pela professora, uma vez que esta não tinha consciência de algum desconhecimento sobre este assunto. Essas dificuldades persistiram e continuaram por superar.

O conhecimento comum matemático, que evidenciou ter sobre estes conteúdos, continuou a interferir na forma como formulou as questões no enunciado escrito das tarefas e condução das aulas.

Quanto ao conhecimento especializado matemático, Sara não conseguiu prever, em nenhuma das tarefas, que o modelo matemático poderia ser refutado e, como tal, nem no enunciado das tarefas e nem durante as aulas, colocou questões que levasse à procura de um outro modelo mais adequado. Neste caso, revelou inexperiência na gestão deste tipo de situações. Tendo em conta as dificuldades evidenciadas e que passaram despercebidas por parte de Sara, podemos dizer que o conhecimento matemático revelou alguma fragilidade. Durante a entrevista pós aula da terceira tarefa, Sara consciencializou-se que durante a fase de validação, deve explorar, no futuro, melhor esta fase e colocar questões que permitam conduzir a uma maior reflexão, por parte dos alunos, sobre a adequabilidade de dado modelo matemático e, caso seja refutado, tenham de construir outro. Neste sentido, parece ter havido uma evolução relativamente a esta dificuldade e estar superada.

Na terceira tarefa de modelação, Sara já se referiu, durante a entrevista pós aula, a algumas dificuldades sentidas durante a condução da aula. Relativamente às dificuldades sentidas e referidas por Sara, esta destacou a fase de testagem do modelo matemático. A professora explicou que não previu algumas situações e que não se deu conta, quando resolver previamente a tarefa, que iriam surgir valores negativos a partir de um dos modelos matemáticos obtidos. Reconheceu que não explorou bem a situação, uma vez que foi surpreendida. No entanto, mencionou que o contexto real permitiu-lhe “dar volta à situação” e tentar minimizar o impacto do imprevisto surgido. Sara explicou que tomou consciência que não tinha preparado bem a aula. Foi notório que o facto de desconhecer alguns aspetos inerentes aos conteúdos sobre as distribuições bidimensionais

(conhecimento comum matemático) interferiu com o seu conhecimento especializado matemático, expondo-a a situações que por vezes suscitaram imprevistos.

Durante a entrevista pós aula da última tarefa, Sara confessou que perdeu o medo inicial de trabalhar com modelação matemática, tendo ultrapassado essa dificuldade inicialmente sentida, atribuindo esse aspeto ao facto de ter integrado uma equipa de trabalho colaborativo.

Capítulo 7 – Patrícia

Patrícia integrou um grupo colaborativo que preparou uma experiência de ensino no domínio da Estatística, em particular do ensino das distribuições bidimensionais, com base em tarefas de modelação. Este capítulo procura dar a conhecer como a professora viveu a experiência de ensino, desde a preparação, condução e reflexão sobre o ensino, dando evidências do conhecimento para ensinar Estatística revelado por ela. Esta professora fez parte de uma equipa de trabalho colaborativo, durante um ano letivo, estando a lecionar o curso profissional de técnico de Apoio à Infância.

Este capítulo está dividido em nove partes: a primeira procura retratar a pessoa e a professora; a segunda a relação com o trabalho colaborativo; a terceira faz a caracterização geral da experiência de ensino realizada por Patrícia, onde é explicada as razões que levaram a optar por uma determinada seleção de tarefas e com que propósito; a quarta descreve a fase anterior à modelação e que foi denominada pelas professoras por fase de “pré-modelação”; da quinta à sétima parte é feita uma descrição da preparação de três tarefas de modelação estatística (sobre as distribuições bidimensionais), condução e reflexão das aulas onde foram implementadas, procurando evidências que permitiram compreender o conhecimento para ensinar Estatística da professora em vários momentos. Na última parte é apresentada uma reflexão global, por parte da professora, sobre a experiência de ensino, nomeadamente sobre as dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que foram sentidas e como as superou e as que ficaram por superar. Por último, segue-se uma síntese que caracteriza o conhecimento para ensinar Estatística de Patrícia, tendo em conta as três dimensões que considero:

- Práticas de ensino com tarefas de modelação;
- Diferentes fases de desenvolvimento das tarefas de modelação;
- Dificuldades que se evidenciaram na preparação, condução e reflexão das aulas de modelação estatística.

Na caracterização e interpretação do conhecimento da professora foi usado como referência o quadro de análise definido no capítulo de revisão de literatura, que cruza as

fases de modelação (Ferri, 2006) com os vários tipos de conhecimento estatísticos para ensinar propostos por Groth (2007).

A pessoa e a professora

Patrícia no início do projeto tinha 33 anos e sentia uma enorme curiosidade em lecionar, pela primeira vez, a turmas do ensino secundário profissional e integrar uma equipa de trabalho colaborativo. Patrícia é uma pessoa que gosta de aprender e procura estar em constante aprendizagem e formação. É uma pessoa muito calma e tranquila e essa sua maneira de ser transparece na forma como se relaciona com os alunos e no ambiente de sala de aula que consegue criar.

A Patrícia foi atribuída uma turma constituída apenas por raparigas, o que é explicável devido à natureza do curso: curso profissional técnico de Apoio à Infância.

A sua simpatia, forma metódica e vontade de aprender é uma característica forte da sua personalidade que se reflete quer na sua vida pessoal quer profissional. A procura constante por melhorar e progredir faz dela uma pessoa bastante autocrítica e reflexiva.

Patrícia é uma jovem bonita e com ar jovial criando muito facilmente empatia com quem a rodeia, quer colegas, quer alunos.

Patrícia é licenciada em Matemática - Ramo de Formação Educacional e em Engenharia Civil e tem, também, um mestrado em Administração e Gestão escolar. Para além disso, durante o desenrolar deste projeto, começou a frequentar o doutoramento em Didática da Matemática. Tem frequentado, ao longo dos anos, inúmeras ações de formação em diversas áreas. Até ao momento tinha 9 anos de serviço, tendo interrompido, durante um ano, o seu percurso enquanto professora para experimentar trabalhar em engenharia civil. Patrícia, à exceção do ensino profissional e Matemática Aplicada às Ciências Sociais, já lecionou todos os níveis de ensino. Sempre gostou de Matemática e sempre teve apetência pelo cálculo, o que constituiu um fator decisivo na escolha profissional, justificando o facto de ser professora desta disciplina da seguinte forma:

É o gosto pela Matemática, é o gosto pelas ciências exatas, foi por isso que escolhi isso, depois acabei também por tirar engenharia, é o gosto pelo cálculo, da Matemática em si, é mesmo o gosto pela Matemática! (Primeira entrevista, 15/10/11)

Patrícia afirmou que sempre pensou ser professora, mas como também gostava de engenharia resolveu experimentar. O gosto pelo ensino falou mais alto e quando questionada se alguma vez gostaria mudar de profissão, ela referiu que já o fez e voltou porque gostava do que fazia e de estar em contacto com pessoas:

Bem, já tentei mudar e mudei! Já tentei mudar, mudar não, como eram dois gostos, acabei por experimentar engenharia civil, só na parte de projeto, porque lá está, gosto da parte de cálculo, não gostava da parte de obra, mas estive a trabalhar lá e senti que gostava mais do ensino e por isso voltei. Eu desde pequenina que dizia sempre que queria ser professora, não há muito por onde fugir. Se eu mudasse teria de ser alguma coisa que fosse relacionado com pessoas e o que eu senti na engenharia foi exatamente isso, na engenharia, como era só projeto sentia-me muito isolada, tinha que ser uma coisa que me levasse a contactar com o público. (Primeira entrevista, 15/10/11)

Para Patrícia, um bom professor é alguém que, para além de conseguir ensinar as matérias, seja capaz de criar um clima de sala de aula propício à aprendizagem e transmita o gosto pela Matemática:

Um bom professor é um alguém que consegue transmitir as suas mensagens, não só em termos de matéria, mas também chegar aos alunos de maneira a que leve os alunos simpatizar com ele e que consiga que um aluno que não goste de Matemática, comece a tentar e comece a perceber que se começar a fazer, a entender, começa a gostar. (Primeira entrevista, 15/10/11)

Patrícia valoriza a relação que estabelece com os alunos, pois defende que estes devam sentir-se à vontade para questionar e esclarecer dúvidas. Para ela, um bom aluno tem de perceber que pode sentir-se à vontade para questionar, mas que saiba estar em sala de aula e respeite as regras:

Um bom aluno é um aluno que sabe estar numa sala e que se sinta à vontade para perguntar. Eu costumo dizer sempre no primeiro dia e ao longo do ano: se alguém perguntar eu repito dez vezes se for preciso, mas é preciso que seja um aluno esforçado e aplicado, não precisa ser aquele aluno que tem boas notas, tem que ser um aluno que é esforçado! (Primeira entrevista, 15/10/11)

Patrícia caracteriza-se como paciente e espera que os alunos cumpram as suas regras, explicando sempre o porquê das suas ações. Para ela é importante ajudar os alunos com mais dificuldades, utilizando muitas vezes reforço positivo relativamente às suas

prestações e desempenhos. O facto de conseguir com que alunos com maiores problemas à disciplina consigam melhorar e alcançar o sucesso, é motivo de satisfação para ela:

É assim, eu acho que sou paciente porque sou uma pessoa que evita ao máximo zangar-me e se me zangar acabo por chamar sempre o aluno no fim da aula para tentar, entre aspas, explicar porque me zanguei. Gosto sempre de ajudar os mais fraquinhos e de motivá-los e dizer: estás a ver, agora aqui, agora tens que acertar nesse, agora tens que acertar naquele e gosto muito quando chego ao fim do ano e consigo dar positiva a um aluno assim, e para mim se houver um que eu consiga fazer isso já fico satisfeita no fim do ano! (Primeira entrevista, 15/10/11)

Enquanto professora, o que gosta mais é de estar com os alunos e de preparar tarefas e aulas para eles. Quando prepara algo pensado para determinados alunos e eles não correspondem, sente-se frustrada e desiludida. Patrícia tem o cuidado de preparar as tarefas com a expectativa destas serem sempre do agrado dos alunos:

Gosto de estar dentro da sala de aula com eles! Gosto de preparar tarefas, eventualmente se resultam, mas nem sempre isso acontece, às vezes preparamos tarefas e eles não aderem. Não é que me dê menos prazer, às vezes desiludo-me quando preparo uma coisa toda bonitinha, toda cheia de um *power point* todo bonito e depois chego ao fim da aula e não resultou, não é que me dê menos prazer, mas são as desilusões, não é?! Gosto de preparar tarefas que lhes agradem. (Primeira entrevista, 15/10/11)

Patrícia e o trabalho colaborativo

Quando falei com Patrícia sobre a ideia para este projeto, mostrou-se de imediato disponível e voluntariou-se para trabalhar em equipa. Ao ser questionada sobre o porquê de integrar uma equipa de trabalho com esta natureza e que se debruçaria sobre a modelação matemática mencionou que queria aprender mais sobre o assunto e perceber como fazer quando estivesse a trabalhar com turmas do ensino profissional:

Para já eu acho que vou aprender qualquer coisa nova. Depois é positivo porque, como nunca lecionei a cursos profissionais, lecionei a CEF que é parecido, mas não é bem igual e é o estar a trabalhar em equipa e é o aprender mais. Quando tu me explicaste que íamos trabalhar com modelação, eu achei interessante aprender sobre o assunto e perceber como iríamos fazer com turmas do profissional. (Primeira entrevista, 15/10/11)

A professora tinha expectativa de aprender mais com este trabalho de equipa e de clarificar alguns aspetos inerentes ao que entendia por exercício ou tarefa:

Para já é assim, como vamos estar a dividir experiências e havendo 3 ou 4 turmas é como se no fundo estivesse a trabalhar para essas 3 ou 4 turmas, não é? E oiço experiências de 3 ou 4 turmas. Vamos trocar, vamos nós ficar com os materiais e trocar experiências, além de que vamos aprender e acho que eu vou aprender isso! A distinção entre uma tarefa, de uma atividade e de um exercício, eu acho que é uma coisa que não está muito clara e que se calhar eu própria também não sei, não é? As aulas de Matemática são muito à base: toma lá uma fórmula e faz um exercício, repetir e, eu própria posso saber, mas se calhar não aplico corretamente! (Primeira entrevista, 15/10/11)

Quando questionada sobre o que entendia por trabalho colaborativo associou a partilha de experiências e tarefas e entreaajuda entre colegas:

Trabalho colaborativo para mim é dividir tarefas, partilhar experiências. O trabalho colaborativo para mim, passa por, no grupo, fazermos as mesmas coisas, se calhar, ou até podemos não fazer, mas eu posso ajudar-te a fazer e tu a mim. Isso é trabalho colaborativo, porque toda a gente têm ideias independentemente de...eu posso não estar a dar o mesmo módulo que tu e posso dizer: se calhar era uma boa ideia fazer isto aqui e se calhar isso é trabalho colaborativo, mas nem sempre as pessoas estão dispostas a fazer. (Primeira entrevista, 15/10/11)

Patrícia participou de forma criativa, ponderada e bastante interventiva em todas as sessões de trabalho colaborativo, trazendo várias ideias para as reuniões e contribuindo de forma muito rica no desenvolvimento do trabalho. A seguir darei exemplos de intervenções e contributos de Patrícia durante as várias sessões:

Na segunda sessão, foi analisado o programa de Matemática para o ensino secundário profissional. Patrícia revelou ter lido este programa pela primeira vez, tendo confessado que não costuma ler e refletir sobre o programa, porque tem por hábito basear-se em manuais:

Eu fiz uma leitura cuidada do programa. Acho que nunca tinha tido contacto com este programa e para dizer a verdade, acho que pouco tinha lido os outros. Costumo pegar nos manuais e vou seguindo os temas lá presentes. Acho que foi a primeira vez que fiz uma leitura atenta e percebi então que existem várias orientações metodológicas. (Sessão de trabalho colaborativo, 02/11/11)

Embora a experiência com o ensino profissional seja apenas deste ano letivo, Patrícia conseguiu antever dificuldades subjacentes a este programa. As dificuldades apontadas estavam relacionadas com uma preocupação inerente ao trabalho matemático que os alunos poderiam desenvolver, num primeiro contacto, com uma primeira tarefa de modelação e no papel que cada professora deveria assumir nessa aula de modelação:

Antevejo algumas dificuldades! Primeiro os alunos nunca fizeram uma tarefa de modelação e nem nós. Nem eles sabem como “pegar” na tarefa e nem eu e talvez nem todas saibamos como agir numa aula dessas. Eu acho que vai haver dificuldades em ambas as partes. Espero e tenha a certeza que vamos ultrapassar isto e vamos conseguir, mas a primeira traz sempre incertezas porque não há receitas, não temos um exemplo de uma aula destas e neste momento nem sei como poderá aparecer uma tarefa destas. (Sessão de trabalho colaborativo, 02/11/2011)

Na quarta sessão foram enviados por mim, via email, textos e artigos sobre o que se entende por modelação matemática e o guião de suporte a essa sessão. Patrícia, no decorrer da reunião e ao refletirem conjuntamente sobre o que consistia modelação matemática, avançou com uma definição pessoal. Demonstrou ter realizado um trabalho reflexivo prévio e contribuiu com várias reflexões a partir de anotações que tinha feito:

A modelação matemática é uma metodologia de ensino, que pretende levar os alunos a “descobrir modelos matemáticos” em diferentes contextos. Apresentam-se situações reais, que permitam estabelecer relações entre a disciplina e a sua necessidade de aplicação na vida real, estimulando/motivando simultaneamente os alunos para esse trabalho. A modelação contempla diferentes fases que iniciam na formulação do problema (com ou sem recolha de dados) até à formulação de um modelo matemático que satisfaça o problema e validação desse modelo. (Sessão de trabalho colaborativo, 29/11/2011)

A partilha da sua conceção acerca do que achava ser modelação matemática foi um ponto de partida para a discussão nesta reunião.

Na quinta sessão foram enviados, por email, textos sobre ciclos de modelação, tendo por objetivo: analisar vários e compreender a interpretação dos mesmos pelas professoras e seleccionar um ciclo de modelação para base de sustentação à criação, planificação e implementação das futuras tarefas de modelação matemática. Patrícia demonstrou ter preparado previamente o tema que foi debatido por todas. Fez a interpretação dos ciclos e também fez, em formato digital, várias notações e reflexões sobre a interpretação e comparação entre os vários ciclos. Este trabalho prévio contribuiu

para a rentabilização da reunião e o enriquecimento do debate realizado. Notou-se também uma grande preocupação e cuidado em fazer leituras sobre o tema a tratar permitindo uma reflexão mais aprofundada sobre o assunto. Sobre o ciclo de Ferri (2006) referiu às colegas que:

É um modelo que reflete a preocupação em relacionar o mundo real com o matemático, embora faça uma clara separação entre os mesmos colocando-os em lados opostos embora relacionáveis. A percepção visual que temos deste modelo mostra esta dualidade, a relação óbvia entre a matemática e a realidade. Eu pessoalmente acho interessante esta perspetiva. (Sessão de trabalho colaborativo, 06/12/2011)

Na nona sessão, o objetivo era fazer a estrutura de uma primeira tarefa de modelação. A ideia inicial era que se comesçasse a criar nessa sessão a primeira tarefa de modelação e que desse modo fosse um ponto de partida para a criação das outras tarefas. No entanto, Patrícia sugeriu e referiu que sentia necessidade de planificar as tarefas, primeiramente, segundo os conteúdos a lecionar de modo a conseguir organizar-se. Para ela e, tendo em conta, o modo como se organiza era fundamental compreender a sequência dos conteúdos, como abordá-los e de que forma iriam surgir em cada tarefa de “pré modelação”/modelação. Resolvemos não avançar para a criação da tarefa, mas sim organizar uma tabela onde constasse a calendarização de todas as fases do processo inerente à recolha de dados e também a planificação das tarefas, quer relativamente ao número, quer aos conteúdos. Este documento, referente à planificação das tarefas, está em anexo (anexo 28). Esta organização e planificação foram cruciais, porque todas se sentiram mais organizadas e com pontos em comum acordados e que serviriam de base de sustentação para a criação das primeiras tarefas.

Estes são alguns exemplos das intervenções de Patrícia e papel assumido durante as várias sessões de trabalho colaborativo.

Patrícia, na última entrevista, mencionou que não sentiu nenhuma dificuldade durante a sua participação nesta equipa porque sentiu-se muito apoiada e em pé de igualdade com as colegas, revelando que todas estavam igualmente empenhadas e disponíveis para trabalhar:

Eu acho que não houve assim nada que dificultasse, acho que ajudou muito a equipa de trabalho, foi realmente feito de forma colaborativa e isso ajudou imenso, porque era uma experiência nova e nenhuma de nós sabia o que ia fazer no início e acabámos todas por ficar muito contentes com os resultados e aprender umas com as outras. Se pensarmos no trabalho

colaborativo em geral, nem sempre conseguimos adequar horários de trabalho, não conseguimos adequar, se calhar, hábitos e metodologias que as pessoas gostam, se calhar não gostam de ceder ao próximo ou, então a pessoa não gosta de ser orientada de determinada forma. Mesmo que seja a fazer uma experiência, as pessoas gostam de seguir a sua metodologia. Aqui não houve este tipo de dificuldades! Aqui apareceram três pessoas que estavam dispostas a trabalhar e a fazer. (Última entrevista, 25/07/12)

Na última entrevista, foi perceptível nas suas palavras a valorização que atribuiu ao facto de ter integrado uma equipa deste tipo, pois explicou que mudou a sua prática e, futuramente vai fazer a gestão curricular do programa do ensino profissional de forma mais adequada aos alunos e suas motivações:

O facto de adaptarmos as tarefas a cada curso foi uma experiência rica. Eu lecionava aqueles cursos tecnológicos e ia buscar um ou outro exercício que tinha a ver com eles, mas nunca assim de uma forma tão forte! Aqui todas as tarefas eram relacionadas com a área que as alunas estudavam. Anteriormente eu fazia isso, mas no meio de um ou outro exercício, portanto por aí, mudei a prática e no futuro tenciono fazê-lo. Verifiquei que este método ajuda a motivar os alunos. (Última entrevista, 25/07/12)

A forma como Patrícia planificou as suas aulas evoluiu no sentido que, no final deste trabalho, demonstrava ter uma preocupação acrescida relativamente à adequação das tarefas e na forma de abordar os conteúdos a alunos destes cursos. Ela nunca tinha tido alunos do ensino profissional, mas já tinha tido outros níveis de ensino, tais como, CEF e Matemática B, onde essa adequação é importante e, segundo ela, não o fazia:

A minha planificação passava por fazer o sumário, fazer os objetivos, tratar do tema, prever os materiais que iria precisar e depois entrar nas tarefas propriamente ditas. Faço para mim um caderno onde costumo ter os exercícios todos resolvidos que vou fazer na aula. (Última entrevista, 25/07/12)

Quando integrou esta equipa, Patrícia passou a agir de forma distinta. Na última entrevista foi evidente, nas suas palavras, uma evolução na sua prática relativamente à forma como passou a planificar:

Adequeei as tarefas às minhas alunas. Pensei nos tempos, nas tarefas, na sequência programática, em tudo, em cumprir os objetivos, em cumprir os conteúdos e acima de tudo na forma de implementar as tarefas em sala de aula. (Última entrevista, 25/07/2012)

Patrícia passou a pensar mais nos seus alunos, neste caso o curso, na forma como os envolver na aprendizagem e nas reflexões que fazia com as colegas.

A forma como Patrícia conseguiu interpretar o programa de Matemática para o ensino profissional, segundo ela, deveu-se ao facto de fazer parte desta equipa, pois caso contrário admite que teria sido complicado. Ela explicou que o programa apela à realização de tarefas de modelação, mas a maioria dos professores não compreende e nem sabe bem do que se trata:

Eles chamam à atenção para que se faça uma outra atividade, mas eu continuo a achar que é incompleto e devia ser melhorado porque nós que estivemos envolvidas no projeto acabamos por fazer coisas muito interessantes, que levaram a que as alunas conseguissem compreender a matéria de uma forma muito mais interessante, dinâmica e muito mais motivadora, mas foi porque estávamos no projeto! Se eu não tivesse entrado no projeto, eu tinha seguido aquele programa e tinha seguido de uma forma completamente diferente, porque não explorava desta forma, eles não fazem esse apelo, referem-se à modelação, mas uma pessoa também não sabe o que é! (Última entrevista, 25/07/2012)

Patrícia pretende no futuro voltar a trabalhar numa equipa de trabalho colaborativo e justifica essa sua vontade com o facto de ter tido uma experiência onde aprendeu, ter gostado de trabalhar nesta equipa e ter melhorado a sua prática:

Sim, sim, porque é uma experiência que permite aprender e eu acho que na nossa profissão não se pode pensar que as coisas são estáticas, estão sempre a evoluir e nós temos que crescer e aprender com os outros e novas experiências podem levar a melhores práticas. (Última entrevista, 25/07/2012)

Na última entrevista reconheceu a Estatística como um bom tema para trabalhar com modelação matemática, enfatizando o facto de esta ter levado a pensarem na envolvimento dos alunos na recolha de dados reais, aspeto que ela enfatizou como crucial para a compreensão da situação real:

A Estatística foi um bom tema, ao pensarmos na modelação pensámos na forma de recolher os dados e eu acho que é importante os alunos perceberem a importância dessa recolha e o que podem fazer com eles e interpretá-los. (Última entrevista, 25/07/2012)

No entusiasmo das várias sugestões que foram surgindo, relativamente à operacionalização da recolha de dados, Patrícia foi a pessoa que mais imprevistos

possíveis anteviu, levando-nos a refletir melhor sobre as atividades e situações reais a propor. Embora muitas atividades e situações parecessem ótimas, a forma como a recolha de dados seria colocada em prática poderia ser inviável. O excerto seguinte retrata o que foi referido anteriormente:

Sara: Eu sugiro que os alunos criem uma folha de dados com o material e alimentos necessários e elaborar orçamentos de eventos (festas final de ano, natal, etc) ou fazer um estudo sobre determinada característica das crianças e estudar a sua evolução.

Patrícia: Podíamos trabalhar hábitos de alimentação, horas de sono, higiene através da recolha de dados a partir de inquéritos. Sara eu acho que temos que ter em atenção se conseguimos pôr em prática todas as atividades que estamos a pensar: temos que ter em conta o custo dos materiais a usar na promoção dessas atividades e na forma de colocar em prática a recolha de dados. Podemos estar a ter ideias que parecem agora muito boas, mas temos que pensar que pode demorar tempo ou ter custos ou ainda outros problemas que agora não estamos a ver! Não acham? (Sessão de trabalho colaborativo, 07/01/12)

A partir desta discussão surgiu a ideia, por parte de Patrícia, de conhecer, em primeiro lugar, melhor a amostra e a elaboração de um questionário que satisfizesse os três cursos e a partir daí, serem os próprios alunos (de cada curso) a sugerirem atividades. Ao lançar esta ideia, ela promoveu a partilha de ideias e a reconheceram a importância de envolver os alunos na recolha de dados.

Caracterização geral da experiência de ensino realizada por Patrícia

A experiência de ensino realizada por Patrícia iniciou-se com as reuniões de equipa colaborativa. Em reuniões de trabalho colaborativo, Patrícia analisou os perfis profissionais dos cursos profissionais envolvidos neste estudo de modo a melhor compreender as saídas profissionais destes cursos e assim perceber como identificar prováveis contextos profissionais que pudessem ser modelados em sala de aula. Pois só a partir daí é que poderia pensar como abordar os conteúdos estatísticos pretendidos e criar as tarefas. Numa das reuniões, uma das professoras propôs que a amostra fossem crianças do pré-escolar e assim, cada professora e alunos de acordo com a especificidade do seu curso, pensou em situações reais que envolveu a recolha de dados a partir de uma amostra de crianças. Partindo do que conhecia da área profissional das suas alunas e explicando a

estas a sua ideia, rapidamente pensaram numa forma de conhecer melhor as crianças com quem iriam trabalhar. A fim de conhecê-las, construíram um questionário (anexo 12) cujo objetivo era aferir os hábitos diários, passatempos e conhecer características físicas dessas crianças. Todos os dados recolhidos a partir destes instrumentos de recolha, permitiram o emergir de variáveis estatísticas interessantes para o ensino de todo o módulo de Estatística. A partir destes dados e de sugestões e reajustes provenientes das discussões e reflexões em sessões de trabalho colaborativo, Patrícia criou dois tipos de tarefas: tarefas sobre conteúdos estatísticos antes das distribuições bidimensionais e as tarefas de modelação sobre as distribuições bidimensionais. Com o decorrer das aulas e discussão das primeiras tarefas, Patrícia apercebeu-se que estas não permitiam passar por todas as fases do ciclo de modelação, tendo ficado decidido que as tarefas de modelação incidiriam sobre as distribuições bidimensionais. Assim, as tarefas que antecederam as que abordaram as distribuições bidimensionais, tiveram a finalidade, não só trabalhar todos os conteúdos estatísticos que antecederam os dados bivariados, como aproveitar algumas associações surgidas durante a realização das tarefas e atividades no âmbito do apoio à infância, para o surgimento de ideias para a criação das tarefas de modelação. Neste sentido, ficou acordado que o melhor tópico estatístico para trabalhar com modelação seria o inerente às distribuições bidimensionais. Para além disso, permitiria passar por todo o ciclo de modelação de forma coerente, sendo possível construir e trabalhar com um ou mais modelos matemáticos, discutindo resultados matemáticos e comparando-os com a realidade.

As tarefas criadas, que antecederam as que abordaram as distribuições bidimensionais, tiveram por objetivo estudar os diversos conteúdos estatísticos previstos no programa (população e amostra; tipos de variáveis estatísticas, organização de dados em tabelas de frequências, apresentação de dados em gráficos, medidas de localização e dispersão), tendo o grupo colaborativo designado esta fase como de “pré-modelação”, exatamente porque nem todas as fases de modelação surgiram, de forma clara para as professoras, nas tarefas. Contudo, e aproveitando todo o trabalho desenvolvido pelas professoras e pelos alunos, Patrícia conjuntamente com as colegas, compreendeu que toda a atividade matemática dos alunos durante a realização das tarefas serviria para compreender os dados reais diretamente recolhidos pelos alunos; contactar diretamente com a realidade e conhecê-la melhor, permitindo caracterizar o contexto e também para aproveitar algumas conclusões surgidas nessas tarefas de “pré modelação”. Essas hipóteses, conjecturas, associações surgidas a partir de elementos da realidade, permitiram

a Patrícia pensar em situações reais que permitissem estudar relações entre variáveis surgidas da realidade conhecida por todos (professora e alunas), levando a uma abordagem do ensino das distribuições bidimensionais a partir da modelação matemática. Patrícia pretendeu também, nesta fase, organizar e criar hábitos de trabalho nos alunos, incluindo a exploração da folha de cálculo EXCEL, promovendo assim a oportunidade destes adquirirem competências importantes para o trabalho posterior com as tarefas de modelação.

Nesta fase de pré-modelação, Patrícia criou oito tarefas com foco nos conteúdos estatísticos, de acordo com o que se observa no quadro 13.

Quadro 13: Identificação e conteúdos estatísticos abordados nas oito tarefas de “pré-modelação” criadas por Patrícia

Tarefas de “pré-modelação”	
Identificação da tarefa	Conteúdos estatísticos abordados
Tarefa 1 (30/04/12): Começar a conhecer a amostra (anexo 29)	População e amostra; Classificação de variáveis estatísticas (variável qualitativa e quantitativa discreta); Tabelas de frequências.
Tarefa 2: (03/05/12) Já sou grande (anexo 30)	Classificação de variáveis estatísticas (variável quantitativa contínua); Organização de dados em classes; Tabelas de frequências.
Tarefa 3: (14/05/12) Vida quotidiana e hábitos diários (anexo 31)	Classificação de variáveis estatísticas (variável qualitativa); Tabelas de frequências; Gráficos de barras e pictogramas.
Tarefa 4: (24/05/12) Alimentação e higiene (anexo 32)	Classificação de variáveis estatísticas (variável discreta); Tabelas de frequências; Gráficos de barras e gráficos circulares.
Tarefa 5: (24/05/12) A hora da soneca (anexo 33);	Classificação de variáveis estatísticas (variável contínua); Tabelas de frequências; histogramas.
Tarefa 6: (31/05/12) Média, moda e mediana (anexo 34)	Medidas de tendência central: média, moda e mediana.
Tarefa 7: (01/06/12) Brincar com os números (anexo 35)	Medidas de tendência central: média.
Tarefa 8: (04/06/12) As peças de fruta (anexo 36)	Desvio padrão; Quartis; Diagrama de quartis.

Este conjunto de tarefas foi pensado, segundo um fio condutor, no que diz respeito aos conteúdos estatísticos que são abordados no módulo A3-Estatística para o ensino profissional. A estrutura de cada tarefa foi acordada pela equipa colaborativa e partindo

do pressuposto que conseguiriam passar por todas as fases do ciclo de modelação de Ferri (2006). Patrícia previu para estas tarefas oito aulas de 90 minutos. As alunas foram organizadas em grupos de três ou quatro de acordo com as suas preferências por elas manifestadas.

Das oito tarefas aplicadas em sala de aula, observei as cinco iniciais a fim de familiarizar-me com a turma, compreender a dinâmica das aulas e que tipo de conhecimento para ensinar Estatística a professora evidenciava durante esta fase de “pré-modelação”. Todas estas tarefas foram criadas a partir do pressuposto que a partir de qualquer tópico estatístico seria fácil surgirem todas as fases do ciclo de modelação. No início, Patrícia pensava que tal era possível, mas a partir da quarta tarefa de Sara e quinta de Patrícia, a professora em discussão de trabalho colaborativo, apercebeu-se que tal não estava a ser claro e que os conteúdos inerentes às distribuições bidimensionais seriam mais propícios ao aparecimento de todas as fases do ciclo de modelação. Neste sentido, decidi apenas observar até estas cinco primeiras tarefas e posteriormente as tarefas de modelação sobre as distribuições bidimensionais. Na secção seguinte apresento uma breve abordagem sobre a primeira e quinta tarefa, onde descrevo de forma sucinta a dinâmica de aula e evidências do conhecimento para ensinar Estatística revelado por Patrícia.

No que diz respeito à fase do trabalho com modelação relativa às distribuições bidimensionais, Patrícia criou quatro tarefas. Das tarefas que integraram a fase de “pré-modelação”, surgiram muitas associações e curiosidades novas, cujas relações as alunas e a própria Patrícia acharam interessantes estudar. As situações reais que levaram a estas tarefas de modelação foram as mesmas das anteriores (questionários e contacto direto com as crianças), mas as associações que foram estabelecidas durante a fase de “pré-modelação”, proporcionaram um interesse em estudar do ponto de vista estatístico a possível relação existente. Assim, foram criadas as quatro tarefas de modelação sobre as distribuições bidimensionais e que passaram por todas as fases do ciclo de modelação.

O quadro 14 retrata as situações reais surgidas e conteúdos estatísticos abordados e em cada uma das tarefas de modelação.

Quadro 14: Identificação e conteúdos estatísticos abordados nas quatro tarefas de modelação criadas por Patrícia

Identificação da tarefa de modelação e data	Situação real	Conteúdos estatísticos abordados sobre as distribuições bidimensionais
Tarefa 1 (11/06/12) Relacionando variáveis (anexo 37)	Identificação de situações reais a partir do conhecimento dos hábitos das crianças e a partir dos dados dos questionários entregues aos encarregados de educação.	Construção do diagrama de pontos; Construção dos modelos de regressão; Estimar resultados a partir dos modelos matemáticos e interpretá-los no contexto real. Concluir acerca da adequabilidade do modelo tendo em conta o contexto real.
Tarefa 2 (21/06/12) Estarei gordinho ou serei baixinho? (Anexo 38)	Identificação de situações reais a partir do conhecimento dos hábitos das crianças a partir dos dados dos questionários entregues aos encarregados de educação. Excerto de um artigo sobre o IMC na infância e tabelas pediátricas que relacionam o peso e a altura e interpretam o IMC	Interpretar o sinal e intensidade do valor do coeficiente de correlação e relacioná-lo com o grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis; Construção do diagrama de dispersão; Construção da equação da reta do modelo de regressão linear; Estimar resultados a partir da reta de regressão linear e interpretá-los no contexto real. Concluir acerca da adequabilidade do modelo tendo em conta o contexto real.
Tarefa 3 (25/06/12) “Estarei magrinho ou cansadinho?” (anexo 39)	Identificação de situações reais a partir do conhecimento dos hábitos das crianças a partir dos dados dos questionários entregues aos encarregados de educação. Artigo sobre a relação entre as horas de sono de uma criança e o peso	Construção do diagrama de dispersão; Construção de modelos de regressão; Estimar resultados a partir dos modelos de regressão obtidos e interpretá-los no contexto real. Concluir acerca da adequabilidade do modelo tendo em conta o contexto real.

<p>Tarefa 4 (25 e 27/06/12)</p> <p>“Será que estas variáveis estão relacionadas?” (Anexo 40)</p>	<p>Identificação de situações reais a partir do conhecimento das características das crianças a partir dos dados dos questionários entregues aos encarregados de educação.</p> <p>Outras situações reais escolhidas pelos alunos</p>	<p>Estabelecer conjecturas a partir da identificação de situações reais.</p> <p>Organizar dados;</p> <p>Construção do diagrama de dispersão;</p> <p>Construção de modelos de regressão que não sejam necessariamente o linear;</p> <p>Estimar resultados a partir dos modelos de regressão obtidos e interpretá-los no contexto real.</p> <p>Concluir acerca da adequabilidade do modelo tendo em conta o contexto real e validade das conjecturas.</p>
---	--	---

Estas quatro tarefas foram pensadas por Patrícia segundo uma determinada sequência de tópicos estatísticos a ensinar. Em equipa de trabalho colaborativo, ficou acordado que a primeira tarefa de modelação abordaria a associação linear entre duas variáveis, a segunda sobre incidiria sobre o estudo do grau da intensidade de associações lineares que podem surgir e as restantes abordariam modelos de regressão não lineares. No entanto, Patrícia optou por não seguir esta ordem, experimentando outra sequência. Primeiro, criou uma tarefa com o objetivo de abordar vários tipos de associações, de modo a que as alunas não ficassem com a impressão inicial que a única associação possível entre duas variáveis é a linear. Na segunda tarefa e uma vez que a primeira não decorreu como era exetável por ela, resolveu abordar a associação linear, de forma a clarificar aspetos decorrentes da primeira aula de modelação. Na terceira tarefa, foi feita nova abordagem sobre possíveis associações não lineares entre variáveis e por último, construiu uma tarefa mais aberta, apelando à criatividade e conhecimento sobre a área profissional das alunas. Deste modo, pretendeu que fossem estabelecidas novas associações a partir dos dados reais recolhidos. Esta última tarefa permitiu ainda a Patrícia, avaliar as aprendizagens das alunas sobre as distribuições bidimensionais e compreender de que forma tinham aprendido e valorizado o facto de terem trabalhado com a realidade. Quanto à última tarefa, embora tenha sido analisada, à semelhança das outras, dessa análise não surgiu nenhuma evidência distinta das que já tinham sido identificadas nas outras tarefas relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística. Desta forma, optei por não a descrever.

A fase de “pré-modelação” de Patrícia

Das oito tarefas da fase de “pré-modelação” eu observei as cinco iniciais, porque apercebi-me que as evidências sobre o conhecimento para ensinar Estatística, relativamente aos vários tipos de conhecimento iriam ser revelados com maior destaque durante a lecionação das distribuições bidimensionais e as fases do ciclo de modelação só iriam surgir todas durante o ensino desses conteúdos. Aqui nesta secção, faço uma breve descrição da primeira e última tarefa que observei. A primeira foi observada com o objetivo de familiarizar-me com a turma e compreender a dinâmica de sala de aula. A última, foi com o propósito de entender se a professora tinha clarificado o conceito de modelação matemática e de modelo matemático. Para além disso, a observação destas aulas teve outro objetivo: eu tive a intenção de compreender que conhecimento não matemático a professora evidenciava na procura de contextos reais para a criação destas tarefas, se a partir das relações que as aforam estabelecendo ao longo da realização destas tarefas, se esta iria aproveitar essas conclusões ou conjecturas para criar as tarefas de modelação destinadas ao ensino das distribuições bidimensionais. Desta forma, poderia compreender que tipo de questões formularia, que dificuldades das alunas tinha tido em conta a partir das tarefas de “pré-modelação” e como iria criar as tarefas e planificar as aulas de modelação.

Tarefa 1: “Começar a conhecer a amostra”

Esta tarefa foi a primeira criada pela professora (anexo 29). Teve a intenção de, a partir dos dados reais recolhidos oriundos dos questionários, que as suas alunas conhecessem melhor a amostra de crianças com quem iriam trabalhar e desenvolvessem atividades adequadas à sua faixa etária e características. Aspetos como idade, género e número do calçado estiveram no foco de atenção desta tarefa. Para além disso, aproveitou para abordar conceitos iniciais como: classificação de variáveis, organização de dados em tabelas, leitura das tabelas de frequências e interpretação das mesmas.

Esta primeira tarefa evidenciou em Patrícia a preocupação em seguir a ordem de lecionação dos conteúdos estatísticos previstos no programa, começando por algo mais simples. Ao criar esta tarefa, Patrícia apresentou uma situação real conhecida pelas

alunas, com a intenção de levá-las a refletir sobre a importância de terem andado a recolher determinadas informações sobre as crianças:

Eu quero que percebam porque andaram a recolher informações sobre as crianças e como é que poderão organizar toda essa informação. (Entrevista pré aula, 30/04/2012)

Numa aula, Patrícia falou com as suas alunas sobre o tipo de informação que poderiam recolher sobre as crianças do pré-escolar com quem estavam a trabalhar. Estas, com base no que desejavam saber e a fim de conhecerem hábitos e gostos das crianças pensaram num conjunto de questões que se adequavam ao que pretendiam. Patrícia, em conjunto com as alunas, operacionalizou a forma como iriam recolher os dados, pensando em várias questões que fizeram parte de um questionário entregue aos encarregados de educação:

Q1- Sexo:			
Masculino <input type="checkbox"/>	Feminino <input type="checkbox"/>		
Q2- Idade:			
3 anos <input type="checkbox"/>	4 anos <input type="checkbox"/>	5 anos <input type="checkbox"/>	6 anos <input type="checkbox"/>
Q3- Peso: ____ Kg			
Q4- Altura: ____ m			
Q5- Qual o número de sapato que calça? _____			
Q6- O seu educando encontra-se a realizar algum tipo de dieta alimentar?			
Não <input type="checkbox"/>		Sim <input type="checkbox"/>	
Se respondeu sim à questão anterior, especifique:			
Q7- Quantas refeições faz o seu educando durante o dia?			
3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	5 <input type="checkbox"/>	6 ou mais <input type="checkbox"/>
Q8- Qual o seu prato preferido?			
Massa <input type="checkbox"/>	Peixe <input type="checkbox"/>	Carne <input type="checkbox"/>	Fast food <input type="checkbox"/>
Salada <input type="checkbox"/>		Sopa	
Outro <input type="checkbox"/> Qual: <input type="checkbox"/> _____			
Q9- Ao pequeno-almoço o seu educando ingere:			
Leite <input type="checkbox"/>	Iogurte <input type="checkbox"/>	Fruta <input type="checkbox"/>	Cereais <input type="checkbox"/>
Pão <input type="checkbox"/>	Sumos <input type="checkbox"/>	Doces <input type="checkbox"/>	
Outro <input type="checkbox"/> Qual: _____			

Q10- Quantas peças de fruta come por dia?				
0 <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>
Q11- Ele (a) bebe às refeições?		Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/>	
Se respondeu sim à questão anterior, o quê?				
Água <input type="checkbox"/>	Sumos sem gás <input type="checkbox"/>	Refrigerantes <input type="checkbox"/>		
Leite <input type="checkbox"/>	Outro <input type="checkbox"/>	Qual: _____		
Q12- Quanto às guloseimas, o seu educando come...				
Muitas <input type="checkbox"/>	Algumas <input type="checkbox"/>	Poucas <input type="checkbox"/>	Nenhumas <input type="checkbox"/>	
Q13- É portador de alguma alergia alimentar?		Não <input type="checkbox"/>	Sim <input type="checkbox"/>	
Se respondeu sim à questão anterior, é alérgico(a) a que alimentos?				
Q14-O seu educando gosta de ajudar em pequenas tarefas na cozinha?				
Não <input type="checkbox"/>		Sim <input type="checkbox"/>		

Patrícia, após a recolha de toda esta informação, organizou uma tabela, onde para cada criança constavam as respetivas respostas a cada questão (anexo 13), facilitando assim a organização dos dados em tabelas de frequências.

Patrícia construiu a primeira questão e colocou a foto de modo a que os alunos construíssem a representação real da situação. Com a formulação escrita da questão dois, apelou não só à organização dos dados, como também, teve a intenção de levá-las a refletir que leitura poderiam fazer a partir daí e se essa organização estava ou não correta. Na condução desta parte da aula, onde as alunas tinham que refletir sobre a construção das tabelas e verificarem todos os dados, Patrícia foi solicitada muitas vezes. Durante a aula, as alunas dispoñdo de tabelas de registo que tinham sido construídas a partir dos questionários, não conseguiram construir de imediato o modelo real (tabela com os dados que traduzissem o número de crianças com determinado número de calçado, ou do sexo feminino/masculino e ainda o peso). Houve necessidade de Patrícia circular pelos lugares e ajudar as alunas, colocando questões que as conduziram à “limpeza e reorganização dos dados”:

Será que alguém de fora, que não conhece a situação e nem as crianças, consegue retirar informação dessa tabela sobre a amostra dos alunos do pré-escolar? Observem as tabelas que construíram e tentem responder às questões para tentar perceber se conseguem responder a partir da leitura

das tabelas! E olhem para os inquéritos! O número de linhas das tabelas corresponde ao número de inquéritos? E mesmo que correspondam, têm informação para todas as crianças? Pensem nestes aspetos. Se eu quiser saber quantas crianças calçam o 26, vocês conseguem dizer-me de forma rápida? O que têm aí é o que está na grelha resultante dos inquéritos! Achem que é essa a melhor maneira de organizarem a informação? (Aula de Sara, 30/04/2012)

Durante a condução da aula, Patrícia ao referir-se ao número de questionários e à comparação com os dados que tinham na tabela, teve por objetivo levar a que as alunas procedessem a uma “limpeza de dados”.

Um exemplo de uma tabela que um dos grupos estava a construir e levou à intervenção de Patrícia foi:

Aluno(a)	Idade
Ana	8
Bárbara	9
Cátia	10
Diana	11
Eduardo	12
Fátima	13
Gonçalo	14
Hugo	15
Irene	16
João	17
Luís	18
Marta	19
Nuno	20
Patrícia	21
Rita	22
Sara	23
Teresa	24
Vitor	25
	26
	27
	28
	29
	30
	31
	32
	33
	34
	35
	36
	37
	38
	39
	40
	41
	42
	43
	44
	45
	46
	47
	48
	49
	50
	51
	52
	53
	54
	55
	56
	57
	58
	59
	60
	61
	62
	63
	64
	65
	66
	67
	68
	69
	70
	71
	72
	73
	74
	75
	76
	77
	78
	79
	80
	81
	82
	83
	84
	85
	86
	87
	88
	89
	90
	91
	92
	93
	94
	95
	96
	97
	98
	99
	100

Figura 51: Exemplo apresentado por um grupo de alunas sobre a incorreta organização dos dados (30/04/12)

A professora interpretou a fase da construção do modelo matemático, como sendo a construção das tabelas de frequências. Para ela uma tabela de frequências poderia corresponder a um modelo matemático. Durante a entrevista pós aula, Patrícia quando questionada se os alunos chegaram à construção do modelo matemático, esta respondeu afirmativamente, acrescentando que as tabelas de frequências foram construídas:

Portanto, não sei se vou dizer pela ordem certa, mas partimos do real, houve representação real da situação, elas compreendem a situação. Elas conseguem chegar ao modelo real a partir dos dados recolhidos que estão

compilados naquela grelha com as respostas a todas as questões e depois conseguem chegar ao modelo matemático, que são as tabelas de frequências. (Entrevista pós aula, 30/04/12)

Com a formulação escrita das questões dois e três da tarefa, a professora pretendia que os alunos obtivessem resultados e os interpretassem, isto é, que a partir dos valores obtidos nas frequências relativas e absolutas, comparassem com a realidade para terem a percepção se realmente as tabelas estariam ou não bem construídas.

As alunas conseguiram interpretar os valores obtidos e ao compará-los com a realidade entenderam que algumas tabelas não estavam bem organizadas, mas essas tabelas traduziam uma organização de dados, não existindo mais explorações.

Com a formulação escrita da última questão da tarefa, Patrícia apelou ao estabelecimento de conjecturas entre as várias variáveis surgidas, com o intuito de elaborarem uma pequena composição onde pudessem descrever algumas características das crianças. Estas conjecturas tiveram o objetivo de servirem de ponto de partida para prováveis relações a estudar entre variáveis quando a professora lecionasse as distribuições bidimensionais. Nesta tarefa, não se interpretaram resultados matemáticos, não sendo necessário validar modelos, o que leva a concluir que nem todas as fases de modelação emergiram durante a realização desta tarefa.

Tarefa 5: “A hora da soneca”

Esta tarefa surgiu na sequência das alunas de Patrícia necessitarem de conhecer melhor as crianças do pré-escolar com quem estavam a trabalhar. Para isso, utilizaram os dados recolhidos a partir dos questionários que tinham sido entregues aos encarregados e educação e assim, perceberem quantas horas diárias dormiam estas crianças. Durante as aulas em que estiveram presentes no jardim-de-infância, pareceu-lhes que algumas crianças pareciam pouco ativas ou mesmo sonolentas. Por isso, Patrícia lembrou-se de criar esta tarefa com o propósito de compreenderem se as crianças dormiam ou não o número de horas recomendado para esta faixa etária. Na entrevista que antecedeu a aula, Patrícia referiu-se à forma como surgiu a ideia para esta tarefa a partir da conversa com as alunas:

Quando estava, numa das aulas iniciais, a falar com elas sobre que tipo de questões é que gostavam de colocar no inquérito, umas alunas disseram-me que achavam que aquelas crianças pareciam que muitas vezes

chegavam à escola cheias de sono e mesmo durante o dia às vezes pareciam-lhes cansadas. Relembro que as minhas alunas como são de apoio à infância, durante este ano já andaram pelas escolinhas do pré-escolar e esta observação foi algo que já se deram conta! Elas disseram que gostavam de saber quantas horas dormiam e talvez perguntar a um pediatra quantas horas devem dormir crianças desta idade e perceber o que se passa com estes meninos! Eu achei a ideia interessante e resolvi pegar nesta ideia para uma primeira abordagem gráfica e depois pedir-lhes algumas conjecturas! E quando chegar às variáveis bidimensionais acho que vou conseguir aproveitar esta parte! (Entrevista pré aula, 24/05/2012)

Podemos dizer que Patrícia atribuiu uma relevante importância à envolvimento das alunas na recolha de dados. As alunas problematizaram a situação, planificaram, fizeram a recolha de dados e Patrícia analisando os dados recolhidos criou uma tarefa que lhes permitisse levar à organização gráfica dos dados, à sua interpretação, à formulação de conjecturas e a algumas conclusões.

Estas alunas ao entenderem compreender o real e ao sentirem necessidade de criar questões sobre os hábitos de sono desta faixa etária, mobilizaram conhecimento extra matemático a partir da observação direta que tinham feito em sala de aula com as crianças e estabeleceram associações a partir de elementos da realidade, levando-as a compreender a situação e deste modo à construção do modelo real. Ao preparar a tarefa e ao redigir o seu enunciado, Patrícia pensou em solicitar às alunas a organização dos dados em tabelas e gráficos que lhes parecessem adequados, de modo a que conseguissem tirar algumas conclusões sobre os hábitos de sono daquelas crianças (problema real em estudo), o que as conduziu ao modelo real:

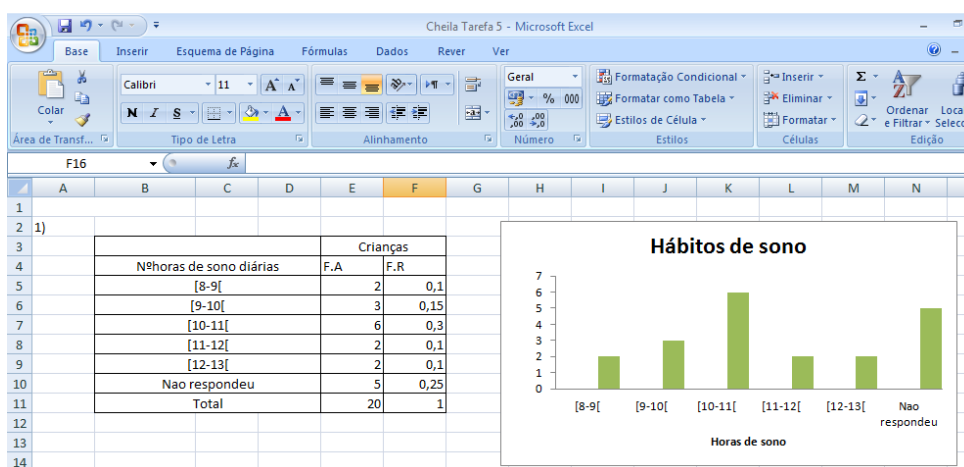


Figura 52: Exemplo de uma tabela e gráfico obtidos por um dos grupos de alunas (24/05/12)

Estes dois modelos, tabela e gráfico, são os apresentados por um dos grupos. Um dos objetivos era que as alunas conseguissem representar graficamente os dados contínuos num histograma. O gráfico obtido deveria ter as colunas juntas. Patrícia embora tivesse visto estes gráficos e durante a condução da aula mencionasse que as colunas deveriam estar juntas, não explicou como as alunas deveriam proceder no EXCEL para que o histograma ficasse bem construído. Os gráficos não fossem reformulados.

Na formulação escrita da questão três, Patrícia solicitou às alunas que estas refletissem sobre o modelo real construído e se este parecia estar bem construído e de acordo com a situação real conhecida. No entanto, em nenhum dos trabalhos entregues pelas alunas, houve resposta a esta questão e Patrícia durante a aula não a explorou e nem a discutiu. A sua preocupação durante esta aula esteve relacionada com as conclusões retiradas a partir da leitura da tabela e gráficos e sua relação com a ideia previamente referida pelas alunas.

A partir do modelo real, as alunas, segundo Patrícia conseguiram chegar à construção do modelo matemático, isto é, o gráfico. Tanto na entrevista pré aula, como na entrevista pós aula, a professora referiu-se a esta fase como presente na tarefa:

Têm que mobilizar o conhecimento extra matemático para a construção do modelo real, tabela...porque tem a ver com aquilo que elas vão fazer no futuro a nível profissional e depois têm que elaborar o modelo matemático que é o gráfico e tirar conclusões a partir daí. (Entrevista pré aula, 24/05/2012)

Sim, conseguiram chegar ao modelo matemático...que é o gráfico. (Entrevista de reflexão pós aula, 24/05/2012)

A formulação escrita da questão quatro colocada pela professora teve o objetivo, segundo ela, de levar as alunas a trabalharem matematicamente a partir de um modelo. As alunas não obtiveram resultados matemáticos nesta questão. Para responderem à questão anterior, bastou observarem o gráfico e tabela e a partir dessa leitura darem a resposta. Segundo Patrícia, houve um trabalho matemático, porque o facto de saberem ler um gráfico ou uma tabela demonstrou que as alunas aplicaram conhecimentos matemáticos para esse efeito:

As aulas trabalharam matematicamente porque tiveram de saber ler o gráfico para responder à questão e só percebendo do assunto é que se

consegue...acho eu! E assim obtiveram resultados. (Entrevista de reflexão pós aula, 24/05/2012)

Na formulação escrita da última questão, Patrícia apelava à interpretação do gráfico, tendo em conta a curiosidade inicial das alunas sobre os hábitos de sono desta amostra de crianças. Podemos dizer que embora não tivesse havido interpretação de resultados matemáticos, Patrícia conseguiu que as alunas lessem com atenção o gráfico e retirassem, dessa leitura, conclusões acerca daquela amostra de crianças. Algumas das conclusões foram:

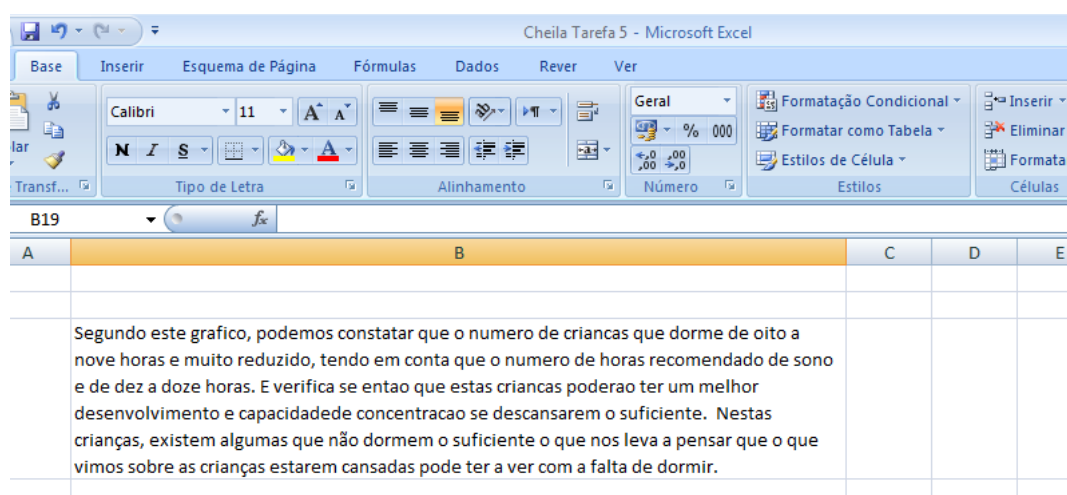


Figura 53: Exemplo de algumas conclusões obtidas por um grupo de alunas (24/05/12)

Estas conclusões estiveram de acordo com o que as alunas tinham conjecturado e serviram como ponto de partida para uma futura tarefa de modelação sobre as distribuições bidimensionais criada pela professora.

A validação do modelo matemático não esteve presente nesta tarefa, pois o que foi validado foram as conjecturas iniciais. Esta tarefa revelou-se motivadora e o facto de ter partido de uma situação real demonstrou ser um meio facilitador na compreensão da importância dos contextos em tarefas estatísticas.

Síntese

Tanto esta tarefa como a anterior serviram de base para a construção das tarefas de modelação. Embora o conceito de modelo matemático não estivesse clarificado, em reuniões de trabalho colaborativo, estas tarefas serviram de instrumentos de reflexão e permitiram a clarificação desse conceito, como se irá constatar na descrição e análise das próximas tarefas. Foram estas tarefas que levaram a um olhar mais atento sobre os dados reais obtidos a partir dos questionários, levando ao questionamento sobre vários aspetos inerentes aos hábitos das crianças e suas características. Deste modo, permitiram levar a um conjunto de relações interessantes que conduziram Patrícia a identificar situações reais e à criação de tarefas de modelação para as distribuições bidimensionais.

Durantes esta fase de “pré-modelação”, Patrícia demonstrou valorizar os contextos reais, quer na forma como procurou situações reais que fizeram emergir os conteúdos estatísticos a lecionar, quer na forma como operacionalizou a recolha de dados. Neste sentido, os contextos reais proporcionaram uma oportunidade para criar tarefas adaptadas ao curso profissional em questão e um meio para abordar conteúdos estatísticos. Durante esta fase, a professora ainda não tinha compreendido que os conteúdos lecionados até o momento não eram os mais adequados para trabalhar com modelação. Nesta altura da experiência de ensino, Patrícia evidenciou que o seu conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação ainda estava em construção.

Segue-se uma síntese do conhecimento para ensinar Estatística que Patrícia revelou na preparação, condução e reflexão das tarefas da fase de “pré-modelação”, distinguindo-se os diferentes tipos de conhecimento.

O conhecimento comum matemático evidenciado esteve relacionado com o que a professora sabe relativamente à Estatística e nestas tarefas este revelou-se robusto. Patrícia demonstrou conhecer bem os tópicos estatísticos que abordou. Para além disso, revelou saber que por vezes e após a recolha dos dados, é necessário proceder à limpeza dos mesmos e que as conclusões que se podem tirar a partir de dada amostra correspondem a possibilidades, uma vez que os resultados obtidos a partir de um modelo matemático estão condicionados pelas limitações desse mesmo modelo. Este poderá ser válido para uma dada amostra numa situação real e já não o ser noutro contexto.

Quanto ao conhecimento comum não matemático, a professora soube operacionalizar a recolha de dados e construir instrumentos para a recolha desses dados

(questionários), assim como organizar toda a informação oriunda desses questionários, numa tabela que relacionava cada criança com as respostas a cada questão. Patrícia pesquisou e aprofundou o seu conhecimento sobre a área profissional das suas alunas, falando com estas, educadora de infância das crianças e professores das disciplinas técnicas. Não evidenciou saber como construir um histograma com recurso ao EXCEL.

Relativamente ao conhecimento especializado matemático soube sequenciar os conteúdos estatísticos de modo a ensiná-los aos alunos de forma clara. Colocou questões, quer no enunciado da tarefa, quer durante a condução das aulas, sobre a correta ou incorreta organização dos dados em tabelas.

No que concerne ao conhecimento especializado não matemático, Patrícia ensinou as alunas a usar o EXCEL na construção de tabelas para organizar os dados, mas não as ensinou a corrigir os histogramas por elas construídos e cujas colunas estavam separadas.

Destacam-se, a seguir, as dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística sentidas, superadas e por superar de Patrícia. Na primeira tarefa desta fase de “pré-modelação”, durante a entrevista de reflexão pós aula, Patrícia mencionou que sentiu dificuldades em focar a atenção das alunas no que pretendia que fizessem na tarefa. Explicou que isto deveu-se à característica pouco usual desta tarefa, pois estas estavam habituadas a reproduzir tudo o que a professora fazia, notando alguma resistência inicial:

Eu tive dificuldades em focar a atenção delas nesta primeira tarefa! Parece que nem queriam fazer! Só resmungavam e diziam que não sabiam e nem estavam a perceber e queriam que fosse eu a fazer a tarefa com elas! Elas estão habituadas a fazer tudo por reprodução...eu faço um exercício e depois fazem um parecido, ora aqui não é assim! Não foi fácil! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 24/05/12)

Na quinta tarefa desta fase de “pré-modelação”, essa dificuldade foi ultrapassada.

Em ambas as tarefas, durante as entrevistas de reflexão imediata pós aula, Patrícia referiu que todas as fases do ciclo de modelação estiveram presentes. Segundo ela, a passagem dos dados reais, que constavam numa tabela, onde para cada criança constavam os dados dos questionários, para uma tabela onde os organizava segundo as variáveis em estudo, correspondia ao modelo matemático, assim como os gráficos obtidos na quinta tarefa. Este aspeto evidencia que a professora, nesta fase, ainda não tem clarificado o que distingue um modelo real de um modelo matemático, o que significa que esta dificuldade ainda está por superar nesta fase do trabalho. Outra dificuldade sentida, mas que ela não

referiu na entrevista pós aula, esteve relacionada com o conhecimento especializado não matemático evidenciado, quando não ensinou as suas alunas a corrigir o histograma construído com recurso ao EXCEL. Patrícia pareceu não saber como juntar as barras que apareciam separadas e deixou os gráficos das alunas ficarem incorretos.

A primeira tarefa de modelação: “Relacionando Variáveis”

Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação

Num primeiro contacto com os dados recolhidos a partir dos questionários e com as crianças com quem já tinham trabalho no âmbito das disciplinas técnicas, as alunas de Patrícia foram estabelecendo conjeturas e estabelecendo relações entre as variáveis que demonstraram quererem estudar. Na entrevista pré aula, Patrícia foi questionada sobre o surgimento desta tarefa e referiu que:

As alunas vão trabalhar as distribuições bidimensionais e vão começar a relacionar pares de variáveis e tentar a partir daí, tirar conclusões tendo em conta a amostra que estão a estudar. Teve também a ver com outras tarefas já trabalhadas, com conclusões ou curiosidades que foram surgindo e eu lembrei-me de aproveitar. (Entrevista pré aula, 11/06/2012)

Patrícia ouviu e leu algumas das prováveis relações entre variáveis que as alunas escreveram nas outras tarefas anteriores a esta. Resolveu solicitar, no enunciado da tarefa, que as alunas estudassem a provável associação entre a altura das crianças e o número do sapato que calçavam. Embora Patrícia não tenha colocado no enunciado da tarefa a conjetura que tinha lido ou ouvido, em ambiente informal e numa ocasião posterior a uma das aulas que antecederam esta, ela mencionou que as suas alunas achavam que as crianças mais altas tinham o pé maior.

Patrícia aproveitou a conjetura referida e foi testar que tipo de associações entre variáveis poderiam surgir. Embora tivesse sido acordado, em reunião de trabalho colaborativo, abordar nesta primeira tarefa de modelação, o modelo de regressão linear, surpreendentemente na entrevista que antecedeu minutos antes esta aula, Patrícia revelou que ia deixar as alunas “experimentarem” várias linhas de tendência permitidas pelo EXCEL. Patrícia também tentou perceber se conseguia ou não passar por todas as fases de modelação matemática e principalmente chegar a vários modelos matemáticos. Esta ideia cumpria o seu objetivo que era: introduzir as distribuições bidimensionais, levar as

alunas a validarem ou não a conjectura estabelecida numa primeira questão e passar por todas as fases do ciclo de modelação. Na entrevista pré aula, Patrícia mencionou que fez a construção da tabela inerente às duas variáveis em estudo e foi verificar, com recurso ao EXCEL, se conseguia ou não, chegar a vários modelos de regressão, podendo concluir acerca da adequabilidade de um deles a partir do valor do coeficiente de correlação linear (termo usado pela professora). Caso, isso se verificasse, poderia avançar para a construção da tarefa:

Comecei por construir uma tabela no EXCEL, a nuvem de pontos e depois comecei por explorar o EXCEL e verificar qual era a tendência dos pontos. Pedi o coeficiente de correlação linear e achei um que pode ser bom. Acho que vai dar para escolherem um, justificarem o porquê e dizer por que razão rejeitam os outros. (Entrevista pré aula, 11/06/12)

A professora deu, à tarefa, um título alusivo ao pretendido, isto é, estudar relações entre variáveis e introduziu uma foto relacionada com o contexto real, mas não relacionada com a amostra de crianças. Começou por apresentar o objetivo, indicar os conteúdos estatísticos que iriam surgir e os materiais necessários para a realização da tarefa. No objetivo, Patrícia explicou que os conteúdos estatísticos iriam surgir a partir dos contextos reais. Logo de seguida, fez uma introdução que permitisse compreender o propósito da tarefa. Apresentou uma tabela ilustrativa de como poderiam organizar os dados reais referentes às duas variáveis.

A construção da tarefa

O objetivo desta tarefa foi não só ser estruturada com o propósito de todas as fases de modelação emergirem, como também, conduzir as alunas a conjecturar acerca da possível relação entre a altura das crianças e o número de sapato e, a partir daí, através da formulação escrita de um conjunto de questões colocadas na tarefa, construírem alguns modelos de regressão, selecionando um que lhes parecesse adequado à situação real:

Eu pensei na tarefa de modo que as fases de modelação aparecessem todas e para além disso, as alunas conseguiram conjecturar. A partir daí, eu quero que elas construam vários tipos de regressão e escolham o que acham melhor. (Entrevista pré aula, 11/06/12)

Como já foi referido, embora em reunião de trabalho colaborativo tivesse sido acordado que a primeira tarefa abordaria o modelo de regressão linear, Patrícia resolveu deixar as alunas experimentarem vários tipos de associações e compreenderem que a linha

de tendência dos pontos que iriam obter poderia seguir uma curva e não uma reta. Na entrevista pré aula, quando questionada sobre os conteúdos que iriam emergir, a professora disse que teve receio de ao solicitar, nesta primeira tarefa, a construção do modelo de regressão linear, estas ficassem com a ideia que esse seria sempre o modelo adequado. Patrícia mencionou ainda que estas alunas tinham o hábito de fazer tudo por imitação e caso optasse por sugerir o modelo linear seria esse que iriam construir nas próximas tarefas:

Eu ainda pensei em direcionar a tarefa para o modelo linear, mas estas alunas se fizessem isso hoje, nas próximas tarefas nem sei se iam preocupar-se em procurar outro. Eu sei que combinámos fazer primeiro com o linear, mas como eu já as conheço, decidi deixá-las à vontade. Espero que elas percebam que podemos experimentar vários e depois observar o que aparece ajustar-se melhor. Eu até lhes digo para escolherem tendo em conta o valor do coeficiente de correlação linear! Não sei se fiz bem, mas logo se vê. (Entrevista pré aula de Patrícia, 11/06/12)

Quer na entrevista, quer na formulação escrita das questões, Patrícia dá a entender que a escolha de modelo matemático se faz a partir do valor do coeficiente de correlação linear. Só faz sentido calcular o valor do coeficiente de correlação linear, se a tendência dos pontos seguir uma reta, o que parece mostrar que Patrícia desconhece este aspeto.

Patrícia começou por colocar, no enunciado da tarefa, uma foto que apelava à construção real da situação que pretendia ver estudada e que levaria à compreensão imediata desta, embora não fosse um registo da realidade conhecida. Na formulação escrita da questão um apelou ao estabelecimento de uma conjectura, com o intuito das alunas mobilizarem o conhecimento extra matemático que possuíam sobre a situação real e estabelecerem associações a partir de elementos da realidade, isto é, conseguirem “avançar” a partir do que já conheciam e dos dados recolhidos que dispunham, para uma provável relação entre a altura e número do calçado daquela amostra de crianças. Logo a seguir, Patrícia solicitou, no enunciado da tarefa, a construção de vários modelos matemáticos, à semelhança do exemplo que iria dar no início da aula. Relativamente ao ciclo de modelação, a fase de construção do modelo matemático esteve presente na criação da tarefa:

Eu peço para fazerem vários tipos de simulação para que elas vejam os vários tipos de correlação que podem existir e que têm que ir experimentando e construindo vários modelos matemáticos. (Entrevista pré aula, 11/06/12)

Embora a formulação escrita da questão dois não estivesse muito clara, o objetivo era que compreendessem que as interpretações dos resultados matemáticos que poderiam obter podiam contrariar a escolha do modelo:

Depois para trabalharem matematicamente peço noutra questão, previsão de valores e assim trabalham com o modelo escolhido. A seguir, peço para caracterizarem a amostra de crianças. Não coloquei mesmo uma questão a pedir a interpretação dos resultados, como a Sara fez e se calhar devia ter colocado, mas eu acho que elas vão interpretar os resultados e depois dizer o que acham daquilo e se o modelo é ou não bom! Eu coloquei uma questão que após escolherem o modelo as pode levar a pensar se acham ou não que aquele modelo escolhido as pode levar ou não a interpretar os resultados, mas agora não sei se é claro! Espero...senão tenho de dizer alguma coisa! (Entrevista pré aula, 11/06/12).

A formulação escrita da questão três que visava a obtenção de resultados matemáticos foi pensada com o objetivo de testar o modelo matemático escolhido e seguidamente interpretar esses resultados. A forma como esta questão estava colocada, permitiu compreender que a professora sabe que deve solicitar cálculos a partir do modelo para determinar previsões no intervalo de possibilidade.

A formulação escrita da última questão apelava a uma caracterização da amostra tendo em conta o contexto real e resultados matemáticos obtidos estudados. O que Patrícia pretendia era que as alunas validassem ou não as conjeturas estabelecidas e, consequentemente o modelo matemático escolhido (última fase de modelação) e justificassem de acordo com todos os aspetos desenvolvidos durante a tarefa:

Eu, na última questão, quero que pensem se o modelo é bom ou não, digam se a conjetura que fizeram manteve-se ou não e digam qualquer coisa sobre as crianças! (Entrevista pré aula, 11/06/12)

No entanto, não pensou numa questão que as levasse à procura de um novo modelo matemático, caso refutassem o inicial revelando a não previsão desta situação quando criou a tarefa.

Planificação da aula

Patrícia referiu-se à planificação da tarefa por fases não mencionando o tempo que previa para cada uma delas. Começou por dizer que iniciaria a aula com um *power point* que permitisse, a partir de um exemplo, explicar as distribuições bidimensionais,

mostrando com recurso ao EXCEL como poderiam obter vários modelos de regressão; a seguir entregaria a tarefa às alunas e, à semelhança do exemplo que iria dar, estas teriam de resolver a tarefa respondendo às questões durante o tempo restante:

Vou começar por dar um exemplo para explicar estes conteúdos das distribuições bidimensionais e depois planifiquei basicamente como nas outras tarefas! Elaborei a tarefa. Elas agora vão ter acesso ao enunciado que é semelhante às anteriores. Durante a aula vão ter acesso ao computador e é a partir do computador que elas vão fazer. Tendo em conta que é a primeira vez que vão estudar distribuições bidimensionais, faz com que eu comece por apresentar um exemplo com outro tipo de variáveis que não sejam nenhuma das que vamos estudar, e fazer vários tipos de simulação para que elas vejam os vários tipos de correlação. Eu a seguir ao exemplo dou a tarefa e depois elas respondem às questões e vão seguindo o que está na tarefa! (Entrevista pré aula, 11/06/12)

Patrícia para esta tarefa, à semelhança do que já tinha feito nas tarefas de “pré modelação” anteriores, organizou as alunas segundo as suas vontades e interesses e em grupos de três ou quatro.

Quanto aos recursos que Patrícia teve necessidade de usar para a criação da tarefa ela referiu-se à tabela com dados recolhidos, computador e EXCEL.

Patrícia antevendo possíveis dificuldades, optou por apresentar um exemplo que ilustrasse o que pretendia ao longo do estudo das distribuições bidimensionais. Destacou o facto de achar que iria ser necessária a sua intervenção quando comessem a construir vários modelos de regressão. Nesse sentido, explicou que alertaria as alunas para construírem para cada modelo matemático um diagrama de dispersão, pois caso contrário, iriam sobrepor-se sendo difícil a escolha do modelo:

O que fiz para atenuar dificuldades é dar o tal exemplo na aula, assim elas vão perceber o que é para fazer! E pode surgir uma coisa! Se calhar vão fazer vários modelos no mesmo diagrama e eu vou ter de dizer alguma coisa, tirando isso não prevejo dificuldades. (Entrevista pré aula, 11/06/12)

Um dos objetivos desta tarefa foi usar a Estatística como ferramenta útil na resolução de problemas da vida real e estudarem uma amostra conhecida.

Relativamente aos conteúdos estatísticos que Patrícia desejou que surgissem a partir desta tarefa foram: relação entre as duas variáveis e interpretação em contexto real; interpretação do sinal do coeficiente de correlação linear; construção do diagrama de pontos; construção de vários modelos de regressão e estimativa de valores:

Coeficiente de correlação linear, diagrama de pontos, regressão e tudo o que tem a ver com a distribuição bidimensional! (Entrevista pré aula, 11/06/12)

Através das suas palavras, Patrícia demonstrou desconhecer que o cálculo e interpretação do valor de correlação linear, apenas mede a associação linear entre duas variáveis.

A tarefa foi pensada por Patrícia, como um ponto de partida para introduzir estes conteúdos estatísticos. O objetivo era que as alunas conseguissem testar a conjectura, passassem por todas as fases de modelação e simultaneamente aprendessem estes novos conteúdos estatísticos e fossem capazes de interpretar e criticar os resultados estatísticos tendo em conta o que conheciam da situação real:

É um ponto de partida. É a primeira vez que elas vão fazer. Eu quero que elas testem a conjectura, vão passando por todas as fases de modelação, aprendam algo sobre as distribuições bidimensionais e sejam capazes de criticar o que vão obter. Para isso, terão de se basear no real. (Entrevista pré aula, 11/06/12)


A condução da aula

Introdução de conceitos sobre as distribuições bidimensionais: Patrícia dirigiu-se à turma, tal como planificado, explicando o que estas iriam trabalhar a partir daquele momento, começando por dizer que já tinham trabalhado várias variáveis, construindo tabelas e gráficos para cada uma, mas a partir desta tarefa iriam começar a relacioná-las. Essas relações já tinham surgido a partir de composições redigidas pelas alunas, mas o que Patrícia quis dizer foi que iriam começar a representar na mesma tabela dados de duas variáveis que desejavam relacionar e perceberem que tipo de associação poderia existir:

Para estas últimas tarefas, nós vamos estudar e trabalhar com as distribuições bidimensionais! O que é que se vai se passar de diferente? Vocês até agora trabalharam sempre as variáveis isoladamente. Em cada tarefa que vocês faziam podiam estar a trabalhar com muitas variáveis, mas quando faziam as tabelas ou os gráficos era sempre cada uma delas em separado. Ou faziam um gráfico sobre o sexo, ou faziam um gráfico sobre o peso, estão a perceber? Agora vamos ver como é que conseguimos relacionar variáveis e vamos então começar a pensar que aquilo que nós andámos a trabalhar neste módulo todo, será que as coisas se relacionam umas com as outras?! Como é que matematicamente nós vamos conseguir tirar conclusões sobre o que é que se relaciona com o quê? Por exemplo, será que a altura das crianças tem alguma coisa a ver com o peso que elas têm? Será que o número de horas que elas dormem se relaciona com alguma outra característica, por exemplo? Enfim, e a partir dessas relações que nós

vamos estudar podemos tirar conclusões! Eu trouxe aqui um exemplo!
(Aula de Patrícia, 11/06/12)

Patrícia começou por apresentar um exemplo, retirado de um manual, e preparou um *power point* para exemplificar o que são distribuições bidimensionais, nuvem de pontos, associação linear ou não linear entre variáveis e como chegar, com recurso ao EXCEL, aos modelos matemáticos:



Cidade	Temperatura mínima (°C)	Temperatura máxima (°C)
Vila do Castelo	2	13
Porto	4	15
Aveiro	5	1
Viseu	1	14
Coimbra	5	17
Castelo Branco	6	18
Santarém	8	19
Portalegre	4	15
Lisboa	6	6
Beja	7	18
Faro	9	20
Funchal	10	18
Ponta Delgada	12	20

Figura 54: Exemplo introdutório para explicar os vários conteúdos relacionados com as distribuições bidimensionais (11/06/12)

Patrícia fez uma introdução para explicar o objetivo de se estudar a relação entre duas variáveis, nomeadamente entre a temperatura máxima e mínima de cidades portuguesas, começando por questionar as alunas se poderia ou não existir alguma relação entre estas temperaturas, embora não tivesse dado tempo para as alunas tentarem estabelecer alguma relação:

Será que existe alguma relação entre as temperaturas máxima e mínima?
Vamos supor que queremos fazer um gráfico com estas duas variáveis, o que é que eu preciso de representar? Eu preciso de representar para cada uma destas cidades, a temperatura máxima e mínima! O EXCEL faz isso e chama-se diagrama de dispersão! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

A professora explicou como construir o diagrama de dispersão com recurso ao EXCEL. Em vez de optar por questionar as alunas sobre o que poderiam representar cada um dos pontos do diagrama de dispersão, adiantou-se dizendo que cada ponto representava uma cidade:

Cada pontinho representa uma cidade. Por exemplo, Viana do Castelo tem temperatura mínima de 2 graus e máxima de 13, portanto o pontinho é este! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

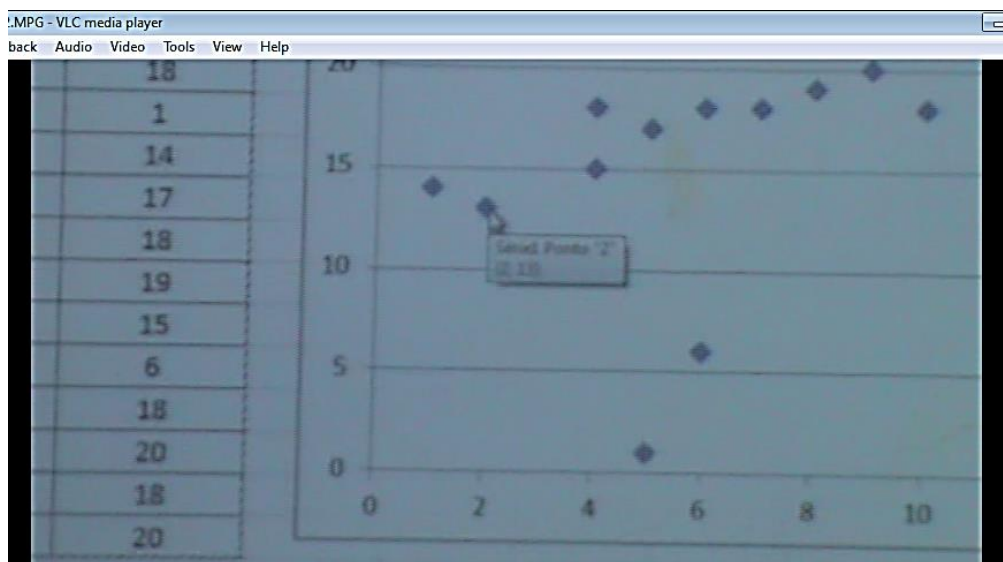


Figura 55: Exemplo usado para explicar o significado dos pontos do diagrama de dispersão, tendo em conta o contexto real (11/06/12)

A professora explicou que o eixo horizontal representava as temperaturas mínimas e o eixo vertical as temperaturas máximas e aproveitou a nuvem de pontos para informar que a partir desta poderiam conseguir fazer previsões através da sua observação:

Por exemplo, se eu quisesse saber numa cidade que tenha temperatura mínima de 8°C, qual seria a temperatura máxima previsível se houvesse correlação entre as duas variáveis? O EXCEL permite saber isto! Com esta nuvem de pontos conseguimos prever isso. (Aula de Patrícia, 11/06/12)

A partir do gráfico, aproveitou para mencionar que a nuvem de pontos pode ter várias tendências, referindo-se a correlação positiva, nula e negativa e questionou as alunas sobre qual a associação existente entre as duas variáveis temperatura mínima e máxima:

Patrícia: Que tipo de correlação é que vocês acham que existe nesta nuvem de pontos?

Aluna: Nula!

Outra aluna: Eu acho que é positiva!

Aluna: Eu acho que não...parece haver ali pontos a fugir!

Patrícia: Independentemente de haver ali um ou outro ponto fugitivo...a tendência no geral é o quê?

Uma aluna: A subir.

Patrícia: Sim...a subir...então podemos dizer que pode ser uma correlação positiva! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

De seguida, explicou que para conseguirmos fazer previsões é necessário desenhar retas ou curvas que melhor se aproximem de todos os pontos e que para cada par de variáveis que pretendessem estudar a relação, será necessário fazer essa investigação. Explicou, com recurso ao EXCEL, como obter a equação da reta ou de “curvas”. Chamou também a atenção de, para além de terem de solicitar a “linha de tendência”, também terem de seleccionar a opção que permitirá calcular o valor do coeficiente de correlação linear, explicando o seu significado. Não disse que só fazia sentido calcular o valor do coeficiente de correlação no caso de uma associação linear, o que demonstrou que desconhece este facto. Patrícia referiu-se aos mínimos quadrados, dizendo que se a reta tivesse outro aspeto, a soma da distância dos pontos à reta seria maior:

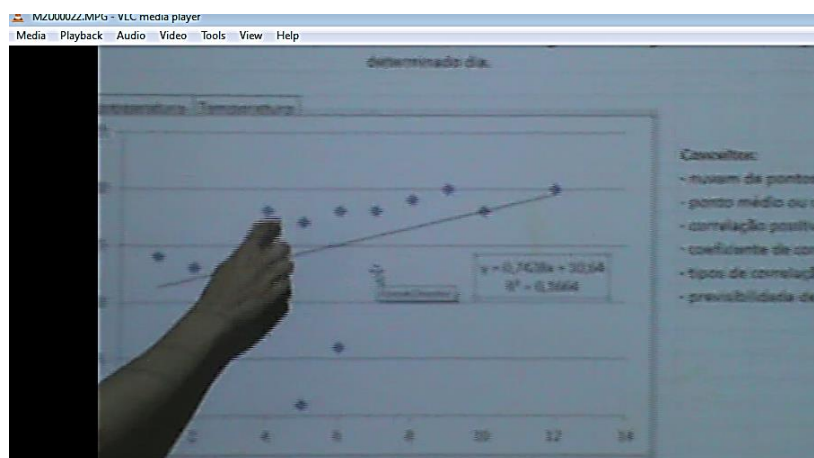


Figura 56: Exemplo usado para fazer referência à reta de regressão linear e aos mínimos quadrados (11/06/12)

Eu tenho a certeza que esta é a reta que melhor se aproxima de todos os pontos, porque qualquer que fosse a posição de outra reta qualquer, eu tenho a certeza que se somasse a distância dos pontos à reta seria muito maior do que a esta! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Explicou a importância do cálculo do valor de coeficiente de correlação linear para conseguirem estudar o grau da intensidade da associação linear entre as duas

variáveis. Não se referiu ao valor absoluto do coeficiente de correlação, mas sim ao valor. Usou linguagem menos correta, porque referiu que quanto mais próximo de um estiver o valor de r , maior será a correlação entre as variáveis:

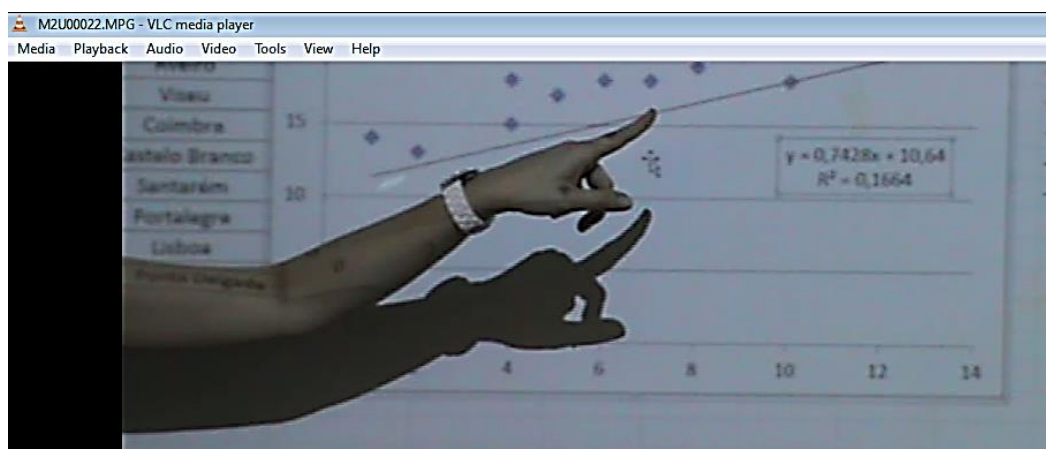


Figura 57: Exemplo usado para explicar o significado do valor do coeficiente de correlação linear (11/06/12)

Estão a ver este r ? É muito importante! Quanto mais próximo de 1 estiver mais forte é a correlação. (Aula Patrícia, 11/06/12)

A professora aproveitou para mencionar que o valor do coeficiente de correlação linear permite saber se a associação entre as duas variáveis é forte ou fraca e que isso é dado pela intensidade do valor de correlação.

Esta é uma reta que está a subir e a relação é positiva, mas será que essa correlação é forte ou fraca? Podemos saber a partir de um valor, estão a ver este r ao quadrado? No EXCEL só aparece o r ao quadrado, mas nós precisamos do valor de r que se chama coeficiente de correlação. Se estiver próximo de 1, diz-se que existe uma correlação entre as variáveis, se estiver próximo de zero, diz-se que não há correlação e se fosse negativo acontecia a mesma coisa. (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Ao calcular, com recurso ao EXCEL, o valor do coeficiente de correlação linear questionou as alunas, mas não explorou a questão colocada por uma delas:

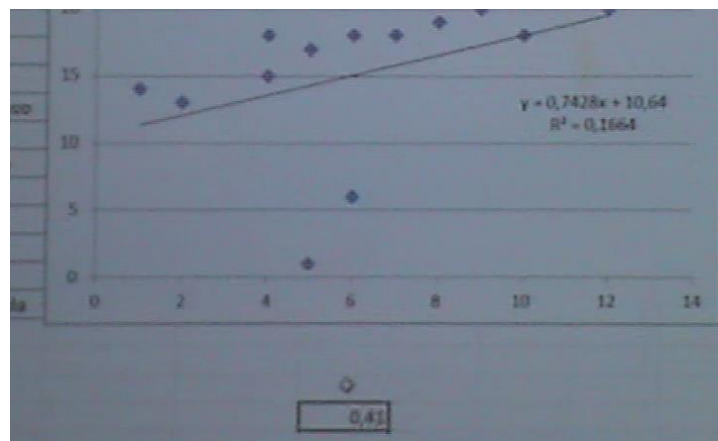


Figura 58: Exemplo dado para calcular o valor do coeficiente de correlação linear, com recurso ao EXCEL (11/06/12)

Patrícia: O valor que deu foi 0,41! É próximo de 1?

Aluna: Não. Isso quer dizer que a correlação não é muito forte?

Patrícia: Isto permite saber como é a relação entre a temperatura máxima e mínima e se uma depende da outra. Quanto mais próximo de um, mais forte é a relação! Isto foi para a linear, mas podíamos ter explorado outras linhas de tendência! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Aproveitou para dar exemplos de outros modelos de regressão cujos valores de correlação vão variando, reforçando a ideia que ao construir, por exemplo, o modelo de regressão quadrática, o valor do coeficiente de correlação linear era maior, logo poderia dizer que este modelo era melhor do que o linear. Patrícia evidenciou desconhecer que o termo coeficiente de correlação linear só se usa e calcula no caso de uma associação entre duas variáveis quantitativas ser linear. Não fez referência ao valor do coeficiente de determinação. O valor de correlação linear obtido para o modelo de regressão quadrática foi 0,45 e Patrícia explicou que, neste caso, se somasse a distância de todos os pontos a esta curva, essa distância seria menor do que no caso da regressão linear, e por isso o modelo quadrático seria o melhor. Esta afirmação reforça a ideia que Patrícia não conhece ou não compreende em que situações se usa o termo coeficiente de correlação linear:

Quando eu calculei o valor do coeficiente de correlação linear para a quadrática obtive 0,45, já dá para ver que é uma correlação mais forte! Posso dizer que esta função polinomial de grau 2 se distancia menos daqueles pontinhos do que o modelo anterior. Se repararem o outro valor era 0,41 e este agora é 0,45, então está mais próximo de 1! Portanto, se perguntassem qual era o melhor modelo até agora, tendo em conta o valor de correlação linear, era este! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

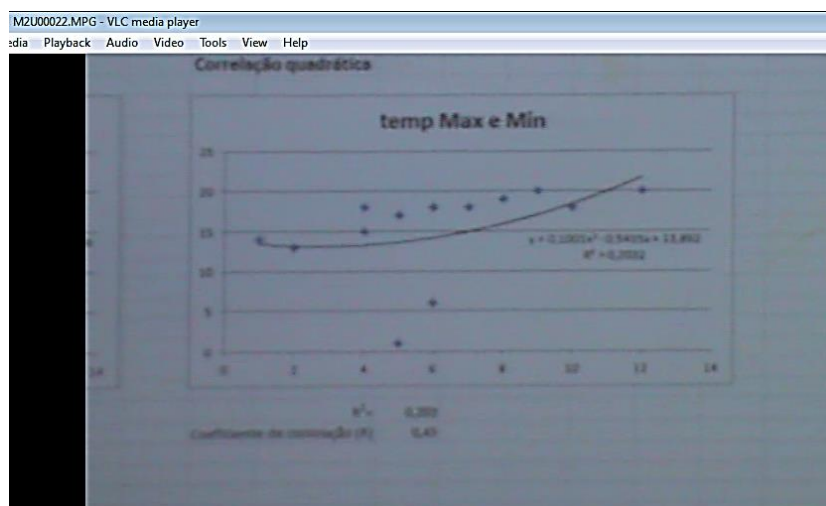


Figura 59: Exemplo dado para obter um modelo de regressão quadrática, com recurso ao EXCEL (11/06/12)

Aproveitou um dos modelos obtidos para explicar como prever resultados a partir desse modelo:

Para que servem então estas funções construídas sobre estes pontos? Por exemplo, se eu quiser saber qual a temperatura máxima de uma cidade se a temperatura mínima for 3°C? Se a temperatura mínima fosse 3°C, ia até ali acima à linha de tendência e indo até ao eixo vertical via quanto é que era aqui a temperatura máxima! Aolho parece que é qualquer coisa entre 10 e 15°C...não é? Como é que eu faria isto agora com cálculos? É para isso que servem as linhas de tendência. Agora eu consigo saber para qualquer situação! O que é que eu podia fazer? Pegava no 3°C e ia substituir na função no x. O x representa as temperaturas mínimas e as máximas o y e o que vamos obter é o y, ou seja, a temperatura máxima e devia dar algo entre 10 e 15°C. Isto é que é bom nas distribuições bidimensionais, porque a partir do modelo consigo prever para qualquer valor! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Patrícia mencionou que a partir dos modelos obtidos poderia fazer previsões para qualquer valor. No entanto, e como já foi referido anteriormente, na formulação escrita da questão que colocou na tarefa ela só solicitou previsões para o intervalo de dados. Patrícia explicou às alunas que a reta de regressão contém o ponto de gravidade e o seu significado:

Esqueci-me de uma coisa no modelo linear! Esta reta não é desenhada ao acaso, para além de ter de se aproximar de todos os pontos passa por um ponto especial que pode não estar ali representado e que se chama centro

de gravidade e representa-se assim (coloca no quadro), o x com a barrinha em cima é a média dos valores de x , neste caso temperatura mínima, e o y com a barrinha em cima representa a média dos yy , neste caso é a temperatura máxima! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Terminada a explicação a partir do *power point*, Patrícia entregou então às alunas o enunciado escrito da primeira tarefa de modelação.

Compreensão da representação real: Patrícia explicou quais eram as variáveis que iam ser relacionadas e disse para as alunas seguirem a estrutura e indicações do enunciado da tarefa para não se perderem. A professora teve a preocupação de colocar uma imagem na tarefa de modo a que as alunas reconhecessem a situação real e de forma quase imediata fizessem a construção da representação real da situação. A formulação escrita da primeira questão teve o objetivo de fazê-las lembrar que já tinham sido estabelecidos diálogos sobre uma possível relação entre a altura e o número dos sapatos. As alunas ao verem a imagem e ao ouvirem a professora falar do objetivo da tarefa, compreenderam a situação:

Aluna: Setora, que foto tão gira! Eu andei a medir algumas crianças. Alguns pais não tinham preenchido tudo e nós fomos lá!

Outra aluna: Pois foi, foi no dia que fomos lá fazer os jogos com o Tangram, pinturas faciais e tiramos algumas medidas!

Patrícia: Lembra-se de eu ter dito que ia chegar a uma altura e íamos precisar disto tudo?

Aluna: Mas nós até já tínhamos dito noutras tarefas o que achávamos destas crianças, sobre a alimentação e outras coisas!

Outra aluna: E também já escrevemos sobre a relação que pode haver entre peso, altura e até com o número do sapato! Posso dizer o que acho?

Patrícia: Deixa as tuas colegas pensarem todas e depois já dizes. Pode ser que existam outras opiniões e assim torna-se mais giro! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Patrícia teve o cuidado de fazer sentir às suas alunas a importância da recolha de dados reais e a utilidade que lhes iriam dar nesta tarefa, como ilustra o excerto anterior.

Construção do modelo real: Patrícia conseguiu que as alunas mobilizassem conhecimento extra matemático e estabelecessem associações a partir de elementos da realidade levando-as à formulação de conjecturas entre a altura e o número do calçado das crianças. A conjectura formulada por todas as alunas foi: “As crianças mais altas parecem

ser as que têm o pé maior”. Ao reconhecerem as relações entre as variáveis estatísticas altura e número do calçado, as alunas passaram à construção do modelo real. A partir das tabelas de registo elaboradas, com base nos questionários e fornecidas por Patrícia, as alunas passaram a construir o modelo real, que consistiu na elaboração, em EXCEL, de uma tabela e respetivo diagrama de dispersão que relacionava o número da criança, com a sua altura e número de calçado. Houve um grupo que teve alguma dificuldade nessa fase e em vez de construir a tabela referida, construíram uma tabela de frequências para o número do calçado, levando a professora a intervir:

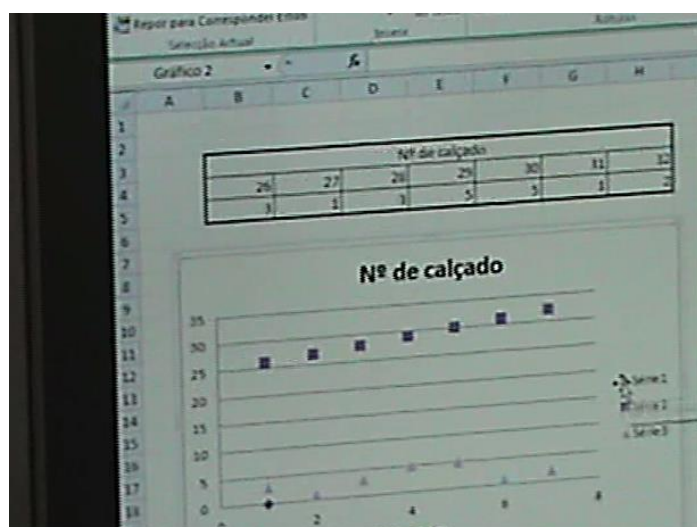


Figura 60: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão incorretamente construídos por um grupo de alunas (11/06/12)

Patrícia: Meninas, que tabela é esta? Como é que eu sei que está mal?

Relaciona a altura com o número de calçado?

Aluna: Não é isto que temos que fazer?

Patrícia: Tínhamos quantos meninos?

Aluna: 20.

Patrícia: Pois é, tínhamos 20 meninos e aqui só estão representados...

Aluna: Sete!

Outra aluna: Eu bem disse! Aí não aparecem as alturas, não é setora?

Patrícia: Não! Então o que foi que fizeram?

Aluna: A frequência absoluta temos de tirar?! Acho que já sei! Temos que pôr uma coluna com as alturas e depois ao lado o número que calçam? É isso?

Patrícia: Sim! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

O modelo real (tabela) obtido por algumas alunas não estava correto, porque quando escreveram a altura usaram pontos em vez de vírgulas, levando Patrícia a intervir, primeiro com um dos grupos e depois dirigindo-se à turma:

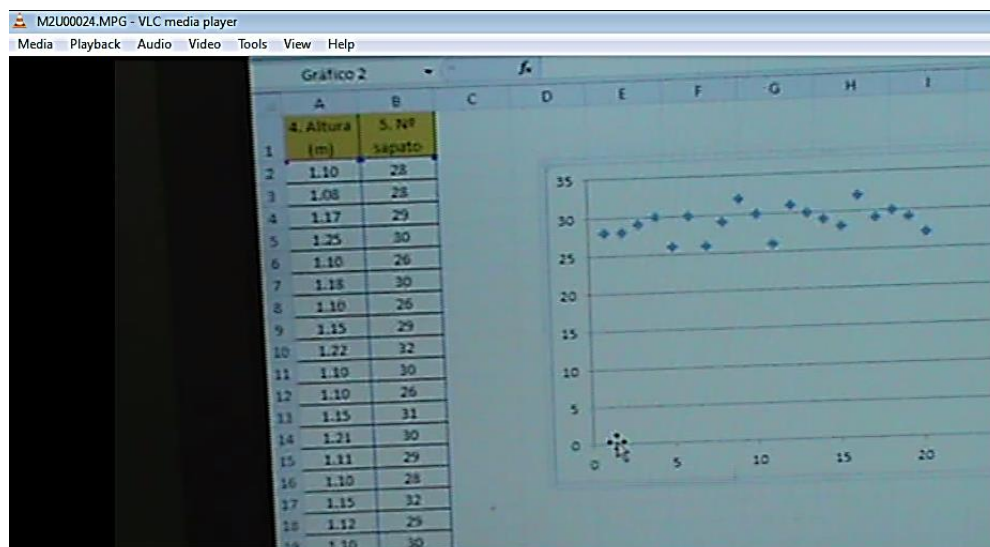


Figura 61: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão incorretamente construídos por um grupo de alunas (11/06/12)

Patrícia: Vamos ver como estão a construir a tabela! E o que será que significam estes pontos!

Aluna: Eu olho para os pontos e parece que não têm a ver com a informação da tabela!

Patrícia: Meninas, já sei o que é! O EXCEL não aceita pontos nos números decimais! Têm de escrever com vírgula. Meninas, oiçam todas! As vossas colegas estavam a escrever as alturas com pontos e no EXCEL não pode ser! Escrevam com vírgula, tomem atenção a este pormenor, perceberam? (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Os modelos reais obtidos pelas alunas de Patrícia foram:

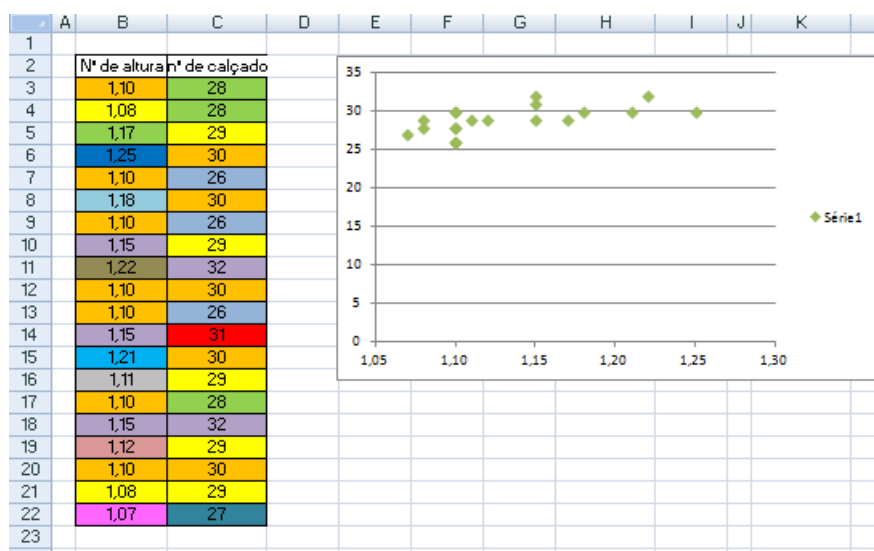


Figura 62: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão corretamente construídos por um grupo de alunas (11/06/12)

Patrícia teve o cuidado de circular pelos vários grupos e dizer às alunas que tivessem cautela na construção das tabelas que iriam levar posteriormente à construção do diagrama de dispersão, pois se colocassem pontos em vez de vírgulas nas alturas, o diagrama de dispersão não estaria correto, o que levaria posteriormente a uma construção errada dos modelos matemáticos. A forma como os dados inicialmente (por alguns grupos) estavam organizados, caso Patrícia não interviesse, influenciaria a construção dos modelos matemáticos, o que não se adequaria à situação descrita. Em todos os grupos essa situação foi detetada e todos os diagramas de dispersão obtidos foram os corretos.

Patrícia construiu a tarefa e planificou-a no sentido de levar as alunas a refletirem sobre a análise dos dados a partir dos modelos reais construídos. Embora o objetivo fosse esse, a formulação escrita da questão dois não foi clara e as alunas não leram a tabela e nem o diagrama, no sentido de entenderem se a conjectura que tinham formulado anteriormente se mantinha ou não a partir da observação da tabela e do diagrama de dispersão.

As alunas não “olharam” para os dados e não refletiram sobre a provável relação entre as duas variáveis que estavam a estudar a partir da observação do modelo real. Patrícia colocou esta questão, logo após a construção do diagrama de dispersão, de modo a permitir tirar algumas conclusões acerca da relação entre as variáveis (direta ou inversa) e do grau da intensidade da associação entre as variáveis (a serem comprovadas posteriormente aquando da construção do modelo matemático) só por observação do

diagrama de dispersão, mas em momento alguma da aula clarificou esta questão e este momento de aula perdeu-se.

Construção do modelo matemático: As alunas de Patrícia iniciaram a matematização da situação e à semelhança do que esta tinha feito para o exemplo inicial (antes da apresentação da tarefa) começaram a construir vários modelos matemáticos.

Patrícia acompanhou a construção dos vários modelos matemáticos, circulando pelos vários grupos e monitorizando o que estava a ser feito:

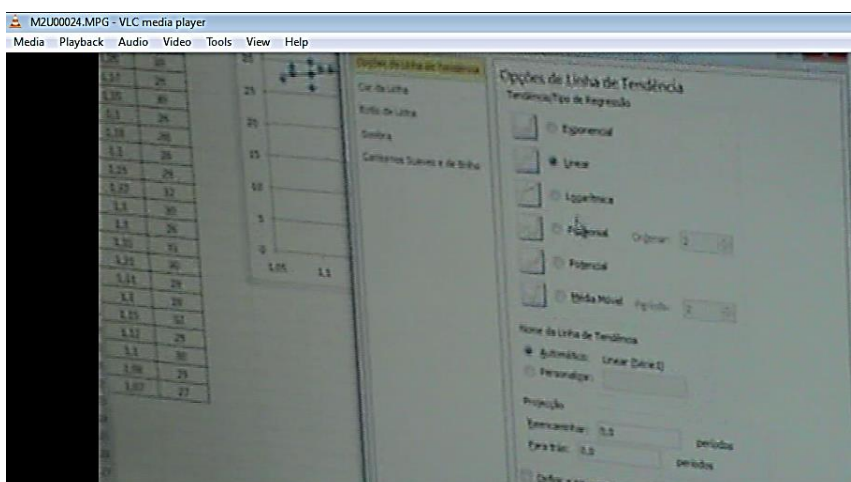


Figura 63: Exemplo da construção de modelos matemáticos, com recurso ao EXCEL, apresentado por um dos grupos de alunas (11/06/12)

Não se esqueçam que para além se seleccionar a linha de tendência que pretendem têm de pedir para mostrar a equação da linha de tendência e mostrar r ! E outra coisa... não façam no mesmo diagrama de dispersão os vários modelos de regressão, senão não vão perceber nada e depois para escolher algum não percebem nada! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Patrícia, dirigindo-se à turma, solicitou que para escolherem o modelo matemático que melhor se ajustava aos dados, deveriam copiar o diagrama de dispersão várias vezes e só depois construírem os vários modelos de regressão. Pois segundo ela, seria mais fácil compará-los e conseguirem perceber por que razão optavam por um e não por outro. Para além disso, referiu que teriam de calcular o valor do r :

Patrícia: Não se esqueçam que têm de pedir o r^2 ! Mas o que nos interessa não é o r^2 , mas sim o r ! Como é que se calcula o r ?

Aluna: É a raiz quadrada, não é?

Patrícia: Sim! Faz lá! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Mais uma vez, Patrícia usou o termo coeficiente de correlação linear quando se referiu à raiz quadrada do coeficiente de determinação para um modelo de regressão não linear.

Alguns dos modelos matemáticos obtidos foram:

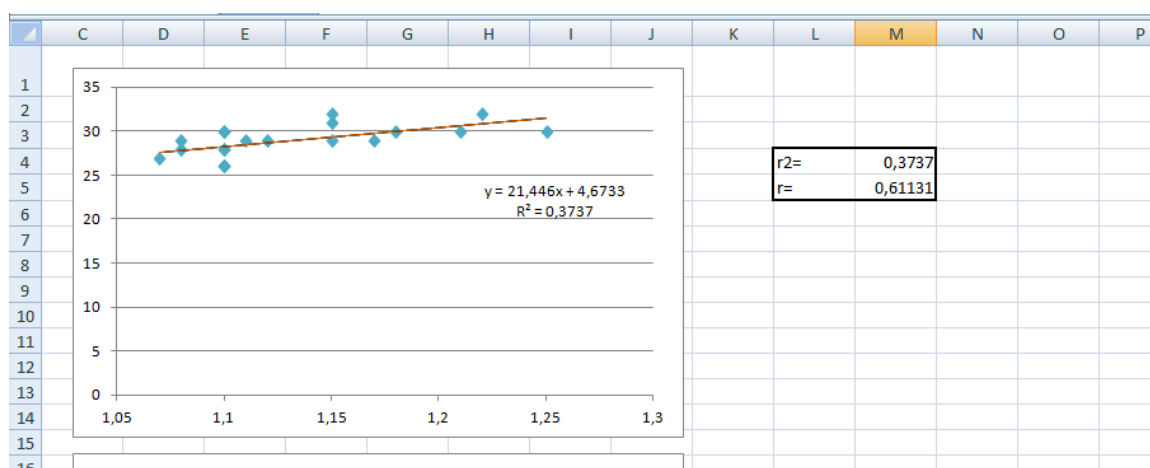


Figura 64: Exemplo obtido por um grupo de alunas, da construção do modelo de regressão linear, com recurso ao EXCEL (11/06/12)

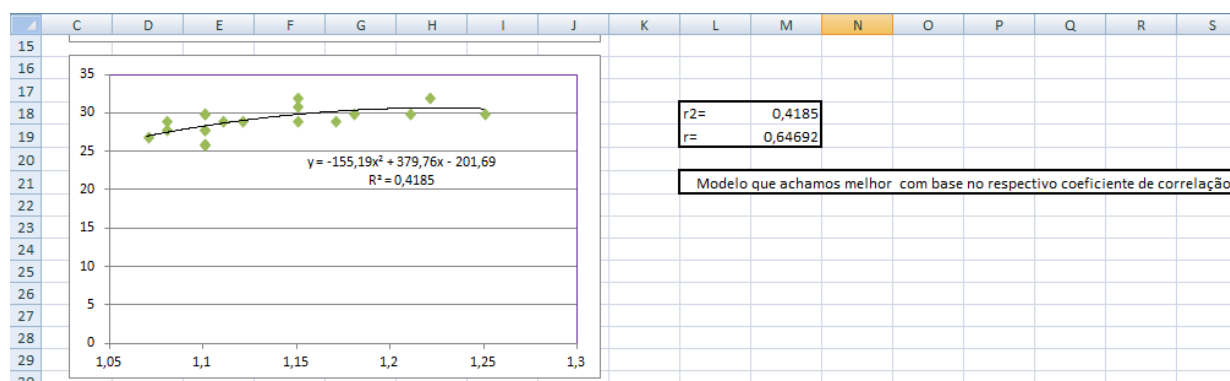


Figura 65: Exemplo, obtido por um grupo de alunas, da construção do modelo de regressão quadrática, com recurso ao EXCEL (11/06/12)

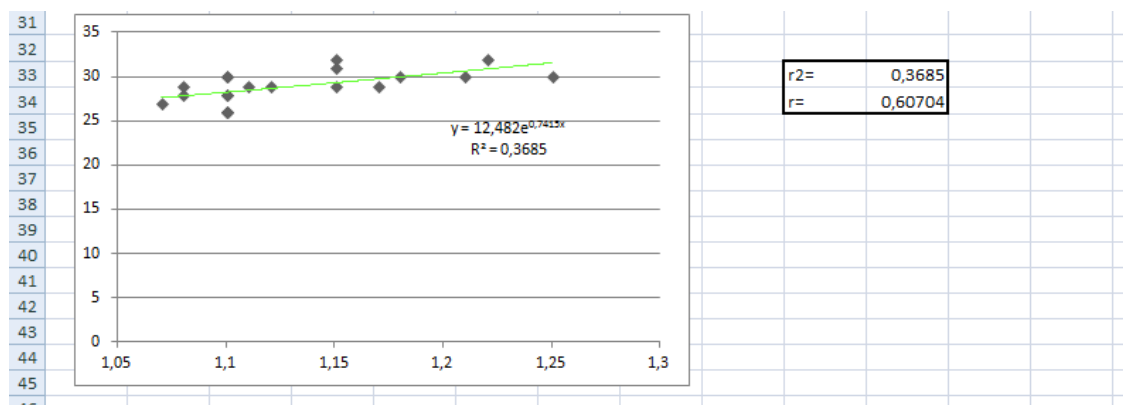


Figura 66: Exemplo, obtido por um grupo de alunas, da construção do modelo de regressão exponencial, com recurso ao EXCEL (11/06/12)

A ideia transmitida pela professora sobre a escolha do modelo de regressão a partir do cálculo do coeficiente de correlação linear esteve presente na resposta que estas alunas deram relativamente à justificação referente à escolha do modelo de regressão. As alunas perceberam, a partir da formulação escrita da questão e das intervenções da professora que o melhor modelo de regressão era o que tinha um maior valor de coeficiente de correlação linear. Patrícia pretendeu com esta tarefa não solicitar nenhum modelo matemático específico, mas sim deixar as alunas construírem vários, o que levou a alguns problemas. O que aconteceu foi que alguns dos modelos obtidos correspondiam a funções que ainda não tinham sido trabalhadas em sala de aula. Por exemplo, o modelo exponencial, neste curso profissional, nunca seria abordado, porque não faz parte do programa de Matemática para este curso profissional.

Como se observa na figura referente ao modelo de regressão quadrática, esse foi o modelo matemático escolhido e esse facto deveu-se ao valor da raiz quadrada do coeficiente de determinação calculado. Durante a aula, Patrícia disse-me que não estava à espera que escolhessem o modelo de regressão quadrática, mas sim o linear, reconhecendo que não deveria ter colocado na formulação escrita da questão a escolha do modelo a partir do valor do coeficiente de correlação linear. Isso foi referido, porque as alunas não conseguiam trabalhar bem com o modelo de regressão quadrática. Durante a condução da aula, ao aperceber-se que estavam a escolher “linhas de tendência”, no EXCEL, com as quais não estavam familiarizadas, dirigiu-se à turma, no sentido de restringir essa seleção:

Meninas oiçam! Nós não falámos e nem vamos falar de alguns modelos que aí aparecem...o exponencial, logarítmico e outros não são trabalhados no vosso curso. Por favor, escolham só entre os polinomiais, grau 1, 2 e até 3 se calhar! Desculpem! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

Terminada esta fase, Patrícia colocou, no enunciado da tarefa, questões no sentido de levar as alunas a testarem o modelo escolhido e assim passaram para a próxima fase do ciclo de modelação.

Obter resultados matemáticos: Algumas alunas não compreenderam que tinham de usar a equação do modelo de regressão escolhido para preverem resultados. Patrícia aproveitou o que as alunas estavam a dizer a partir da observação direta do gráfico, para questioná-las sobre o valor esperado para o número do sapato e como poderiam fazer se não tivessem gráfico:

Aluna: Professora pode vir aqui?

Patrícia: Sim, sim!

Aluna: Aqui diz assim! Será que podemos estimar quanto mediria uma criança que calçasse o 30? Vamos só responder a isto para o modelo que escolhemos?

Patrícia: Sim, eu não quero que façam isso para todos os modelos, só para aquele que escolheram!

Outra aluna: Então eu posso ir ao gráfico ver onde está o 30, que é o número do sapato e depois procurar mais ou menos qual será a altura?

Patrícia: Poder podem, mas ficam apenas com uma ideia! Quanto é que média então?

Aluna: Tanto podia medir 1,15 m como 1,17, não sabemos bem! E então?

Patrícia: Vamos lá ver, para ter uma previsão digamos mais certa, é melhor fazerem outra coisa! Estão a ver esta função aqui, vamos substituir! O número do sapato...dá lá aí uma caneta...substitui-se o número do sapato onde? (Aula de Patrícia, 11/06/12)

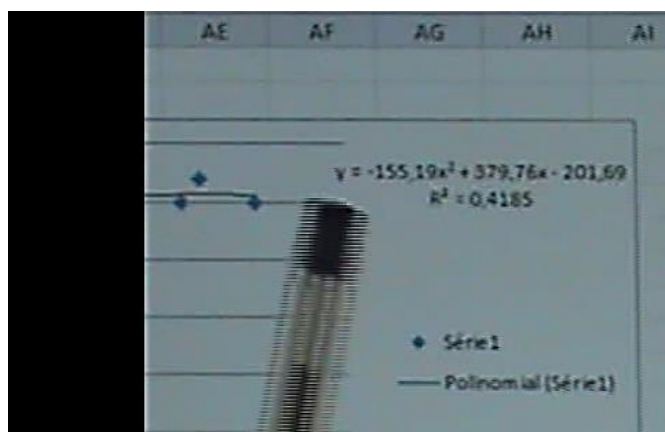


Figura 67: Exemplo da equação do modelo de regressão quadrática, obtido por um grupo de alunas, com recurso ao EXCEL (11/06/12)

Patrícia: Pela análise gráfica eu consigo perceber aproximadamente que é mais ou menos 1, 15 m! Vamos calcular para ver! Então é assim: o número do sapato está no eixo do y e a altura está no eixo do x, então vou substituir o 30 no y. Estão a ver?!

Aluna: Fazemos no papel a equação?

Patrícia: Sim e depois dão a resposta aqui! Está bem? O que é que isto vai dar? Vai dar uma fórmula resolvente! Lembram-se?

Aluna: Mais ou menos! Isso é muito complicado!

Patrícia: Vamos lá tentar!

Aluna: Como professora?! Eu não consigo!

Outra aluna: Não nos lembramos!

Patrícia: Vamos tentar meninas! (Aula de Patrícia, 11/06/12)

A professora solicitou previsões para a variável explicativa conhecido o valor da variável resposta, o que suscitou alguns problemas. Patrícia não previu esta dificuldade e a forma como as alunas teriam de calcular o valor de x, teria de ser com recurso à fórmula resolvente, o que se revelou um constrangimento, dado que, estas alunas, a maioria era oriunda de cursos CEF implicando que muitos conhecimentos matemáticos não tivessem sido adquiridos ou consolidados. A professora disse-me que estava à espera que escolhessem o modelo linear e como tinham escolhido o modelo de regressão quadrática estava a dar cálculos mais complicados do que ela tinha previsto. Apanhada desprevenida, não conseguiu pensar numa forma rápida e conhecida pelas alunas para resolver aquela equação o que causou algum nervosismo na professora e algum desalento nas alunas. Este episódio de aula demonstrou que não é habitual a abordagem destes conteúdos estatísticos em sala de aula e que nem a professora se sentiu à vontade com eles. Patrícia optou por resolver a equação e indicar os resultados às alunas a fim de prosseguirem o trabalho:

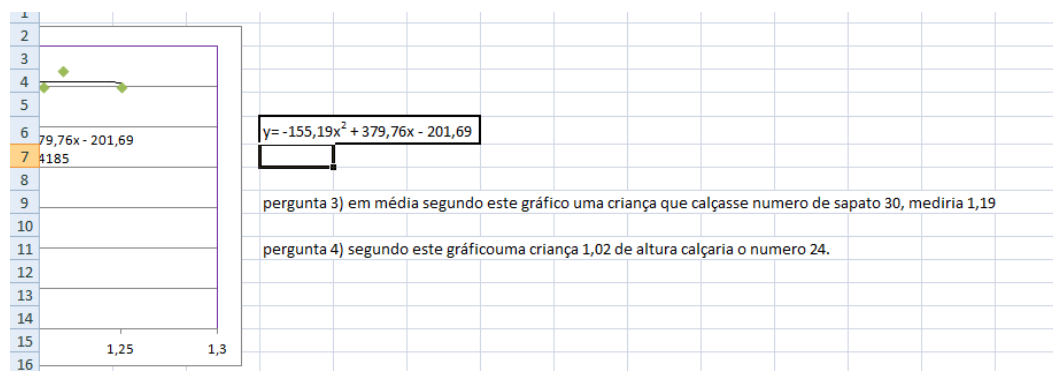


Figura 68: Exemplo das respostas dadas por um grupo de alunas durante a fase de obtenção de resultados matemáticos (11/06/12)

A resposta à quarta questão foi realizada com sucesso, pois as alunas entenderam que tinham de substituir o valor da altura no x , obtendo assim uma previsão para o número do calçado.

Interpretação dos resultados matemáticos: Patrícia não colocou nenhuma questão direta que levasse as alunas a pensarem sobre os resultados obtidos, mas era sua intenção que “olhassem” para os resultados matemáticos que obtiveram e refletissem sobre a sua adequabilidade à situação real. Na quarta questão, um dos grupos substituiu bem o valor dado para a altura, mas o resultado que estavam a obter para o calçado era superior a 100. Isso fez com que as alunas questionassem o valor e fossem rever os cálculos, descobrindo que tinha havido um erro. Dessa forma, e sabendo que é impossível alguém calçar um número de sapato desses perceberam que algo poderia estar errado.

Validação do modelo matemático: Relativamente à validação do modelo, a maior parte das alunas manteve o modelo de regressão quadrática, dado que as previsões correspondiam a valores aceitáveis tendo em conta o contexto. Houve um grupo que não conseguiu trabalhar matematicamente com o modelo de regressão quadrática e optou por escolher o linear. Essa escolha não teve a ver com a interpretação dos resultados matemáticos e sua comparação com a realidade, mas sim pelo facto de acharem mais simples trabalhar com este último.

Podemos dizer que estas duas fases do ciclo de modelação não foram conseguidas da melhor forma e muitas outras situações poderiam ter sido exploradas ou evitadas. Na formulação escrita da última questão, Patrícia solicitou uma caracterização das crianças,

“A nuvem é crescente o que significa que é positiva e é possível relacionar as duas variáveis. E podemos ainda verificar que a nuvem tem uma correlação forte.”

37 Questão 5

38

39 A relação é positiva pois os dados tende a subir.

40

41

42

Esta fase final não foi discutida e não houve uma síntese do que foi trabalhado em sala de aula.

Quando questionada sobre a forma como tinha corrido a aula, Patrícia de uma forma um pouco decepcionada, respondeu que tinha corrido menos bem do que as anteriores. Surgiram alguns imprevistos e dificuldades não antevistos por Patrícia que a levaram a sentir que não tinha conseguido conduzir e preparar a aula da melhor forma:

Patrícia ficou algo surpreendida com as dificuldades das suas alunas, nomeadamente na fase em que tinham de obter resultados a partir do modelo matemático obtido. Todos os modelos matemáticos trabalhados pelas alunas tinham sido polinomiais, o que suscitou alguma estranheza relativamente às dificuldades observadas, porque o primeiro módulo lecionado tinha sido o das funções polinomiais e supostamente todos os conteúdos inerentes a esse módulo já deviam ter sido esclarecidos, permitindo deste modo e nesta altura do ano, as alunas serem capazes de resolver equações simples do 1.º grau e

aplicar a fórmula resolvente na resolução de equações do 2.º grau. No entanto, isso não se verificou, revelando que durante a leção do módulo “Funções Polinomiais”, Patrícia não se apercebeu das dificuldades das suas alunas:

Houve necessidade de fazer alguns cálculos e elas sentiram-se não preparadas para o fazer. Eu não estava à espera que não soubessem fazer uma fórmula resolvente, que não soubessem substituir o valor de x numa equação de uma reta, esse tipo de coisas elas não estavam a conseguir fazer! Isso tudo condicionou um pouco o trabalho delas. Eu tive de dar os resultados! Não me tinha dado conta que não sabiam isto! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

Patrícia mencionou que a exploração da tarefa não tinha sido bem como prevista e que não deveria ter começado a abordagem às distribuições bidimensionais desta forma, embora na sua opinião as alunas tivessem ficado com a perceção que poderiam existir vários modelos de regressão, que era um dos objetivos dela. No entanto, é notório, nas suas palavras, algum desapontamento em relação à forma como conduziu a aula, como preparou a tarefa e pela opção que tomou contrária à acordada em reunião de trabalho colaborativo:

Por um lado, consegui que elas tivessem uma perceção que existem vários modelos possíveis, no entanto, pela análise dos diferentes grupos, houve um grupo que ia escolher o modelo exponencial, outras queriam escolher o modelo polinomial de grau 6. Enfim! Eu é que tive de direccionar um bocadinho. Eu deveria ter dito logo na tarefa para se restringirem aos modelos polinomiais. Assim elas experimentaram tudo e claro não sabiam trabalhar com esses modelos, porque não conhecem e nunca irão ser dados no curso delas. E depois, outra coisa... eu dizia para ter em conta o valor do coeficiente de correlação linear e o que aconteceu é que umas porque viam o valor de r^2 escolhiam o modelo, outras porque olharam para o gráfico e acharam que era o que melhor se ajustava à nuvem de pontos! Acho que foi uma confusão! Eu pedi isto assim porque tive receio que se tivesse pensado só no linear, elas pensassem que esse é sempre o modelo que devemos escolher, mas acho que devia ter feito assim e para além disso, foi o que falámos todas na reunião! Já vi que como fiz não foi o melhor! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

Ao ser questionada sobre as várias fases do ciclo de modelação, Patrícia afirmou que fez com que as alunas passassem por todas as fases. Reconheceu a importância do contexto real, começando por dizer que as alunas compreenderam de imediato a situação e sentiram-se motivadas, porque conheciam a realidade:

Eu acho que consegui com que passassem por todas as fases. Elas entenderam logo qual era o contexto e reconheceram e perceberam que aqueles dados recolhidos iam servir para alguma coisa, para conhecerem aqueles meninos! Acho que conhecerem a realidade com a qual têm estado a trabalhar e vão continuar é meio caminho andado para se terem motivado! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

Patrícia disse que quando pediu que estabelecessem uma relação entre a altura e o número do sapato, as alunas compreenderam o que se pretendia e conseguiram entender que dados é que iam ser necessários para o estudo, tendo-as levado a construírem os modelos reais. Contudo, referiu-se a alguns pequenos problemas na construção do modelo real, mas que foram solucionados rapidamente:

Elas depressa perceberam o que tinham de fazer quando pedi para relacionarem a altura com o número do sapato. Escreveram as conjecturas delas e depois compreenderam que tinham de ir à tabela dos dados e retirar apenas o que precisavam. Construíram as tabelas, algumas meninas colocaram pontos nos números decimais e depois a nuvem de pontos tinha menos pontos do que crianças, mas eu disse para colocarem vírgulas e depois ficou bem. (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

Patrícia explicou que a passagem do modelo real para o matemático, não foi complicado. No entanto, a professora disse que surgiu um problema que esteve relacionado com o facto de ter sido pedida a construção de vários modelos matemáticos. As alunas seleccionaram várias linhas de tendência permitidas pelo EXCEL, mas muitos dos modelos envolviam conhecimentos matemáticos que estas desconheciam:

Elas começaram a pedir várias linhas de tendência no EXCEL e eu comecei a ver que estavam todos em cima uns dos outros e disse logo para fazer para cada modelo um diagrama. Até aí tudo bem, porque elas perceberam que tinham de construir vários modelos e depois escolher um e não foi complicado. O problema é que começaram a experimentar todas as possibilidades que o EXCEL permitia e começou a aparecer exponencial, logarítmico e mais ainda e elas não sabem trabalhar com essas funções! Eu tive de dizer que fizessem só para o polinomial. Devia ter colocado isso na tarefa! Não pensei, mas disse na aula e ainda fui a tempo! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

A fase de obtenção de resultados matemáticos foi apontada por Patrícia como sendo a mais problemática, uma vez que a maioria das alunas não conseguiu trabalhar matematicamente a partir dos modelos. As alunas não tinham competências matemáticas

que lhes permitisse chegar aos resultados matemáticos. A razão da escolha do modelo não foi clarificada durante a aula e na entrevista a professora lamentou isso:

Aí é que foi difícil, foi a parte mais problemática, porque quando se pedia para determinar determinado valor de x , que era só substituição elas não sabiam fazer e quando escolheram o modelo de 2º grau, então pior. Mesmo no modelo de regressão linear não conseguiam fazer! Elas não têm conhecimentos! A escolha do modelo foi algo confusa, não sei se elas perceberam porque escolheram um e não outro. Eu induzi essa escolha porque falei no valor do r ao quadrado e se calhar não devia ter feito, outras escolheram o linear porque era o mais fácil de substituir...isto não correu lá muito bem! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

Segunda Patrícia, a fase de interpretação de resultados foi facilitada pelo conhecimento que as alunas tinham das crianças, tendo sido um fator importante na crítica dos resultados que obtiveram:

Na interpretação dos resultados, perceberam que com determinada altura calçavam determinado número. O facto de perceberem a situação e reconhecerem que se tratava de crianças entenderam que aqueles valores eram possíveis! Houve um grupo que se enganou em cálculos e chamou-me logo, porque dizia que algo não devia estar bem. Se calhar, se fosse outra situação que não conhecessem, nem ligavam aos valores que dava! A maior parte das vezes, os alunos não criticam os resultados e aqui estavam mais despertas para este aspeto porque era a realidade e as crianças que conheciam! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

Patrícia mencionou que as alunas ao criticarem os resultados e ao aceitá-los como possíveis, validaram o modelo matemático não questionando se poderia ou não existir outro melhor:

A última fase, elas não rejeitaram nenhum modelo. Depois de o testarem viram que dava resultados possíveis e nem questionaram e nem eu! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

Patrícia mencionou que o envolvimento das alunas, a nível matemático não foi muito bom, justificando com o percurso escolar das alunas. Ao nível do empenhamento e motivação referiu que foi bastante satisfatório, mostrando-se satisfeita com esse aspeto e dececionada com o anterior:

Eu acho que ao nível matemático não foi muito bom. Eu notei muitas dificuldades. Algumas alunas vêm de CEF, outras do estrangeiro e há alguns anos que não têm Matemática e têm muitas lacunas. Ao nível do

empenhamento sim, elas estão empenhadas e gostam do que estão a fazer!
(Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

Acontecimentos desta aula levaram Patrícia a uma reflexão imediata sobre o modo como sequenciou esta tarefa. Admitiu que deveria ter seguido o acordado em reunião conjunta, mas o receio de as alunas ficarem com a ideia inicial que o modelo linear era o melhor e o único possível, levou-a a tomar uma decisão pessoal de alterar a ordem acordada. Essa alteração, segundo ela, não resultou da melhor forma e reconheceu que no futuro fará de forma distinta:

Fazia diferente! Se calhar, no sentido de as orientar para o modelo linear. A minha opção foi deixar explorar o leque de opções que havia e acho que isso atrapalhou um bocadinho. Eu não queria que ficassem com a ideia que só existe o linear e esse é o melhor! Acho que para uma primeira tarefa das distribuições bidimensionais o ideal é direcionar para o modelo linear e depois logo apresentar uma tarefa que as deixe escolher e explorar. Foi assim que combinámos e eu alterei! (Entrevista de reflexão imediata pós aula, 11/06/12)

Síntese

Segue-se uma síntese do conhecimento para ensinar Estatística que Patrícia revelou na preparação, condução e reflexão desta tarefa de modelação, distinguindo-se os diferentes tipos de conhecimento.

Iniciando com o conhecimento comum matemático, verificou-se que Patrícia teve necessidade de o convocar. Nesta tarefa, este conhecimento diz respeito ao conceito de distribuição bidimensional, modelo de regressão linear e não linear, coeficiente de correlação linear, centro de gravidade e diagrama de dispersão. Patrícia parece estar segura relativamente à maior parte destes conceitos, mas não a todos. A professora revelou não conhecer que o valor do coeficiente de correlação linear mede apenas a associação linear entre duas variáveis e não outras. O conhecimento comum matemático é essencial na fase de construção do modelo matemático, levando a que alguma fragilidade desse conhecimento interfira na escolha do modelo.

No que diz respeito ao conhecimento comum não matemático, observou-se que Patrícia revelou neste caso um bom domínio, conhecendo detalhes da realidade a estudar. A professora pesquisou sobre a área profissional das alunas e tendo estado em contato com o terreno, conseguiu compreender como operacionalizar a recolha de dados reais.

Revelou saber usar o EXCEL como recurso na construção de tabelas, diagramas de dispersão e funções relacionadas com os vários modelos de regressão. Assim, conseguiu construir instrumentos de recolha de dados, nomeadamente a elaboração de um questionário sobre os hábitos diários e características de crianças do pré-escolar e ainda uma tabela resultante dos dados desse questionário. Essa última tabela, permitiu transportar os dados para a sala de aula, conduzindo a uma melhor compreensão real da situação.

Quanto ao conhecimento especializado matemático, foi notória alguma inexperiência na abordagem destes conteúdos em sala de aula. A professora não usou os dados reais que disponha para apresentar um exemplo inicial sobre as distribuições bidimensionais e optou por usar um exemplo do manual. Outra evidência está relacionada com a opção que a professora tomou ao ter pretendido de forma intencional, ensinar que a tendência dos pontos num diagrama de dispersão nem sempre é linear. Embora a intenção tivesse sido boa, o que sucedeu foi que as alunas escolheram modelos matemáticos cujas funções eram desconhecidas para elas e com as quais não conseguiram trabalhar matematicamente, gerando-se alguma confusão. Patrícia resolveu nessa situação, pedir para se restringirem aos modelos polinomiais e terem em atenção o valor do coeficiente de correlação linear. Alguns desses constrangimentos foram referidos por Patrícia durante a entrevista pós aula. A professora explicou que a aula não decorreu como previsto, mencionando que surgiram situações e dificuldades inesperadas. Disse ainda que, sentiu dificuldades durante a condução da aula, porque foi apanhada desprevenida relativamente ao trabalho matemático que as aulas desenvolveram, quer durante a escolha de um modelo matemático, quer na fase de testagem do mesmo. Uma outra dificuldade foi apontada, esteve relacionada com a opção que tomou, quanto à sequenciação de leção dos conteúdos estatísticos, inerentes às distribuições bidimensionais. A professora explicou que não deveria ter tomado essa opção contrária à decidida e discutida em reunião de equipa colaborativa.

O conhecimento comum matemático da professora influenciou o conhecimento especializado matemático e como tal, a forma como conduziu esta fase da aula foi algo confusa e o conhecimento transmitido sobre estes conteúdos, pouco claro. O facto de a professora referir-se sempre ao valor da raiz quadrada do coeficiente de determinação como sendo o valor do coeficiente de correlação linear, levou a que formulasse de forma menos correta as questões, quer no enunciado da tarefa, quer durante a condução da aula. Patrícia não conseguiu prever que o modelo matemático poderia ser refutado e, como tal,

nem no enunciado escrito da tarefa e nem durante a aula, colocou questões que levasse à procura de um outro modelo mais adequado. Neste caso, revelou inexperiência na gestão deste tipo de situações. Para além destes episódios, a professora pareceu não saber quais as dificuldades e limitações das suas alunas, do ponto de vista matemático.

Por último, o conhecimento especializado não matemático evidenciado revelou-se robusto, pois o conhecimento da realidade permitiu a partir dos contextos reais, pensar em questões adaptadas e contextualizadas, assim como ensinar a organizar dados reais em tabelas. Para além disso, ensinou a usar o EXCEL para que o trabalho matemático fosse facilitado.

Embora a fragilidade do conhecimento comum e especializado matemático tivessem conduzido a escolhas de modelos menos conscientes, o facto de conhecer os contextos permitiu minimizar a aprendizagem menos correta desses conteúdos. O conhecimento não matemático veio em auxílio do conhecimento matemático e fez a professora refletir sobre decisões iniciais que a consciencializaram que não foram as melhores.

A segunda tarefa de modelação: “Estarei gordinho ou serei baixinho?”

Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação

Esta tarefa é a segunda de modelação e surgiu a partir da recolha de dados dos questionários, das conjecturas e hipóteses que as alunas fizeram a partir das observações diretas da realidade vivenciada. As alunas de Patrícia tinham referido, numa aula posterior a uma atividade realizada com a turma do pré-escolar, no âmbito de uma disciplina técnica, que parecia que algumas das crianças apresentavam sinais de fome e o peso provavelmente não seria o adequado para a sua idade. Essa ideia, e após Patrícia observar alguns dados recolhidos, pareceu-lhe algo que poderia ser estudado matematicamente e, caso se verificasse, as suas alunas enquanto futuras técnicas auxiliares de apoio à infância, poderiam fazer algo em prol dessas crianças e alertar a direção e educadora do agrupamento para um problema social:

Elas fizeram uma atividade na escolinha das crianças e ao observarem aquelas crianças comentaram comigo que achavam que algumas deviam passar fome! Vinham muito incomodadas e perguntaram-me se não podíamos saber e tentar ajudar, então eu pensei que talvez pudéssemos relacionar o peso e a altura, ver o IMC e perceber como estavam aquelas

crianças! As minhas alunas queriam ir logo falar com a diretora e perguntar se a escola podia dar mais alguma ajuda a nível alimentar e eu disse-lhes que tínhamos de perceber se realmente estavam subnutridas, falar com a educadora e depois pensávamos em algo. Então disse-lhes que a Estatística e as distribuições bidimensionais poderiam ajudar a estudar os dados que tínhamos e, estudar a relação entre o peso e altura e comparar com o IMC. (Entrevista pré aula, 21/06/12)

Esta tarefa foi criada com o objetivo de estudar o modelo de regressão linear e fazê-lo emergir a partir da necessidade de tentarem resolver um problema real, surgido a partir de uma preocupação das alunas de Patrícia. A tarefa foi estruturada com o propósito de todas as fases do ciclo de modelação emergirem e de dar destaque à realidade. A professora referiu que a aula de modelação anterior não correu como ela tinha planeado e depois de falar informalmente e em tom de desabafo com as colegas sobre a primeira tarefa de modelação, percebeu que no caso delas a aula tinha corrido de outra forma. Nesse sentido, refletiu e achou por bem, aplicar esta segunda tarefa visando a construção do modelo de regressão linear a fim de clarificar alguns aspetos que pareciam ter ficado confusos:

A outra aula não correu como eu quis! Eu pensava que começando pelo linear elas depois iam sempre ficar com a ideia que só existe este, mas acho que se calhar ainda baralhei mais. Acho que nem entenderam bem porque escolheram o modelo. Falei com a Patrícia e Filipa num intervalo e elas disseram-me que tinham feito a primeira tarefa como combinado. Agora vi outra vez as primeiras tarefas delas e optei por pedir o modelo linear, faço mais questões para pensarem e espero que corra melhor e assim clarificar algo que tivesse ficado menos aprendido! Por um lado, até foi bom que não tivesse corrido tão bem, porque fez-me pensar. (Entrevista pré aula, 21/06/12)

Patrícia partiu de uma preocupação das alunas, e a conjectura que estabeleceram foi o ponto de partida para a construção de uma tarefa baseada num contexto social característico do meio onde está inserido, o agrupamento de escolas:

A conjectura que vamos estudar é verificar se realmente as crianças estão subnutridas como elas dizem e se há fome! Para isso vamos estudar a relação entre o peso e a altura e calcular o IMC para tirarem conclusões. O modelo linear vai ajudar a perceber! (Entrevista pré aula, 21/06/12)

Patrícia baseando-se na preocupação das suas alunas, selecionou as variáveis que lhe interessavam e, com base na tabela de dados que organizou a partir das respostas aos questionários, construiu um diagrama de dispersão e a equação da reta de regressão linear. O que obteve pareceu-lhe interessante para o estudo pretendido. Para além disso, e tendo em mente que desejava que as alunas comprovassem a sua desconfiança, fez uma pesquisa na internet sobre o IMC, encontrando a fórmula de cálculo e uma tabela que permitiria às alunas tirarem algumas conclusões. Esta pesquisa demonstrou que a professora teve em consideração o contexto real e preocupação das suas alunas, construindo uma tarefa que lhes despertasse curiosidade e vontade de trabalhar:

Utilizei o recurso internet para procurar a informação sobre o índice de massa corporal e vão relacionar com o peso e altura. Assim, espero que esta informação as ajude a comprovar ou não a sua teoria e ao mesmo tempo dá para lecionar estes conteúdos. Peguei nos dados do peso e altura, fiz o diagrama e a equação da reta e acho que dá para dar este conteúdo de forma interessante e contextualizada. A tabela do IMC vai dar para refletirem e tirarem conclusões. (Entrevista pré aula, 21/06/12)

A professora deu, um título alusivo à tarefa e introduziu uma imagem relacionada com o contexto real. Começou por apresentar o objetivo geral mencionando que conteúdos estatísticos iriam surgir a partir dos contextos reais e os materiais necessários para a realização da tarefa. Logo de seguida, introduziu a definição de IMC e a respetiva fórmula de cálculo e, ainda uma tabela interpretativa sobre o valor do IMC. A partir daí, seguiram-se todas as questões baseadas não só no contexto real, como também no ciclo de modelação, apresentando na formulação escrita da última questão uma tabela ilustrativa que permitiria tirar conclusões sobre o IMC, peso e horas de sono para a amostra de crianças.

A construção da tarefa

Patrícia começou a construção da tarefa com uma informação relativa ao significado do índice de massa corporal, forma de o calcular e uma tabela interpretativa sobre o significado do valor do IMC. Patrícia partiu do princípio que ao verem esta informação na tarefa, a conjectura previamente estabelecida em aulas anteriores, estaria presente, não sentindo necessidade de a solicitar:

Não peço para relacionarem peso com altura porque estando lá o IMC, acho que elas vão entender a tarefa e saber que vão estudar o que me disseram

sobre as crianças...que estas estão magras e algumas têm fome! (Entrevista pré aula, 21/06/12)

A professora ao apresentar a tabela sobre o IMC teve a intenção de levar as alunas a mobilizarem conhecimento extra matemático sobre o que tinham observado nas crianças, e deste modo serem capazes de construir o modelo real. Embora a formulação escrita da questão sobre o estabelecimento da relação não estivesse presente, Patrícia com a informação fornecida, no enunciado da tarefa, achou que esta bastaria para entenderem como organizar os dados referentes ao peso e altura das crianças e desta forma, construir uma tabela e o respetivo diagrama de dispersão. Nesse sentido, colocou no enunciado da tarefa uma primeira questão onde solicitou a nuvem de pontos, informando acerca do significado das variáveis x e y .

A representação gráfica pedida, demonstrou que a professora compreendeu que esta pode revelar padrões e relações existentes e escondidas nos dados, informação esta que pode não ser perceptível a partir de tabelas ou dados originais. Patrícia, ao pensar na formulação escrita da segunda questão, teve o objetivo de terem a oportunidade de pensarem que relação é que poderia existir entre as duas variáveis, peso e altura, tendo em conta não só o que conheciam das crianças (conhecimento extra matemático), como também pudessem concluir sobre o grau da intensidade da associação linear entre as variáveis. Com esta questão, Patrícia pretendeu levar à necessidade de construir um modelo matemático (regressão linear). Na formulação escrita da questão três, foi pedido a construção do modelo de regressão linear, respetivo valor do coeficiente de correlação linear (com recurso ao EXCEL) e interpretação no contexto real.

A formulação escrita da questão quatro foi construída de modo a que as alunas pudessem usar conhecimentos matemáticos e assim trabalhassem matematicamente o modelo matemático. A forma de conseguir isto foi pedir algumas previsões dentro do intervalo de possibilidades, a partir do modelo matemático.

A formulação escrita da quinta questão, refletiu a preocupação com os contextos conhecidos, tendo a ideia de conduzir a uma interpretação dos resultados matemáticos (quinta fase de modelação) comparando-os com a realidade (IMC):

Eu coloquei questões de modo a que interpretem e critiquem os resultados que vão obter e olhem para a tabela de IMC e concluam algo, comparando assim com a conjectura feita e que pretendo que estudem. (Entrevista pré aula, 21/06/12)

Para além disso, Patrícia pretendeu entender que compreensão as suas alunas poderiam obter a partir da comparação do cálculo do IMC das crianças com a conjectura inicial que tinham formulado, validando então o modelo linear (última fase de modelação).

Planificação da aula

Patrícia preparou a tarefa para a explorar em uma única aula de 90 minutos com a seguinte sequência: leitura da tarefa: 10 minutos; questão 1: 10 minutos; questão 2: 5 minutos; questão 3: 10 minutos; questão 4: 15 minutos; questão 5: 20 minutos.

Quanto aos recursos que teve necessidade de usar para a criação da tarefa, Patrícia referiu-se à tabela com dados recolhidos dos questionários e EXCEL:

Os recursos que usei foram: o computador, os dados sobre o peso e a altura dos meninos e utilizei o recurso internet para procurar a informação sobre o índice de massa corporal para relacionar com o peso e altura e perceber se a ideia inicial pode ser verdadeira. (Entrevista pré aula, 21/06/12)

As alunas permaneceram nos mesmos grupos.

Patrícia ao pensar na planificação da tarefa teve em conta a antecipação de dificuldades, verificadas durante a aula de modelação anterior e os conteúdos estatísticos:

Eu tive em conta as dificuldades que as alunas apresentaram na tarefa anterior, especialmente porque elas não estão muito habituadas a trabalhar com as funções. Na tarefa anterior não pensei que fossem aparecer tantas dificuldades, portanto, desta vez eu orientei-as para o modelo linear e mesmo assim, hoje durante a aula, eu vou tentar, quando elas tiverem que testar, ajudar. (Entrevista pré aula, 21/06/12)

Relativamente aos conteúdos estatísticos que Patrícia desejou que surgissem a partir desta tarefa foram: relação entre as duas variáveis tendo em conta o contexto real; interpretação do valor do coeficiente de correlação linear; construção do diagrama de dispersão; construção da reta e equação do modelo de regressão linear e estimativa de valores.

A forma como esta tarefa foi planificada e com que objetivo foi perceptível nas suas palavras nos breves instantes que antecederam a segunda aula de modelação. Patrícia referiu que a ideia para a tarefa partiu de dados reais recolhidos pelas alunas e da

preocupação delas sobre a alimentação e com objetivo de estudarem as distribuições bidimensionais:

Eu parti dos dados que elas recolheram e da preocupação delas sobre as crianças e achei que podíamos estudar se aquelas estavam ou não subnutridas. Para além disso, foquei-me agora no modelo linear, porque a outra tarefa foi confusa! É uma tarefa semelhante às anteriores, mas nesta tarefa elas vão procurar...enquanto que na tarefa anterior elas foram procurar vários modelos e aperceberem-se dos modelos que existiam...agora é uma tarefa de regressão linear...num contexto real! (Entrevista pré aula, 21/06/12)

Para Patrícia, esta tarefa foi pensada como sendo uma tarefa de consolidação para introduzir estes conteúdos estatísticos. Tendo em conta os vários episódios ocorridos na aula anterior, Patrícia decidiu criar esta tarefa com o objetivo de clarificar conceitos:

Investigadora: Qual é o objetivo da tarefa? Como ponto de partida para levar a novo conhecimento ou é uma tarefa de consolidação de conteúdos?

Patrícia: Não, agora já é uma tarefa de consolidação.

Investigadora: Porquê?

Patrícia: Na aula passada, surgiram modelos que não sabiam trabalhá-los bem e eu arrependi-me. Devia ter começado pelo modelo linear e depois logo dava esta tarefa! Acho que não perceberam muito bem o que eu queria. Mais do que uma tarefa de consolidação, é uma tarefa de clarificação. Vamos só trabalhar com o modelo linear e assim vão aparecer todos os conteúdos que eu quero e de uma forma mais simples! (Entrevista pré aula, 21/06/12)

Patrícia, tendo em atenção, as dificuldades sentidas na aula anterior, anteviu que nesta aula, essas se dessem apenas quando as alunas trabalhassem matematicamente com o modelo:

Eu estou a prever dificuldades apenas na testagem do modelo! Na aula passada devido à dificuldade deixei fazer previsão de resultados através do gráfico ou disse-lhes eu o resultado. Desta vez, os grupos que fizeram isso, vão substituir as variáveis e eu prevejo que não vão ao gráfico! (Entrevista pré aula, 21/06/12)

A condução da aula

Após a entrega do enunciado da tarefa, as alunas organizaram-se de forma autónoma e organizada em frente aos computadores e iniciaram o trabalho. Patrícia leu a tarefa de modo a captar a atenção das alunas e focá-las no trabalho que teriam de

desenvolver durante a aula, explicando em cada questão o que teriam de fazer, tentando minimizar algumas dificuldades sentidas na aula anterior:

Na sequência da outra tarefa, hoje aparece uma tarefa nova. Eu vou ler a parte inicial e vocês depois vão continuar a tarefa na sequência daquilo que já têm feito! (...) Na pergunta dois ainda não vão construir um modelo matemático, eu quero que vejam o comportamento da nuvem de pontos e digam que tipo de relação é que pode existir, se é forte ou fraca! Depois é que peço o modelo linear! Prestem atenção! Quando vão pedir a linha de tendência têm mesmo que escolher o modelo linear e não é como na aula passada em que podiam experimentar vários! E depois respondem a essas perguntas que aí estão! E não podem fazer as previsões a olho como fizeram na outra aula, mas sim com cálculos. Tem de ser com cálculos, substituindo na expressão que o computador dá. Na última questão tem de escrever conclusões sobre a relação que afinal existe entre o peso e a altura, têm ainda uma tabela para calcular o IMC e tem de ver como estão as nossas crianças, por exemplo a primeira criança, vai ter um IMC de 15 o que significa que tem peso abaixo do normal. Vão ter de tirar as vossas conclusões! (Aula de Patrícia, 21/06/12)

Construção da representação real: Patrícia conseguiu que as alunas, depois de ouvirem a explicação e leitura da tarefa e mobilizando o conhecimento extra matemático, estabelecessem uma relação entre o peso e a altura. As alunas a partir da observação das crianças com quem tinham estado a trabalhar, suspeitaram que algumas delas passavam fome, tendo a formulação da conjectura emergido a partir daí. Patrícia ao entregar a tarefa e ao lê-la, de imediato levou à construção da representação real da situação. O facto de ter colocado na tarefa uma tabela com informação inerente ao cálculo e interpretação do IMC, levou a que as alunas compreendessem que teriam de estudar a situação real sinalizada por elas:

Aluna: Essa tabela dá para saber então se aqueles meninos estão ou não com peso abaixo do normal, setora?

Patrícia: Sim, tem de calcular para cada criança!

Outra aluna: Nós achamos, que algumas passam fome. Esta tarefa vai dar para perceber se isso é mesmo verdade! Eu acho que existem ali problemas!

Patrícia: Compreenderam a situação que vamos estudar?

Aluna: Sim! (Aula de Patrícia, 21/06/12)

A introdução da tarefa criada por Patrícia revelou que a professora teve o cuidado de fazer sentir às suas alunas a importância dos dados recolhidos e que utilidade lhe iriam

dar nesta tarefa. A parte introdutória da tarefa exemplificou a importância que a professora deu às “desconfianças” das alunas e dados por elas recolhidos.

Construção do modelo real: Patrícia conseguiu que, as alunas ao estabelecerem associações a partir de elementos da realidade (mobilização do conhecimento extra matemático), a conjectura levantada por elas, parecesse-lhes possível, conduzindo-as à necessidade de organizar os dados numa tabela de modo a serem trabalhados em sala de aula (modelo real). As alunas ao reconhecerem a importância do estudo da relação entre as variáveis estatísticas que surgiram a partir da mobilização do conhecimento extra matemático passaram de imediato à construção do modelo real. A partir das tabelas de registo elaboradas a partir dos questionários, passaram a construir o modelo real, que consistiu na elaboração de uma tabela, em EXCEL, e do respetivo diagrama de dispersão. Patrícia alertou as alunas para o facto de não colocarem pontos na representação decimal dos valores referentes ao peso e altura, pois o EXCEL não reconhece o ponto e também para associarem o x ao peso e o y à altura, tal como estava referido no enunciado da tarefa:

Lembram-se na outra tarefa que se colocassem pontos em vez de vírgulas nos números decimais, depois a nuvem de pontos não estaria correta? Não se esqueçam, são vírgulas em vez de pontos! (...) outra coisa, vejam bem o que peço na questão um, tem de ser no x o peso e o y é a altura. (Aula de Patrícia, 21/06/12)

Com esta intervenção, a professora evitou uma possível construção incorreta do modelo real e possibilitou uma rápida compreensão sobre o significado dos eixos no diagrama de dispersão. As alunas com essas indicações, facilmente chegaram aos modelos reais exemplificados a seguir:

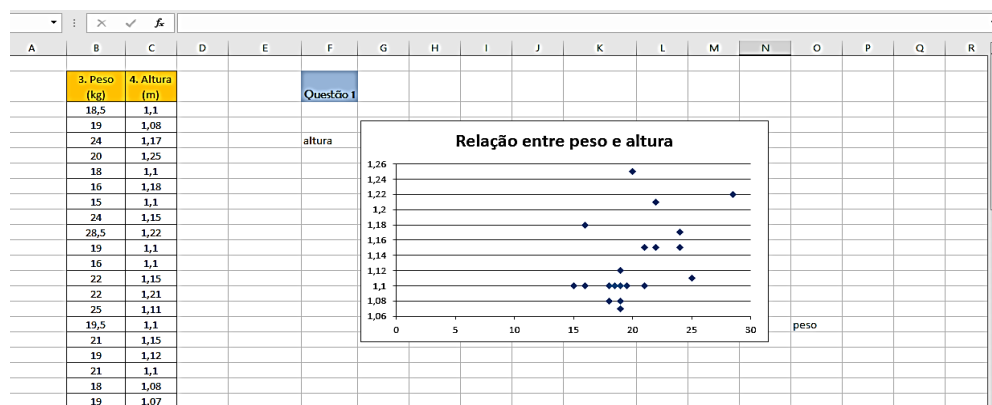


Figura 70: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão que relaciona o peso com a altura (21/06/12)

A representação gráfica dos dados, solicitada por Patrícia, teve o objetivo de conduzir as alunas a serem capazes de, a partir da sua forma, compreenderem que a tendência dos pontos seguia uma associação linear e qual era o grau e intensidade dessa mesma associação. Para isso, e tal como tinha acordado em reunião de trabalho colaborativo, colocou uma questão (questão dois) com esse propósito.

Patrícia formulou a questão dois, logo após a construção do diagrama de dispersão, que permitiu tirar algumas conclusões acerca do grau da intensidade da associação linear entre variáveis, tendo em conta o aspeto do diagrama de dispersão e valor do coeficiente de correlação linear existente (a serem comprovadas posteriormente aquando da construção do modelo matemático).

Construção do modelo matemático: A partir da tabela chegaram ao diagrama de dispersão mobilizando conhecimento extra matemático relativamente à compreensão do significado do eixo Ox e Oy no contexto real. As alunas matematizaram a situação, chegando facilmente ao modelo matemático solicitado. Na formulação escrita de uma das questões, Patrícia solicitou o modelo de regressão linear com o propósito de obterem a equação da reta do modelo de regressão linear. A professora interveio no sentido de alertar as alunas para a construção de um único modelo matemático, ao invés do que se tinha passado na aula anterior. Questionou as alunas sobre o significado dos eixos no contexto real, embora já tivesse explicado no início da aula:

Patrícia: Prestem atenção! Já todas têm o diagrama de dispersão feito! Então digam-me lá, tendo em conta as variáveis peso e altura o que significam cada um dos eixos?

Aluna: Então, o x é o peso e o y a altura!

Outra aluna: Professora, as bolinhas são as crianças, não é?!

Aluna: Claro, se contares as bolas vais ver que são iguais ao número de crianças que temos na tabela!

Patrícia: É isso, mesmo! É importante que esse diagrama esteja bem feito! E agora?

Aluna: Vamos ver as linhas de tendência?

Patrícia: Sim, mas agora é só o linear e têm de pedir a equação da reta e também...

Outra aluna: O tal r com o 2 em cima!

Patrícia: Sim! Façam lá isso então, e leiam a questão três e respondam a tudo! (Aula de Patrícia, 21/06/12)

Nesta aula, Patrícia estabeleceu um diálogo com as alunas, que as levou a refletir sobre a associação linear que poderia existir entre as variáveis, assim como

compreenderem, a partir da interpretação do valor do coeficiente de correlação linear, o grau da intensidade da associação linear entre as mesmas:

Patrícia: (dirigindo-se a um dos grupos) Então têm esse r^2 igual ao quê?

Aluna: 0,2242

Patrícia: Mas temos de calcular o r ! Como podemos fazer?

Outra aluna: Raiz quadrada!

Patrícia: Antes de fazerem isso, e olhando para essa reta e tendência dos pontos o que podem dizer sobre a correlação? É positiva ou negativa, é forte ou fraca? O que vos parece?

Aluna: Mas se calcularmos o r podemos logo dizer isso!

Patrícia: Sim, mas o valor de r que obtiveram é positivo? Como é que sei se pode ser assim? Como está a reta?

Aluna: A subir ...pois então é positiva!

Patrícia: E se estivesse a descer?

Aluna: Negativa!

Patrícia: E acham que é forte ou fraca?

Outra aluna: Como é que podemos saber?

Patrícia: Lembrem-se do exemplo que dei ter dito que quanto mais próximos os pontos estão da reta mais forte é a correlação?

Aluna: Sim! Não estão assim muito próximos! Podemos dizer mais ou menos? Ou pouco forte? Ou pouco fraca?

Patrícia: Sim e depois logo comparam com o valor do r ! E dizer que é positiva significa o quê? Que quanto maior é o peso mais altas são as crianças!

Aluna: Mas há pontos mais afastados! Nem sempre é assim!

Patrícia: É verdade, esses pontos mais dispersos significam isso mesmo, mas de um modo geral é o que parece acontecer, a tendência é essa! (Aula de Patrícia, 21/06/12)

Esta discussão em pequeno grupo revelou que a professora valorizou a representação gráfica como uma forma de estudar o grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis. Houve, um momento de aula em que Patrícia aproveitou para explorar o facto de a reta estar a “subir” como as alunas referiram, tendo aproveitado uma intervenção de uma aluna para explicar que quando os valores do peso aumentam, os valores da altura também aumentam. A professora aproveitou para fazer referência ao contexto real e ao conhecimento das alunas sobre a situação. O modelo matemático construído pelas alunas e a resposta à questão três exemplifica o que estas alunas concluíram após intervenção da professora:



Figura 71: Exemplo da reta e da equação do modelo de regressão linear obtido por um grupo de alunas, com recurso ao EXCEL (21/06/12)

Ao pensar na tarefa, Patrícia colocou, no enunciado desta, questões no sentido de seguirem os passos da tarefa. A construção do modelo matemático fez-se facilmente, devido à estruturação da tarefa e intervenções da professora. Nesta tarefa, Patrícia evidenciou saber exatamente o que queria ensinar e clarificar, respeitando o conhecimento e dificuldades das alunas.

Obter resultados matemáticos: Nesta fase, a professora colocou, no enunciado da tarefa, questões de modo a que as alunas usassem conhecimentos matemáticos já conhecidos e conseguissem aplicá-los para trabalharem com o modelo. À semelhança da outra aula, a tendência foi interpretar e prever resultados através da observação do diagrama de dispersão. No entanto, após intervenção da professora, aperceberam-se que o mais correto era fazê-lo através do modelo matemático a partir da substituição de valores:

Patrícia: Vocês estão a pegar nos valores e o que estão a fazer para preverem os resultados?

Aluna: Através do gráfico conseguimos perceber!

Patrícia: Sim, ficam com uma ideia, mas para o conseguirem fazer com maior precisão podem fazer outra coisa. Fizemos na aula anterior! Não obtiveram a equação da reta?

Aluna: Sim. É para substituir? Mas onde?

Patrícia: Têm a equação, o x é o peso e o y é a altura! Por exemplo, se eu der o peso que é 28 Kg, vocês têm de substituir esse valor no x para saberem o valor do y que corresponde ao valor previsto para a altura!

Aluna: Ahhh...é aquela coisa que fizemos na outra aula! Temos de fazer aquelas contas que dão equações, mas sabemos fazer estas?

Patrícia: Sim, a equação é do 1º grau e eu vou ajudando! (Aula de Patrícia, 21/06/12)

Este excerto mostrou não só que Patrícia compreendeu a importância da equação da reta de regressão linear para prever resultados, como revelou que sabe como conduzir uma discussão que leve à essa mesma compreensão por parte das suas alunas.

Patrícia ajudou mais uma vez na interpretação do significado do x e do y , aproveitando para relacionar com os eixos do diagrama de dispersão. Ao aperceber-se destas dificuldades, a professora resolveu dar indicações no sentido de facilitar os cálculos, para que as alunas não se desmotivassem e não se sentirem frustradas por não possuírem competências matemáticas:

Patrícia: Têm a equação $y = 0.0073x + 0.9848$, o x é o peso e o y é a altura. Pegam no 28 Kg e substituem no

Aluna: x ?

Patrícia: Sim. Como é que fica? $y = 0.0073 \times \dots$

Aluna: 28 + aquele número.

Patrícia: É isso. Façam os cálculos e respondam à questão 4. (Aula de Patrícia, 21/06/12)

31	Questão 4.1						
32							
33	Uma criança com 28 kilos, medirá 1,19.						
34	$y = 0,0073 \times 28 + 0,9848$						
35	$y = 0,2044 + 0,9848$						
36	$y = 1,1892$						
37	Arredondado fica: 1,19						

Figura 72: Exemplo dos cálculos efetuados a partir do modelo de regressão linear para prever resultados (21/06/12)

Interpretação dos resultados matemáticos: Patrícia chamou a atenção para a interpretação dos resultados, pois se obtivessem alguma criança com 3 metros, poderia alguma coisa estar errada. Algumas alunas substituíram incorretamente o valor e obtiveram para a altura valores muito grandes ou negativos e por vezes nem conseguiram criticar aqueles resultados. Nesse sentido, a professora apelou à comparação dos resultados que estavam a obter com a situação real que conheciam e interveio:

Patrícia: (dirigindo-se à turma) Olhem bem para os resultados que estão a obter e critiquem! Estou a ver por aí coisas um pouco despropositadas, alturas gigantes para crianças, alturas negativas, verifiquem os cálculos e vejam se é possível!

Aluna: Pois, a nós deu-nos altura negativa, se calhar é a equação que está mal resolvida!

Patrícia: Verifiquem outra vez! (Aula de Patrícia, 21/06/12)

As alunas compreenderam o erro e retificaram a situação obtendo o valor representado na figura acima.

Validação do modelo matemático: Esta tarefa não estudou apenas a relação entre o peso e a altura desta amostra de crianças do pré-escolar, pois esse estudo poderia ter sido feito em qualquer curso do ensino profissional. Patrícia demonstrando conhecimento do curso em questão, decidiu proporcionar um momento de maior reflexão sobre as características físicas destas crianças e solicitou, na formulação escrita de uma das questões, que estas relacionassem essas variáveis com o índice da massa corporal, no sentido de tirarem conclusões acerca da amostra real conhecida por elas. As alunas calcularam o índice de massa corporal e, tal como Patrícia sugeriu, chegaram a algumas interpretações e conclusões que permitiram não só validarem o modelo de regressão linear, como também a conjectura estabelecida. Durante esta fase, Patrícia circulou pelos vários grupos de forma a monitorizar os cálculos referentes ao IMC e promover situações de reflexão sobre os resultados que obtiveram, a fim de compararem a matemática com a realidade conhecida:

	Criança nº	Peso (kg)	Altura (m)	IMC	Interpretação do Peso
53					
54	1	18,5	1,1	15,29	Baixo
55	2	19	1,08	16,29	Baixo
56	3	24	1,17	17,53	Baixo
57	4	20	1,25	12,80	Baixo
58	5	18	1,1	14,88	Baixo
59	6	16	1,18	11,49	Baixo
60	7	15	1,1	12,40	Baixo
61	8	24	1,15	18,15	Peso Ideal
62	9	28,5	1,22	19,15	Peso Ideal
63	10	19	1,1	15,70	Baixo
64	11	16	1,1	13,22	Baixo
65	12	22	1,15	16,64	Baixo
66	13	22	1,21	15,03	Baixo
67	14	25	1,11	20,29	Peso Ideal
68	15	19,5	1,1	16,12	Peso Ideal
69	16	21	1,15	15,88	Peso Ideal
70	17	19	1,12	15,15	Peso Ideal
71	18	21	1,1	17,36	Baixo
72	19	18	1,08	15,43	Baixo
73	20	19	1,07	16,60	Baixo

Concluimos que a maioria das crianças estão abaixo do índice de massa corporal. Resumindo não tem o peso ideal. Na nossa opinião provavelmente a família de cada criança não tem uma alimentação adequada (sem preocupações). Sendo assim, a nossa opinião é que o infante deverá tomar as devidas precauções pois não parece ter a devida responsabilidade e preocupação com a alimentação dessas crianças.

Nesta tabela graças ao IMC que nos permite saber se estamos no peso certo para a nossa altura, neste grafico apenas algumas crianças tem o peso ideal, e a maioria esta abaixo do peso, o que para nós foi muito chocante, porque apenas conseguimos pensar que estas crianças passam fome.

5- Conclui-se com os valores obtidos que quase a totalidade das crianças são subnutridas, um dos factores para este acontecimento pode ser a falta de meios económicos por parte dos pais para realizar as devidas refeições em casa, com a nossa ida ao infante destas crianças, podemos concluir que o problema é mesmo por parte dos pais, uma vez que as crianças repetiram várias vezes o lanche favorecido por nós antes do almoço, e obtivemos a informação que eles tomaram o pequeno-almoço. Isto pode ocorrer devido á cidade em que estão não ser bem favorecida economicamente e haver carencias em termos alimentares. Ou seja, com isto podemos dizer que a causa disto é em casa, não no infante, como muitas das vezes os pais se desculpem.

Figura 73: Exemplos de respostas dadas por alunas a partir dos resultados matemáticos obtidos e comparação com a realidade (21/06/12)

As alunas tomaram consciência que esta amostra de crianças tinham um índice de massa corporal muito abaixo do normal, concluindo que poderiam estar subnutridas. Estas alunas relacionaram este facto com prováveis problemas do fórum económico e ao meio desfavorecido da sua terra, o que as levou a validar a conjectura feita inicialmente e que esteve na origem da criação desta tarefa. Com esta tarefa, as alunas tomaram consciência de um possível problema social deste grupo de crianças. Patrícia conseguiu

com esta tarefa, motivar as aulas para a sua realização e entenderem a importância do estudo das distribuições bidimensionais na compreensão de problemas sociais.

Reflexão imediata de Patrícia sobre a aula

Após a aula terminar e com o objetivo de recolher de forma imediata as reflexões de Patrícia sobre o decorrer da aula, foi realizada uma entrevista de curta duração. Patrícia quando questionada sobre a forma como tinha corrido a aula, respondeu que tinha corrido bem e que as alunas compreenderam que trabalharam com dados reais:

Acho que esta aula correu bem. As alunas estavam motivadas e gostaram especialmente da tarefa. Elas verificaram que estavam mesmo a trabalhar dados reais e as consequências disso! (Entrevista de reflexão pós aula, 21/06/12)

Patrícia ficou algo surpreendida com algumas conclusões a que chegaram, pois as alunas relacionaram o valor do IMC de cada criança com as suas características físicas e prováveis causas sociais:

Uma coisa que me surpreendeu foi elas conseguiram passar a informação que vinha do gráfico, conseguiram fazer a tradução para o índice de massa corporal e conseguiram elas próprias fazer a dedução para o estado daquelas crianças. E começaram a pensar em possíveis causas, mesmo sem isso ter sido pedido. (Entrevista de reflexão pós aula, 21/06/12)

Patrícia foi questionada sobre as várias fases de modelação e se as alunas conseguiram passar por todas as fases, atribuindo esse facto à forma como estruturou esta tarefa:

As alunas compreenderam facilmente a tarefa e o que era para fazer. Chegaram ao modelo linear. O modelo matemático era pedido e correu com sucesso, porque eu direcionei para este modelo, uma vez que elas estavam com dificuldades nas outras regressões e eu resolvi estruturar a tarefa de uma forma mais dirigida! (Entrevista de reflexão pós aula, 21/06/12)

Patrícia mencionou que o envolvimento das alunas, tanto a nível matemático, como ao nível do empenhamento e motivação foi bastante satisfatório, mostrando-se satisfeita com a aula e revelando que conseguiu o que pretendia:

Consegui que chegassem aquilo que eu pretendia que aprendessem. Sim, até aqui foi a tarefa que melhor resultou. Correu bastante bem e elas

empenharam-se a todos os níveis! (Entrevista de reflexão pós aula, 21/06/12)

Patrícia fez um balanço positivo da aula e referiu que, caso tenha no futuro alunos com outras características, prevê fazer algumas alterações tendo em conta a realidade. Reconheceu a importância do contexto real como meio facilitador para a compreensão da tarefa e reconhecimento da importância da Estatística:

Eu acho que foi boa! Se tiver outro tipo de alunos vou adaptar e se calhar pensar em outras questões mais complexas. O facto de termos partido de uma situação real foi crucial para a compreensão do que era pretendido e no futuro vou valorizar este aspeto. Elas já têm tantas dificuldades que acho que pensar em coisas que sejam do interesse delas só vai ajudar a perceber para que serve isto tudo! (Entrevista de reflexão pós aula, 21/06/12)

Síntese

Segue-se uma síntese do conhecimento para ensinar Estatística que Patrícia revelou na preparação e condução desta tarefa de modelação, distinguindo-se os diferentes tipos de conhecimento.

Iniciando com o conhecimento comum matemático, verificou-se que Patrícia teve necessidade de o convocar. Nesta tarefa, este conhecimento diz respeito ao conceito de distribuição bidimensional, associação linear entre duas variáveis, cálculo do coeficiente de correlação linear, estudo do grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis e diagrama de dispersão. Patrícia pareceu estar segura relativamente a todos os conceitos, notando-se uma evolução relativamente à aula anterior. A professora demonstrou saber que a representação gráfica dos dados é importante para perceber se existem padrões e relações escondidas nos dados. Informação esta que podia não ser perceptível a partir das tabelas ou dados originais. Patrícia revelou compreender a importância do cálculo do valor do coeficiente de correlação linear para estudar o grau da intensidade da associação linear existente entre duas variáveis.

No que diz respeito ao conhecimento comum não matemático, observou-se que Patrícia revelou neste caso um bom domínio, conhecendo detalhes da realidade a estudar. A professora pesquisou na internet sobre o IMC, pesquisou a fórmula de cálculo e encontrou uma tabela interpretativa sobre o significado dos valores do IMC. Identificou a situação real associada a um provável problema social. Patrícia conseguiu compreender como conseguir mais informações e como operacionalizar a recolha de dados reais.

Quanto ao conhecimento especializado matemático, foi notória alguma evolução nesta aula. Após ter tomado consciência que a aula anterior não correu muito bem, e a forma como preparou e conduziu a aula ter gerado alguma confusão na aquisição de conteúdos pretendidos, Patrícia colocou, no enunciado da tarefa, questões mais dirigidas para a construção do modelo matemático. O conhecimento comum matemático sobre estes conteúdos influenciou positivamente a forma como abordou estes conceitos em sala de aula. Patrícia teve muitos momentos que evidenciou, durante a condução da aula, demonstrar como colocar questões, estruturando a tarefa com o objetivo de ensinar os conteúdos pretendidos, assim como conduzir a aula com o propósito de levar à compreensão de significados, nomeadamente dos pontos no diagrama de dispersão e dos eixos coordenados.

Por último, o conhecimento especializado não matemático evidenciado revelou-se robusto, pois o conhecimento da realidade permitiu a partir dos contextos reais, pensar em questões adaptadas e contextualizadas, assim como ensinar a organizar dados reais em tabelas. Para além disso, ensinou a usar o EXCEL para que o trabalho matemático fosse facilitado e a organizar os dados em tabelas.

O conhecimento não matemático veio em auxílio do conhecimento matemático e fez a professora pensar em questões que levaram à reflexão sobre o trabalho matemático que estava a ser desenvolvido, revelando-se uma mais-valia.

A terceira tarefa de modelação: “Estarei magrinho ou cansadinho?”

Ideia para a criação da tarefa e trabalho de preparação

Na tarefa anterior, as alunas de Patrícia apontaram várias razões para o facto de as crianças terem um índice de IMC baixo o que as levou a concluir que fatores económicos ou alguma despreocupação dos pais relativamente ao tipo de alimentação poderiam estar na origem desse problema. Patrícia resolveu pesquisar mais fatores que poderiam influenciar o baixo peso observado nestas crianças e descobriu um artigo que referia que, as horas de sono nesta faixa etária influenciam o peso. Na entrevista pré aula, a professora mencionou a ideia que teve para esta tarefa:

As alunas vão ter que relacionar as variáveis peso e horas de sono. A partir de um artigo que encontrei, na internet sobre a influência das horas de sono no peso das crianças, resolvi estudar estas crianças. Uma vez que conhecemos o peso das crianças da nossa amostra e horas de sono diárias,

vamos estudar se isso existe o mesmo tipo de relação nestas crianças e verificar se esse facto poderá ser uma razão para justificar o baixo peso observado. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

A motivação para a criação desta tarefa foi justificada com o facto de querer partir de algo real e de dados que já tivessem sido recolhidos, de modo a que conseguissem conhecer melhor esta amostra de crianças e compreender o porquê de terem pesos tão baixos:

Encontrar uma situação real e que possa adaptar às características que nós estudámos e fizemos e que dê para relacionar. Foi uma questão de aproveitar os dados que temos recolhidos, de maneira a motivá-las, conhecerem aquelas crianças, e percebermos o porquê daqueles pesos baixos. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

As variáveis estatísticas que surgiram foram: o peso e as horas de sono das crianças. A professora referiu que aproveitou esta ideia para averiguar se dava para retomar o estudo de outros modelos de regressão que não fosse apenas o linear, de modo a entenderem qual seria o melhor modelo tendo em conta a tendência dos pontos e o contexto real:

Eu pensei em verificar se esta ideia dava para retomar a abordagem da regressão não linear de modo a estudarem qual seria o melhor modelo tendo em conta a realidade e a tendência dos pontos. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

Como já foi referido, Patrícia fez uma pesquisa na internet sobre o peso das crianças, e encontrou um artigo que relacionava as poucas horas de sono com a obesidade e problemas comportamentais. Aproveitou esta ideia e usando os dados reais, já recolhidos, inerentes ao peso e horas de sono de cada criança, resolveu construir o diagrama de dispersão. A partir dessa representação gráfica tentou compreender que associação poderia existir entre essas variáveis, explorando associações não necessariamente lineares. Como as alunas demonstravam ter dificuldades no trabalho matemático com modelos, Patrícia recorrendo ao EXCEL construiu modelos de regressão polinomiais até grau 4. Segundo ela, o modelo de regressão polinomial de grau 4 pareceu-lhe o mais adequado. Na entrevista pré aula, não se percebeu se essa percepção relativamente ao tipo de associação entre as variáveis peso e horas de sono, tiveram por base a tendência dos pontos a partir da observação da representação gráfica ou se essa

escolha se deveu ao valor do “coeficiente de correlação linear” à semelhança do que já tinha feito na primeira tarefa:

Eu depois de ler as conclusões das minhas alunas e perceber que elas tinham dito que o baixo peso poderia estar associado a problemas sociais e económicos, pensei que talvez tivessem razão, mas pensei também em pesquisar que outras razões poderiam estar relacionadas com o peso que as crianças têm. Pesquisei na net e encontrei um artigo interessante que relaciona as horas de sono com o peso. Achei interessante e experimentei. Peguei nos dados que tinha e construí a nuvem de pontos. Construí o modelo linear e outros modelos polinomiais, sim porque não dá para explorar outros com elas porque têm muita falta de conhecimento e verifiquei que o modelo polinomial de grau 4 pode ser uma boa escolha. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

A professora deu, à tarefa, um título alusivo. Começou por apresentar o objetivo geral mencionando que os conteúdos estatísticos iriam surgir a partir dos contextos reais, indicar os conteúdos estatísticos que iriam surgir e os materiais necessários para a realização da tarefa. Logo de seguida, introduziu um excerto do artigo sobre a relação entre o peso e as horas de sono e a partir daí, seguiu-se a formulação escrita de todas as questões baseadas não só no contexto real, como também no ciclo de modelação.

A construção da tarefa

Patrícia colocou na tarefa um excerto do artigo sobre a influência da duração de horas de sono das crianças no comportamento do peso. A introdução desse artigo teve o propósito de ligar as alunas de forma quase imediata ao problema por elas levantado e que tanta curiosidade suscitou.

As questões que colocou, no enunciado da tarefa, tiveram o intuito de levar à construção de diversos modelos matemáticos.

Patrícia na formulação escrita da questão um, pretendeu levar as alunas a construírem os modelos reais: uma tabela que relacionava as variáveis peso e horas de sono e o respetivo diagrama de dispersão.

Na formulação escrita da questão dois, a professora apelou à observação da representação gráfica dos dados para uma primeira reflexão sobre a associação possível entre as duas variáveis.

Na formulação escrita da questão três, Patrícia pretendeu conduzir as alunas a explorar, com recurso ao EXCEL, linhas de tendência (não necessariamente a linear) que

pudessem adequar-se à nuvem de pontos. Patrícia aproveitou a questão para apelar à comparação do que observavam a partir da representação gráfica, com as conjecturas e conclusões formuladas na tarefa anterior. Neste aspeto, a professora mais uma vez demonstrou reconhecer a importância dos contextos reais e do conhecimento extra matemático das alunas.

A formulação escrita da questão quarta foi pensada com o propósito de levar as alunas a trabalharem matematicamente e a obterem resultados matemáticos a partir do modelo escolhido. Para esse efeito e tendo em conta as dificuldades das alunas, Patrícia estruturou a questão no sentido desse trabalho matemático ser facilitado com a solicitação de previsão de resultados para as horas de sono conhecidos os pesos.

A única dificuldade que eu acho que vai surgir é do cálculo de valores das funções etc...e direcionei logo, eu dei logo os valores que elas devem substituir e vou dar o x dentro de um valor possível para as crianças, para preverem o y .” (Entrevista pré aula, 25/06/12)

Com esta estrutura de tarefa, Patrícia pretendeu que as alunas mobilizassem conhecimento extra matemático e interpretassem os resultados matemáticos comparando-os com a realidade:

Eu quero que olhem para os valores que vão obter e muito provavelmente vão enganar-se ou a substituir ou com os cálculos, e quero que vejam se o que estão a obter pode ser ou não. Elas sabem que os dados correspondem a crianças e assim podem saber se a resposta à questão pode ser ou não ou se o modelo é ou não bom para fazer estas estimativas. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

A professora demonstrou valorizar o contexto real e a importância que este teria na interpretação dos resultados matemáticos. A forma como pensou na alínea b desta questão revelou que teve a intenção de levar à criação de outras questões por parte das alunas com o intuito de compreenderem se o modelo se adequava ou não aos dados e em que condições:

Eu pensei numa alínea para que fossem elas a pensar em valores para testarem o modelo. Pode ser que pensem em valores muito grandes para o peso e vejam que as horas de sono vão ser valores despropositados e assim vejam que um modelo pode servir para uma amostra e pode não ser bom para outra situação. Não sei o que vão fazer, mas era interessante ver o que dizem! (Entrevista pré aula, 25/06/12)

Na formulação escrita da última questão, Patrícia apelou à comparação dos resultados obtidos, com o excerto do artigo que colocou no início da tarefa e com algumas respostas que as alunas iriam dar. A professora teve como objetivo principal que as alunas refletissem sobre a validade do modelo, embora não questionasse diretamente sobre a validade deste, e apresentassem justificações que confirmassem ou não a conjectura inicial (última fase do ciclo de modelação), colocando questões orientadoras:

Pensei na última questão com o objetivo de pensarem se o que diz o artigo se verifica ou não nestas crianças e uma provável causa para o baixo peso, possa ser horas de sono inadequadas para esta idade. Por isso, faço referência ao artigo e à conjectura por elas levantada. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

Planificação da aula

Patrícia preparou a tarefa para a explorar em uma única aula de 90 minutos com a seguinte sequência: 10 minutos para leitura da tarefa e explicação do pretendido; 15 minutos para a primeira questão; 10 minutos para a segunda questão; 10 minutos para a quarta questão; 15 minutos para a quarta questão e 20 minutos para a última:

Eu planifiquei esta aula de uma forma semelhante à anterior, às anteriores aliás. Eu vou apresentar a tarefa, ler o texto e explicar o que pretendo, vão ter que relacionar as horas de sono com o peso e depois elas vão resolver a tarefa e vão concluir se o peso parece ter ou não a ver com as horas de sono. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

Quanto aos recursos que a professora teve necessidade de usar para a criação da tarefa ela referiu-se à tabela com dados recolhidos dos questionários, pesquisa na internet e ao EXCEL.

A organização das alunas e grupos mantiveram-se.

Mais uma vez, enfatizou o contexto real em que tudo foi realizado e a importância da tarefa ter sido pensada no sentido de passar por todo o ciclo de modelação escolhido:

Quis que percebessem que podemos fazer estudos interessantes com a nossa amostra e dados, estudos esses que já outros fizeram e que nos podem ser úteis para o conhecimento da amostra. Tive o cuidado de também pensar em questões que passassem por todas as fases de modelação. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

Durante a entrevista, a professora identificou os vários pares de variáveis que usou na construção da tarefa:

As variáveis são peso e horas de sono e terão de ver se existe alguma relação semelhante à do estudo que apresento. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

Patrícia mencionou que a tarefa estava bastante estruturada porque tinha um objetivo muito claro, pois pretendia que as alunas compreendessem que o conhecimento da situação era importante e com recurso às distribuições bidimensionais era possível fazer um estudo com o intuito de perceber o real:

A tarefa está muito estruturada, porque o objetivo é claro! Eu quero muito que elas percebam o porquê de ter colocado aquele artigo e compreendam que a Estatística vai ser útil, neste caso, as distribuições bidimensionais, nessa compreensão duma realidade que conhecem. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

Na planificação que apresentou, Patrícia mencionou que antevia algumas dificuldades durante a implementação da tarefa: algumas respostas a questões que permitissem testar o modelo e ainda, construção de uma composição matemática que refletisse todas as conclusões. Na primeira, previu minimizar a dificuldade através de uma questão dirigida e sugestão de um valor para a estimativa e no caso da composição, referiu que esta possa ser superada porque colocou, no enunciado da tarefa, algumas questões orientadoras:

Eu penso que vai correr bem, porque a única dificuldade que eu acho que vai surgir é no cálculo de valores das funções etc...e direcionei logo, eu dei logo os valores que elas devem substituir e vou dar o x. Poderá surgir alguma dificuldade na redação da composição final, mas com as questões orientadoras e o artigo acho que vão perceber como fazer. (Entrevista pré aula, 25/06/12)

A condução da aula

Construção da representação real: Patrícia entregou a tarefa, leu o artigo e fez uma breve introdução sobre o pretendido e, à semelhança das tarefas anteriores, as alunas começaram de imediato a trabalhar. Na introdução da tarefa, houve um reconhecimento da foto associada ao problema em estudo e curiosidade a partir do excerto do artigo, o que fez com que as alunas de imediato construíssem a representação real da situação.

Patrícia estabeleceu, no início da aula, um diálogo propositado com o intuito de captar a atenção das alunas. Ela pretendeu que as alunas se motivassem e tivessem curiosidade em resolver a tarefa:

Patrícia: Eu pensei no que escreveram e disseram na outra aula sobre o problema do peso das crianças e pensei que talvez pudesse não estar associada a fome, a problemas económicos, mas sim a outras causas. Estive a pesquisar na internet e descobri este estudo, que vou ler e quero que leiam também.

(depois de ler)

Aluna: Professora, será que estas crianças dormem muito, saltam refeições e como tal perdem peso?!

Patrícia: Não estou a querer dizer isso, quero que estudem esta situação com os dados que têm e podemos concluir algo mais ou então chegar mesmo à conclusão que pode haver problemas associados à fome.

Aluna: Eu acho que passam fome! Mas se calhar se dormirem mal, estão cansadas e também de manhã nem lhes apetece comer!

Outra aluna: E por isso que, quando lhes vamos dar o lanche do meio da manhã comem tudo como se não houvesse amanhã!

Patrícia: Compreenderam o que vamos estudar?

Alunas: Sim! (Aula de Patrícia, 25/06/12)

Construção do modelo real: Com o diálogo anterior, a professora conseguiu que as alunas não só compreendessem a situação e a importância do seu estudo do ponto de vista estatístico, como também estabelecessem relações com a realidade e formassem conjecturas. As alunas ao compreenderem a tarefa passaram à organização dos dados numa tabela, onde na primeira coluna colocaram os dados referentes ao peso e na outra os dados inerentes às horas de sono de cada uma das crianças. Logo de seguida, as alunas, tal como solicitado no enunciado da tarefa e de forma direcionada, passaram à construção do diagrama de dispersão para esse par de variáveis. Patrícia, de forma a minimizar alguma dificuldade que pudesse surgir, optou por referir que ao eixo Ox corresponderia o peso e ao eixo Oy os valores correspondentes às horas de sono. Durante esta fase, Patrícia resolveu questionar as alunas sobre o significado dos pontos naquele contexto:

Patrícia: Quantos pontos aparecem no vosso gráfico? O que significam?

Aluna: Vinte e tal!

Outra aluna: São as crianças?!

Patrícia: O que acham? Concordam todas?

Aluna: Sim. Setora, até dá para perceber quais são as crianças. Se tivermos em atenção o peso e as horas de sono, posso ir à tabela onde estão os dados todos e consigo saber qual é a criança.

Patrícia: Concordam? O eixo horizontal corresponde ao peso e o vertical às horas de sono!

Outra aluna: Sim, e os pontinhos são as crianças! (Aula de Patrícia, 25/06/12)

Os modelos reais obtidos foram os seguintes:

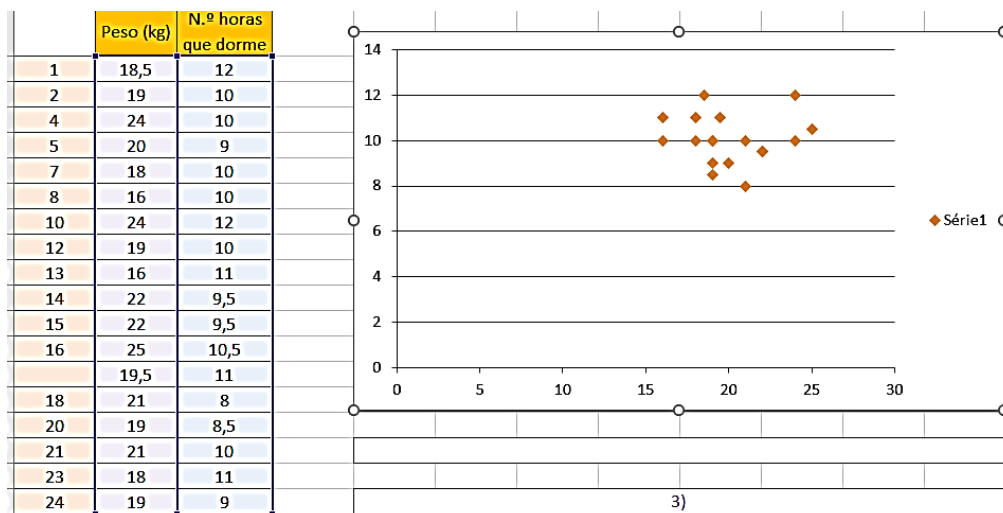


Figura 74: Exemplo de uma tabela e diagrama de dispersão que relaciona o peso com as horas de sono que as crianças dormem (25/06/12)

Patrícia nesta fase circulou pelos grupos com o objetivo de perceber se o modelo real estava bem construído. A este nível pretendeu que as alunas lessem para além da tabela, questionassem (formulação de questões) e refletissem sobre o que estavam a ver e fazer. Patrícia, ao explicar o significado dos eixos coordenados e dos pontos, levou a que as alunas dessem sentido aos dados. No caso desta tarefa, este facto esteve presente na construção do diagrama de dispersão tendo permitido às alunas a compreensão dos dados e da provável relação entre as duas variáveis em estudo.

Construção do modelo matemático: Durante esta fase, Patrícia dirigiu-se à turma no sentido de focar a atenção das alunas na observação da representação gráfica. O objetivo foi que as alunas percebessem que a tendência destes pontos não era linear:

Patrícia: Reparei que já todas construíram o diagrama de dispersão. O que podem dizer acerca da tendência dos pontos?

Aluna: Desce e sobe!

Patrícia: Parece que se assemelha a uma reta?

Outra aluna: Não! Faz uma onda...acho!

Patrícia: Sim, parece uma curva! Podemos dizer que estes dados seguem uma tendência linear?

Aluna: Não!

do coeficiente de correlação linear só faz sentido para uma associação linear. O modelo matemático obtido foi o seguinte:

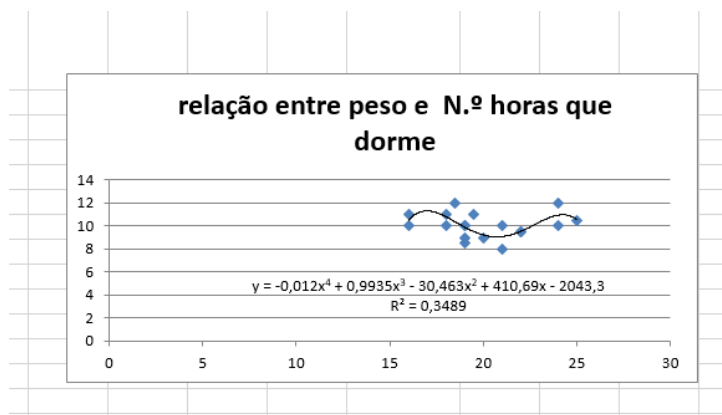


Figura 76: Exemplo da construção de um modelo de regressão polinomial e respetiva equação, apresentado por um grupo de alunas (25/06/12)

Obter resultados matemáticos: Nesta fase de modelação, Patrícia alertou as alunas para a leitura atenta das questões que permitiriam trabalhar matematicamente com o modelo. Prevendo algumas dificuldades na mobilização de conhecimentos matemáticos na fase de testagem do modelo, Patrícia sugeriu um valor para o peso a fim de permitir a previsão para as horas de sono:

Patrícia: Vejam lá bem o modelo que obtiveram! Agora têm uma função grande! Tem aí muita coisa! O que é o x e o que representa o y? Tem de perceber isso para saber o que vão fazer com os valores que estou a dar e como vão responder à questão!

Aluna: Então já vimos isso. O x é o peso e o y as horas de sono!

Patrícia: O que vão fazer com os 21 Kg para preverem as horas de sono?

Outra aluna: Substituir!

Patrícia: Onde?

Aluna: No x!

Patrícia: Ok, então vamos lá fazer isso! (Aula de Patrícia, 25/06/12)

O valor estimado, segundo este modelo, para as horas de sono, sabendo que uma criança tem 21 Kg foi:

21	4.1)					
22	$y = -0,012 \cdot 21^4 + 0,9935 \cdot 21^3 - 30,463 \cdot 21^2 + 410,69 \cdot 21 - 2043,3$					
23	y=	14,0385				
24						

Figura 77: Exemplo do cálculo efetuado, por um grupo de alunas, a partir da equação do modelo de regressão escolhido, para estimarem valores (25/06/12)

Patrícia demonstrou saber que os valores pedidos para fazer previsões devem estar dentro do intervalo dos dados ou muito próximos destes.

Interpretação dos resultados matemáticos: A fim de as alunas interpretarem os resultados matemáticos, a professora colocou uma alínea na questão quatro, com o objetivo de levar estas a testarem o modelo para outros valores visando a interpretação destes:

Patrícia: Eu queria que vocês pensassem no valor que obtiveram para a alínea a e testassem para outros valores e criticassem esses resultados para ver se podem ser aceitáveis ou não. Perceberam?

Alunas: Sim.

Aluna: Agora, inventamos nós valores e substituímos, certo?

Patrícia: Sim! (Aula de Patrícia, 25/06/12)

Patrícia, conjuntamente com as outras professoras, estruturou esta tarefa no sentido de levar à testagem. As questões foram adaptadas ao contexto real, ao curso profissional e às variáveis que estavam a ser estudadas. Um dos grupos solicitou a presença da professora a fim de explicarem que tinham testado o modelo para outro valor e que tinham chegado a uma conclusão:

Aluna: Professora, eu experimentei para outro valor. Isto significa que quanto mais pesa, mais horas têm que dormir? É que eu experimentei com 25 Kg, depois de já ter calculado para 21 Kg, e deu 20 horas. Então passa o dia a dormir e não vai à escola! Acho que não pode ser! Nos dados não vi nada assim! Isto não pode ser! Acho eu!

Patrícia: Testem para outros valores. Por exemplo, para uma criança com 35 Kg, para ver se chegam a uma conclusão semelhante à do estudo! (Aula de Patrícia, 25/06/12)

25									
26	4.2)	y=							
27			-397,513	Uma criança com 35 Kg não dormia, dá horas de sono negativas					
28									

Patrícia: Então, o que têm a dizer desse valor que encontraram?
Aluna: Isto não pode ser! Dá negativo! Este modelo não dá?
Patrícia: Não dá para todos os valores que inventaram ou não dá para este?
E se der para outros? Experimentem para 17 Kg! (Aula de Patrícia, 25/06/12)

4.2)	y=	20,5125																	
		13,4365																	
Uma criança com 25 kg de peso deverá dormir 20 horas. Deve passar o dia a dormir! Para este valor o valor não parece muito																			
Uma criança com 17 kg de peso deverá dormir 13 horas. Parece que este valor é aceitavel																			
Este modelo parece funcionar para valores até 22, 23 Kg. A partir daí já não parece bom																			

A intervenção de Patrícia conduziu as alunas a refletirem sobre a validade do modelo e em que circunstâncias este era válido, levando-as a compreender as suas limitações.

início desta tarefa. Esta parte não foi muito explorada por Patrícia e as conclusões a que as alunas chegaram não foram muito aprofundadas:

24	
25	
26	5) Este grupo de crianças não dorme o nº de horas necessárias, porque uma criança
27	de 21kg deveria dormir 14h, e as mesmas não cumprem com esse horário.
28	
29	

	Questão 5) podemos concluir que as horas que as respectivas crianças dormem não é o suficiente
	visto que poderia afetar a saúde das mesmas como vimos no exemplo
	uma criança com 21kg de peso deveria dormir pelo menos 14 horas

Figura 80: Exemplos de conclusões apresentadas que retratam a comparação efetuada entre os resultados matemáticos obtidos com as conjecturas inicialmente apresentadas (25/06/12)

Patrícia elaborou a tarefa tendo em conta o conhecimento que tem da Estatística, nomeadamente sobre as distribuições bidimensionais, tendo demonstrado que esse conhecimento carece de aprofundamento.

Nesta tarefa, as alunas foram levadas a refletir sobre os resultados que obtiveram, tendo em conta o contexto que conheciam. Este facto revelou que Patrícia não só estava consciente do que é uma tarefa de modelação e modelação matemática, como evidenciou dar extrema importância aos contextos reais, cruciais quer para o ensino da Estatística, quer para a modelação matemática.

Reflexão imediata de Patrícia sobre a aula

Após a aula terminar e com o objetivo de recolher de forma imediata as reflexões de Patrícia sobre o decorrer da aula, foi realizada uma entrevista de curta duração. A professora referiu que ficou satisfeita com o decorrer da aula, embora com algumas dificuldades ao nível do trabalho matemático com o modelo, e enfatizou aspetos que a deixaram surpreendida relativamente à capacidade crítica de resultados. Segundo ela, isso foi possível porque as alunas conheciam a situação real e foram capazes de entender que aqueles resultados para algumas previsões não faziam sentido:

Eu acho que a aula correu bem. As alunas não tiveram grandes dificuldades a elaborar, a realizar a tarefa, com exceção do modelo matemático em que elas continuam ainda a ter dificuldade em substituir mesmo sendo só o valor de x . Foi interessante ver como criticaram os resultados. Obtiveram uma função polinomial de quarto grau e a determinada altura há um grupo que faz a testagem do um modelo...e eu digo assim: *quantas horas deverá dormir uma criança com 21 Kg?* Elas chegam a um valor e eu peço, se achar pertinente, para criar novas questões para testar valores ...e começam a testar outros valores e a função de quarto grau tem a concavidade voltada para baixo e para determinados valores, os valores começam a ser negativos e antes de chegarem a isso diziam: *aqui dizia 21 Kg e deu para horas de sono um valor acima...*e elas disseram : *Ó professora então um aluno com 25 Kg dorme 20 horas, então não vai à escola?* E começaram-se a aperceber, que aquele modelo apesar de se aproximar da nuvem, elas começaram a deduzir: *Ó professora, então quanto mais peso mais dormem, então passa das 24 horas do dia!* E depois eu comecei a falar com elas sobre isso e comecei a dizer que se calhar tinham que experimentar outros valores e ver se servia ou não. E pedi para experimentar para 35 Kg e elas ficaram muito escandalizadas porque deu negativo e a conta estava bem-feita. Foi bom isto acontecer para elas perceberem que estavam a olhar para a nuvem e a partir de determinada altura dá números negativos e se calhar aquele modelo só dá para determinados pesos. E depois conseguirem perceber que aquele modelo aproxima-se da nuvem mas não vai traduzir exatamente o real, e isso foram conclusões interessantes a que elas chegaram. (Entrevista pós aula, 25/06/12)

A professora mencionou que não estava à espera que, as alunas ao inventarem valores para preverem resultados a partir do modelo, fossem obter valores negativos. Ela referiu ainda, que não estava à espera que testassem para valores que não estivessem muito próximos dos conhecidos:

Quando planifiquei não pensei que as alunas fossem experimentar aqueles valores e sinceramente não pensei na parte dos valores negativos. Eu não estava à espera que não testassem para valores próximos dos que tinham! (Entrevista pós aula, 25/06/12)

Relativamente às várias fases do ciclo de modelação, Patrícia reconheceu que a fase que levou a maior intervenção da sua parte e levantou maior discussão foi a fase de interpretação de resultados. A forma como a professora se referiu à sua escolha do modelo deu a entender que esta associou essa opção ao cálculo da raiz quadrada do valor do coeficiente de determinação, referindo-se a este como sendo o coeficiente de correlação linear, para qualquer associação entre variáveis:

Conseguiram interpretar resultados. Elas perceberam que a linha fica próxima da nuvem de pontos e a partir do coeficiente elas conseguiram

perceber...eu até lhes disse que se calhar existiam outros modelos próximos também, mas que este era bom e nós estávamos a aproveitar este porque o coeficiente de correlação linear era o maior. (Entrevista pós aula, 25/06/12)

A professora disse que deveria ter colocado, na tarefa, uma outra questão sobre a adequabilidade do modelo matemático ao contexto real e caso não o validassem, ter sugerido que pudessem estudar um outro ou referissem em que circunstâncias o escolhido poderia ser válido. Foi notória a reflexão que este episódio de aula suscitou na professora e como a levou a pensar em possíveis reajustes na tarefa:

Elas não fizeram reajustes ao modelo e tinha sido interessante eu ter colocado no final da tarefa a indicação para procurarem o modelo que melhor se adequasse. Eu já tinha pensado sobre isto na planificação da tarefa, mas não pensei que elas...a minha ideia é que elas fossem testar para pesos próximos, mas elas fizeram outros valores e portanto, eu acho que falta aqui: procurar um novo modelo que melhor se ajuste a esta amostra, mas não sei até qual, tenho que testar por exemplo para a linear. Ou então dizerem em que condições é que este pode aplicar-se. (Entrevista pós aula, 25/06/12)

A última frase de Patrícia reflete que esta reconheceu que as conclusões a que podem chegar são possibilidades para aquela amostra e que dependem do contexto real que têm.

Quanto ao envolvimento matemático das alunas, Patrícia revelou que teve o objetivo de levar a compreenderem que uma associação entre duas variáveis pode não ser linear e que para isso é importante a representação gráfica. Os exemplos que deu na entrevista reforçaram a ideia que a tarefa foi criada com o objetivo de clarificar este aspeto, pois a professora tinha o receio que ficassem com a perceção que a função representativa de um modelo matemático qualquer fosse sempre uma reta:

Eu pretendia que com esta tarefa elas chegassem a outros modelos que não fosse o linear. Eu queria que elas experimentassem um modelo que elas considerassem mais estranho, por exemplo, uma função de quarto grau, uma função que elas nunca tinham trabalhado, portanto para elas perceberem que existem outras formas e outras linhas de tendência. Houve um grupo que no início, elas foram à linha de tendência, fizeram a polinomial de quarto grau e disseram: *Ó professora, isto está mal, a linha não é reta!* Elas pensavam que tudo, tudo tinha que vir em reta. A esse nível ficou esclarecido na cabeça delas que há outro tipo de regressão para além da linear. Eu disse que há várias curvas e é por isso que os graus são diferentes. Neste ponto acho que o envolvimento matemático e

compreensão do que eu pretendia foi mais rico. (Entrevista pós aula, 25/06/12)

Na entrevista, Patrícia enfatizou a importância do conhecimento do contexto real, e a introdução do artigo na tarefa como um meio facilitador, quer na capacidade crítica dos resultados matemáticos obtidos dadas as dificuldades das alunas, quer na motivação e envolvimento destas:

Eu pedia um pequeno texto onde solicitava para expressar a opinião sobre a relação peso versus horas de sono e tirar conclusões a partir das alíneas anteriores da tarefa, confrontando-as com as conclusões obtidas a partir do excerto do artigo e conhecimento da situação. Será que as crianças dormem o número adequado de horas? Será que o seu peso é adequado? Como elas são muito fraquitas a fazer os textos finais, o contexto conhecido e o texto ajuda-as a compreender e a comparar o que tinham com o que obtiveram. Para mim o contexto real e o artigo fez toda a diferença na interpretação e conclusões. Elas estavam motivadas, elas perceberam perfeitamente o que era para fazer. E identificaram-se com a situação e com a preocupação que devem ter por este tipo de assuntos uma vez que vão trabalhar com crianças. Elas relacionaram com o real. (Entrevista pós aula, 25/06/12)

Quando questionada sobre que reajustes faria a esta tarefa no futuro, Patrícia respondeu que solicitará vários modelos, ao invés de conduzir as alunas só para um e questionará sobre a validade do modelo escolhido. O facto de ter solicitado só um, segundo ela, poderá ter condicionado a reflexão sobre a possibilidade de procurarem um outro que se pudesse adequar melhor à situação. Mais uma vez, usou de forma incorreta o termo coeficiente de correlação linear:

No futuro, se calhar poderia colocar outra questão para procurarem outro modelo, caso achassem necessário. Se calhar não dava o modelo, pedia a procura de vários modelos e solicitava que escolhessem o melhor e mais adequado. Se calhar condicionei a reflexão delas e não sei se perceberam que poderiam ter explorado outros, testar todos para os valores e depois escolher. Eu sei que fiz isso porque eu sabia que era o que tinha maior coeficiente de correlação linear, mas devia ter deixado ela concluírem isso! (Entrevista pós aula, 25/06/12)

Esta reflexão imediata, despertou em Patrícia alguns aspetos que deverá clarificar e modificar no futuro, embora outros não fossem identificados.

Síntese

Segue-se uma síntese do conhecimento para ensinar Estatística que Patrícia revelou na preparação, condução e reflexão desta tarefa de modelação, distinguindo-se os diferentes tipos de conhecimento.

Iniciando com o conhecimento comum matemático, verificou-se que Patrícia teve necessidade de o convocar. Nesta tarefa, este conhecimento diz respeito ao conceito de distribuição bidimensional, associação não linear entre duas variáveis, diagrama de dispersão, interpretação de resultados matemáticos a partir de um modelo de matemático e validação do mesmo. Patrícia pareceu estar insegura relativamente a alguns conceitos, embora demonstrasse não ter consciência desse facto. Por exemplo, durante a condução da aula solicitou o cálculo do valor do coeficiente de correlação linear, para as alunas concluírem acerca do grau da intensidade da associação não linear entre as duas variáveis. A professora desconhece que esse termo só se aplica no caso da existência de associação linear entre duas variáveis e que a raiz quadrada do valor do coeficiente de determinação não é, neste caso, o coeficiente de correlação linear. No entanto, a professora demonstrou saber que a representação gráfica dos dados é importante para perceber se existem padrões e relações escondidas nos dados. Informação esta que podia não ser perceptível a partir das tabelas ou dados originais. Patrícia revelou compreender que as previsões devem ser calculadas a partir do modelo no intervalo de possibilidades e as conclusões a partir de uma dada amostra correspondem a possibilidades, o que significa que o modelo matemático escolhido pode ter limitações num dado contexto.

No que diz respeito ao conhecimento comum não matemático, observou-se que Patrícia revelou neste caso um bom domínio, conhecendo detalhes da realidade a estudar. A partir de conclusões da tarefa de modelação anterior, foram apontadas pelas alunas de Patrícia possíveis causas para o baixo IMC das crianças. Causas essas, associadas, segundo elas, a problemas de cariz económico. A professora resolveu procurar outras possíveis causas e encontrou um artigo que relacionava as horas de sono com o peso das crianças. Tendo identificado a situação real associado a um provável problema social, Patrícia conseguiu compreender como conseguir mais informações que pudessem explicar a situação real identificada.

Quanto ao conhecimento especializado matemático, e após ter tomado consciência que a primeira aula de modelação não correu muito bem, e a forma como preparou e conduziu a aula ter gerado alguma confusão na aquisição de conteúdos

pretendidos, Patrícia resolveu criar outra tarefa que focou os mesmos conteúdos. O conhecimento comum matemático sobre estes conteúdos influenciou a forma como abordou estes conceitos em sala de aula. Por exemplo, com base no conhecimento comum matemático, Patrícia conduziu as alunas a construir o modelo polinomial de grau 4, porque de todos os polinomiais que tinha testado em casa, era o que apresentava o valor da raiz quadrada do coeficiente de determinação maior e que segundo ela, correspondia ao valor do coeficiente de correlação linear. Segundo ela, poderia ter deixado as alunas experimentar outros modelos e conduzido a aula no sentido de estas escolherem um modelo polinomial a partir da representação gráfica e, compreender a tendência dos pontos. Relativamente a este tipo de conhecimento existiram aspetos que evidenciaram alguma robustez. Patrícia teve muitos momentos que evidenciou demonstrar como colocar questões, estruturando a tarefa com o objetivo de ensinar os conteúdos pretendidos, assim como conduzir a aula com o propósito de levar à compreensão de significados, nomeadamente dos pontos no diagrama de dispersão e dos eixos coordenados. Por exemplo, na formulação escrita da quarta questão, Patrícia não disse às alunas que estas só deveriam testar para valores próximos dos dados reais e estas chegaram a conclusões que as levaram a refletir sobre estes. Nesta fase da aula, Patrícia demonstrou saber como conduzir a aula e que questões colocar, aproveitando o que as alunas diziam e sugerindo outros testes. Assim conseguiu que elas percebessem em que condições este modelo era válido, concluindo que era válido para amostra, podendo não ser para outra. Patrícia, quando preparou a aula não previu que as alunas poderiam testar o modelo para determinados valores fora do intervalo de dados e que estes fossem negativos. Embora não tivesse previsto esta situação, conseguiu aproveitar o sucedido e transmitir a ideia que o modelo só era válido para determinada amostra.

Por último, o conhecimento especializado não matemático evidenciado revelou-se robusto, pois o conhecimento da realidade permitiu a partir dos contextos reais, pensar em questões adaptadas e contextualizadas, assim como ensinar a organizar dados reais em tabelas. Por exemplo, quando as alunas obtiveram valores negativos na previsão de resultados e embora, Patrícia embora não tivesse antevisto este aspeto, o conhecimento não matemático proporcionou uma crítica mais aprofundada sobre o que estavam a obter, percebendo-se em que condições o modelo era válido. Neste caso, o conhecimento não matemático veio em auxílio do conhecimento matemático e fez a professora pensar em

questões que levaram à reflexão sobre o trabalho matemático que estava a ser desenvolvido, revelando-se uma mais-valia.

Para além disso, ensinou a usar o EXCEL para que o trabalho matemático fosse facilitado e a organizar os dados em tabelas e a construir gráficos.

Evolução de Patrícia relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação

Seguidamente passarei a fazer uma descrição e análise, a partir da reflexão de Patrícia, sobre os vários tipos de conhecimento revelados por esta, durante a preparação, condução e reflexão das aulas, assim como, as dificuldades sentidas, superadas e por superar relativas aos vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística.

Conhecimento comum matemático

A professora fez uma reflexão positiva sobre a evolução do seu conhecimento ao longo do desenvolvimento deste trabalho, dando destaque ao conhecimento sobre as distribuições bidimensionais e tomando consciência que precisa clarificar e aprofundar o assunto:

O conhecimento sobre as distribuições bidimensionais clarificou-se, acho que não sei se é uma questão de clarificar apenas, foi mais de aprender! Trabalhei-os de outra forma! Já percebi pela última reunião que existem muitos aspetos das bidimensionais que estavam confusos e vou ter de estudar e entender e aprofundar melhor isto! Nunca tinha dado importância e achava que até sabia mais ou menos, mas apercebi-me que era uma área que não estava muito à vontade! (Última entrevista, 25/07/12)

A professora mencionou que inicialmente não dava muita importância às distribuições bidimensionais, porque não se sentia muito à vontade e nem nunca tinha explorado muito:

Eu costumava em anos anteriores, embora não fossem cursos profissionais, porque a Estatística é dada em cursos regulares, eu costumava perder se calhar uma ou duas aulas com as distribuições bidimensionais, fazer 2 ou 3 exemplos clássicos e depois abandonava, não explorava da forma que explorei, porque não me sentia à vontade. (Última entrevista, 25/07/12)

Reconheceu que o facto de ter integrado uma equipa de trabalho colaborativo e ter criado estas tarefas, contribuiu para tomar consciência que alguns aspetos relacionados com as distribuições bidimensionais necessitam de maior aprofundamento:

Estas tarefas serviram também para eu ter noção de como me devo preparar no futuro e já estou mais desperta para os imprevistos, podendo fazer reajustes e preparar-me melhor para as aulas. Gostei de fazer o trabalho colaborativo, gostei sobretudo de me ter permitido compreender que estes conteúdos não estão claros. (Última entrevista, 25/07/12)

Existiram aspetos que sofreram evolução quer devido à reflexão feita em conjunto com as colegas, quer devido a situações de aula que foram surgindo, outras ficaram por aprofundar porque Patrícia não se apercebeu, nomeadamente, relacionadas com o conhecimento dos conteúdos.

Conhecimento comum não matemático

Patrícia explicou que inicialmente não sabia como procurar temas relacionados com a área profissional das alunas e nem em formas de recolher dados. Na entrevista final, essa dificuldade foi reconhecida como ultrapassada devido ao facto de estar numa equipa de trabalho. As ideias foram surgindo a partir de discussões com as colegas, alunas e pesquisas sobre a área profissional. A partir daí e conjuntamente com as alunas, conseguiu construir questões para o questionário e uma tabela onde constava para cada criança, as respostas a cada questão:

Tive dificuldades iniciais em procurar temas e perceber como é que os conteúdos das bidimensionais iriam aparecer e interligar. Eu não estava muito à vontade com estes conteúdos como já disse e logo no início andava preocupada. Com as reuniões de trabalho, ao pesquisar sobre a área profissional e ao falar com as minhas alunas, apareceram ideias interessantes, as coisas começaram a fazer sentido e depois não tive grandes dificuldades em pensar nas tarefas e em formas de recolher dados! Assim surgiu o questionário e uma tabela que permitiu organizar para cada criança, cada resposta a cada questão do questionário. (Última entrevista, 25/07/12)

Nesta entrevista final, reconheceu que os contextos foram um meio facilitador para a construção de instrumentos de recolha de dados. As alunas a partir da tabela construída por Patrícia conseguiram estabelecer algumas relações com base no que tinham observado diretamente:

Elas também conseguiram estabelecer relações a partir do que viam, quer a partir da tabela que eu construí, quer a partir do que observavam nas crianças! Foi completamente novo e o facto de partir da realidade permitiu pensar melhor nos instrumentos de recolha e em conjecturas prováveis! (Última entrevista, 25/07/12)

Conhecimento especializado matemático

Existiram aspetos que sofreram evolução quer devido à reflexão feita em conjunto com as colegas, quer devido a situações de aula que foram surgindo. Patrícia, tal como todas as outras professoras, nunca tido trabalhado o tema Estatística com esta profundidade e abordagem. As distribuições bidimensionais eram lecionadas no final do ano letivo de forma muito rápida e pouco exploradas, ou mesmo não lecionadas. Patrícia mencionou que nunca tinha explicado que poderiam existir outros modelos de regressão para além da linear. Destacou a importância da recolha dos dados reais e da envolvimento das alunas, promovendo a oportunidade de explorar outras tendências. De um modo geral, optava por selecionar um exercício resolvido num manual:

Trabalhei-os de outra forma, antes dava esta matéria a partir de exemplos do manual e muitas vezes nem dava esta matéria! Nas distribuições bidimensionais, não costumava explorar outro tipo de regressões para além da linear e desta vez fiz. Sobretudo porque utilizei, desta vez, dados reais e envolvi-as nessa recolha e assim conseguimos obter outros modelos facilmente. Quando as alunas passaram à construção dos modelos, elas tinham vários tipos de regressão e portanto, era muito fácil que elas percebessem que havia vários modelos e isto é muito diferente daquilo que se faz depois no quadro em aulas expositivas. (Última entrevista, 25/07/12)

A professora referiu que os imprevistos surgidos em aula foram importantes para reajustes nas tarefas seguintes e permitiram repensar sobre as mesmas, aproveitando a ocasião para narrar um episódio de aula:

Surgiram imprevistos e quando surgiram imprevistos eu procurei se possível naquela aula dar a volta e foram importantes para reajustes nessas tarefas e em futuras. Por exemplo: quando nas distribuições bidimensionais aparecia uma função, eu pedia para fazerem substituições para valores de x ou y . Tinham de saber qual era a relação que existia entre duas variáveis. Dado um valor, pedia a previsão, e as minhas alunas não sabiam fazer isso e eu fiquei chocada, porque não fazia ideia e nem tinha trabalhado funções com as alunas... não fazia parte do programa delas de este ano e não fazia ideia que elas não sabiam trabalhar dessa forma. Na aula tentei resolver a situação. Elas estavam a fazer uma tarefa em que elas podiam escolher um modelo matemático à sua vontade, do grau que quisesse, função linear, função do 2º grau, algumas tinham escolhido funções de graus um

bocadinho elevados e, portanto, era complicado aí fazer algum cálculo! E pronto, aí nessa aula tive que sugerir que: então vocês recorram ao modelo linear e façam substituição na função linear, mas qual foi o meu espanto quando nem na função linear elas sabiam fazer isso e então tive que na aula seguinte voltar um bocadinho atrás e fazer questões específicas onde elas treinassem a substituição da variável x ou y ...voltar um bocadinho atrás para depois poder prosseguir. (Última entrevista, 25/07/12)

Conhecimento especializado não matemático

Patrícia explicou que a forma como passou a conduzir as aulas e a ensinar evoluiu ao longo desse ano letivo. As metodologias diversificaram-se e novas abordagens de conteúdos foram, por ela, adotadas destacando as tarefas de modelação e uso da tecnologia:

Este ano foi totalmente diferente! Lá está, eu fazia uma explicação teórica, dava um exemplo e passava aos exercícios! Era muito mais limitador porque se explico dessa forma é muito mais moroso e, portanto, não fugia muito do modelo de regressão linear. Agora permitiu fazer uma abordagem mais ampla e foquei-me sobretudo nas tecnologias da informática. Acho que explorei de uma forma mais aprofundada e ao mesmo tempo não foi cansativa para os alunos, porque eles simularam e tiveram logo uma percepção muito mais abrangente. Se falarmos naquilo que costumo fazer, fora deste contexto, desta experiência que fizemos, a minha prática diária era essencialmente o recurso ao manual, ao quadro, à explicação tradicional, digamos assim! Se pensar naquilo que fiz aqui, neste projeto, recorri sobretudo ao computador e todos os exercícios que fiz ainda que construídos durante a preparação da aula...fi-los todos no computador e depois exemplifiquei e foquei-me sobretudo no computador. Estas tarefas permitiram-me outra abordagem desta matéria a alterou-me a prática no sentido positivo! (Última entrevista, 25/07/12)

Uma das maiores preocupações de Patrícia era não conseguir que as alunas compreendessem a situação real e não estabelecessem relações. Durante a entrevista final, reconheceu a importância dos contextos nessa compreensão e atribuiu a estes o sucesso do trabalho desenvolvido junto das alunas:

Eu diria que a minha preocupação principal era que elas compreendessem a situação, percebessem o iam fazer, conseguissem perceber que tinham de relacionar a partir dos dados e do que viam e que depois tudo aquilo iria dar um modelo matemático. Eu queria que elas percebessem a utilidade da Matemática naquela situação real e graças aos contextos acho que houve sucesso! (Última entrevista, 25/07/12)

Quanto às fases de modelação matemática, Patrícia confessou que tinha algum receio que a forma como as tarefas estavam construídas pudessem não levar a todas as fases de modelação. Segundo ela, no início, não sabia muito bem que questões colocar ou que estrutura de tarefa criar de modo a que todas as fases do ciclo de modelação fossem contempladas e ajudasse as alunas. Destacou o uso do EXCEL e a forma como estruturou algumas questões como um meio facilitador para a realização da tarefa. Reconheceu que a fase da validação do modelo poderia ter sido melhor pensada:

Eu preocupava-me sobretudo em fazer com que as alunas passassem por todas as fases de modelação, eu queria que elas passassem por todas as fases e depois para que conseguissem chegar ao objetivo que era depois tirarem as conclusões no contexto! E às vezes pensava se com aquelas questões e EXCEL isso era possível ou não! Agora reconheço que o EXCEL foi uma forma de ajudar as alunas em muitas das fases. No entanto, reconheço e após termos falado e eu refletido, que poderia ter explorado mais a parte da validação do modelo e levar a perceberem porque escolhiam um modelo e não outro, mas nem sempre fiz essa exploração e vou ter de dar mais atenção a este aspeto! (Última entrevista, 25/07/12)

Patrícia apontou que houve evolução, relativamente ao que entende ser uma tarefa de modelação matemática:

No início pensávamos que as tarefas iniciais eram de modelação, mas depois a meio descobrimos que se calhar não, até porque no início da matéria, no início dos conteúdos, a matéria não se presta muito a fazer modelação, ou seja eles fazem tabelas, fazem gráficos, mas não fazem grande coisa! Mas à medida que a matéria se vai complicando, vamos começar a relacionar variáveis, a trabalhar outros conceitos e aí sim é que é possível fazer aquilo a que nós depois chamamos modelação. As primeiras tarefas são sobretudo para traduzir informação, mas existem fases da modelação que se conseguem encaixar, mas não em todo o ciclo, porque não chegamos a trabalhar com os modelos matemáticos, porque não os construímos, até podemos tirar algumas conclusões a partir da observação gráfica, mas não vamos mais além. Agora as últimas passam perfeitamente por todas as fases! (Última entrevista, 25/07/12)

No quadro 15 apresento uma síntese que retrata o que Patrícia referiu como mais significativo da sua evolução e que procuro cruzar, essas evidências, com os vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística:

Quadro 15: Aspetos mencionados por Patrícia sobre a sua evolução

Tipos de conhecimento	Conhecimento matemático	Conhecimento não matemático
Comum	Aprofundou o seu conhecimento sobre as distribuições bidimensionais	Passou a envolver as alunas na recolha de dados reais; Pesquisou sobre a área profissional das alunas (IMC de crianças, causas para um baixo peso); Reconheceu que os contextos reais foram um meio facilitador para o estabelecimento de relações entre variáveis e que estas surgiram naturalmente.
Especializado	Ao lecionar as distribuições bidimensionais deixou de selecionar exemplos do manual e passou a criar tarefas e a pensar em questões baseadas em dados reais, pesquisando sobre possíveis associações entre variáveis; Reconheceu que a forma de ensinar estes conteúdos carece de maior reflexão e preparação; Reconheceu a importância da tecnologia no estudo destes conteúdos e um meio facilitador destas aprendizagens (algo que não usava anteriormente).	Passou a usar novas abordagens metodológicas e a ensinar a usar recursos no ensino das distribuições bidimensionais, como por exemplo: ensinar a usar o EXCEL, a construir tabelas e elaborar questões que ajudassem a aprender conceitos com maior sucesso.

Síntese global relativa a Patrícia

Nesta última secção, faço uma síntese global sobre as características do conhecimento para ensinar Estatística de Patrícia, tendo em conta as dimensões que considero e que vão de encontro às três questões de investigação.

Patrícia e as características do conhecimento para ensinar Estatística revelado na prática de ensino com tarefas de modelação

Quadro síntese de Patrícia

Seguidamente, tendo em conta uma adaptação do modelo de Groth (2007) às várias fases do ciclo de modelação de Ferri (2006) aos quatro tipos de conhecimento para ensinar Estatística, apresento, um quadro resumo (quadro 16) com evidências desses conhecimentos ao longo da preparação, condução e reflexão das aulas de modelação estatística:

Quadro 16: Aspetos do conhecimento de Patrícia para ensinar Estatística com tarefas de modelação para o estudo das distribuições bidimensionais (adaptado de Groth, 2007)

Fases da modelação	Tipos de conhecimento	Conhecimento matemático	Conhecimento não matemático
Construção da representação real	Comum	Reconheceu que poderiam emergir variáveis a partir de um questionário e que poderiam relacionar-se.	Identificou uma situação real relacionada com a infância: conhecer as crianças de uma turma do pré-escolar com o objetivo de preparar atividades lúdico-didáticas adequadas; Identificou uma situação real relacionada com características físicas de crianças do pré-escolar; Pesquisou sobre o IMC e razões que possam causar um baixo peso na infância; Construiu uma tabela que permitiu organizar para cada criança todas as respostas ao questionário.
	Especializado	Proporcionou durante a “observação” das respostas aos questionários e	Reconheceu eventual conhecimento das alunas sobre contextos da situação em estudo.

		<p>recolha de dados, oportunidade de discussão e incitou as alunas a “olharem” para os dados e observarem as crianças de modo a estabelecerem relações.</p>	
Construção do modelo real	Comum	<p>Na construção do modelo real, a professora revelou um uso não consistente dos termos correlação e associação; Selecionou variáveis emergentes da situação real; Reconheceu a importância da representação gráfica dos dados na identificação da associação entre duas variáveis.</p>	<p>Soube construir instrumentos de recolha de dados adequados (questionários e tabelas de recolha de dados a partir dos questionários); Aproveitou diálogos surgidos a partir da observação da realidade para testar conjecturas surgidas a partir da construção de tabelas e diagramas de dispersão com recurso ao EXCEL</p>
	Especializado	<p>Optou por uma determinada sequência de lecionação dos conteúdos inerentes às distribuições bidimensionais, que suscitaram alguma confusão quando às aprendizagens. Usou, como exemplo introdutório ao estudo das distribuições bidimensionais, uma tabela escolhida a partir de um manual. No entanto, poderia ter usado os dados reais. Proporcionou, através da colocação de questões, a oportunidade das alunas compreenderem a importância da</p>	<p>Reconheceu possíveis incorreções das alunas, relativamente à construção do gráfico e tabela e proporcionou oportunidade de esclarecimento apelando ao conhecimento da situação real.</p>

		<p>representação gráfica dos dados;</p> <p>Reconheceu a importância de dar, exemplos de possíveis tabelas que permitissem levar os dados para a aula, ensinando as alunas a organizar os dados.</p>	
Construção do modelo matemático	Comum	<p>Reconheceu a adequabilidade da equação da reta de regressão linear ao conjunto de dados;</p> <p>Soube calcular o valor do coeficiente de correlação linear;</p> <p>Reconheceu que duas variáveis podem estar associadas linearmente;</p> <p>Reconheceu que um conjunto de dados pode seguir uma tendência não necessariamente linear;</p> <p>Revelou estar à vontade com o modelo de regressão linear, mas nas tarefas em que as alunas poderiam estudar outros modelos de regressão, foi notória alguma insegurança por parte da professora;</p> <p>Reconheceu que a partir da representação gráfica dos dados, estes levariam a modelos de regressão não necessariamente lineares;</p> <p>Pareceu desconhecer que o valor do coeficiente de correlação linear mede apenas a</p>	<p>Construiu com recurso ao EXCEL, vários modelos matemáticos adequados à situação real.</p>

		associação linear entre duas variáveis e não outras associações; Pareceu não dar importância à possibilidade de serem construídos outros modelos matemáticos.	
	Especializado	Não sabia que as alunas não tinham determinados conhecimentos matemáticos e que determinados modelos não deveriam ser construídos; Reconheceu a importância de colocar questões, durante a aula, que relacionassem o declive da reta de regressão linear com a tendência dos pontos; Colocou questões que conduziam à escolha de um modelo de regressão não linear a partir do cálculo raiz quadrada do valor do coeficiente de determinação, referindo-se a este como sendo o coeficiente de correlação linear.	Alertou as alunas para o facto de terem de usar vírgula em vez de ponto no EXCEL, pois caso contrário o modelo matemático ficaria incorreto; Um das alunas construíram, no EXCEL, incorretamente o diagrama de dispersão e Patrícia apelou a compreensão acerca do significado dos pontos, pois comprometeria a construção dos modelos matemáticos.
Obtenção de resultados matemáticos	Comum	Compreendeu que deve solicitar previsões de dados dentro do intervalo de dados ou para valores muito próximos desse.	Usou o EXCEL como ferramenta no cálculo das previsões; Compreendeu a importância dos contextos para entender o significado das variáveis.
	Especializado	Desconhecia dificuldades das alunas na	Ensinou as alunas a usar o EXCEL para estimarem valores a

		<p>mobilização de conhecimentos matemáticos ao terem de trabalhar matematicamente com o modelo matemático escolhido;</p> <p>Colocou questões no sentido de clarificar o significado do x e do y a fim de as alunas conseguirem interpretá-los e compreenderem como trabalhar o modelo matemático.</p>	partir do modelo matemático.
Interpretação de resultados matemáticos	Comum	<p>Reconheceu a importância de testar o modelo matemático e solicitar previsões dentro do intervalo de dados;</p> <p>Reconheceu que os resultados matemáticos obtidos devem ser interpretados e sujeitos a uma reflexão quanto à sua grandeza e sinal.</p>	Pesquisou e encontrou uma tabela sobre o IMC, que permitia tirar conclusões sobre os resultados matemáticos obtidos para o peso e altura das crianças.
	Especializado	<p>Reconheceu o surgimento de possíveis erros de interpretação de resultados matemáticos oriundos de uma utilização incorreta do modelo matemático e colocou questões no sentido de clarificar;</p> <p>Incitou as alunas a fazerem previsões para outros valores no contexto real conhecido, de modo a criticarem os resultados;</p> <p>Conduziu as aulas estabelecendo diálogos de modo a que não surgissem</p>	<p>Reconheceu interpretações incorretas das alunas a partir dos resultados matemáticos obtidos e previu esclarecimentos apelando ao sentido crítico tendo em conta o que conheciam da situação real;</p> <p>Reconheceu a importância de conhecer os contextos reais para interpretar adequadamente os resultados matemáticos obtidos: ensinou a calcular o IMC e a interpretar</p>

		interpretações erradas a partir dos resultados matemáticos obtidos.	uma tabela de IMC e a analisar um artigo sobre as horas de sono e peso com o intuito de as alunas compreenderem qual a relação entre essas variáveis.
Validação de modelos matemáticos	Comum	<p>Pareceu não dar importância à necessidade de validar um modelo matemático;</p> <p>Evidenciou não perceber, nas duas primeiras tarefas, que os valores obtidos a partir de um modelo conduzem a possibilidades e que este modelo pode apresentar limitações;</p> <p>Reconheceu na terceira tarefa, a necessidade de ter em atenção estudos científicos e dados reais recolhidos para compreender que, os valores obtidos a partir de um modelo conduzem a possibilidades e que têm de ter em conta os contextos, apresentando limitações.</p>	Pareceu nem sempre reconhecer que o contexto real pode ser um indicador de um modelo matemático ser refutado em prol de outro, uma vez que não sentiu necessidade de construir outro, caso não se adequasse à amostra.
	Especializado	<p>Parece nem sempre saber como questionar as alunas sobre em que condições, ou para que amostra, determinado modelo poderia ser válido, deixando por explorar algumas situações surgidas durante a realização das tarefas;</p> <p>Durante a condução da terceira aula, a professora sentiu</p>	Na primeira tarefa a forma como a última questão foi apresentada não permitiu às alunas justificarem se validavam ou não o modelo tendo em conta o contexto; Reconheceu a importância do contexto real na validação dos modelos quando apelou à comparação dos resultados com a

		necessidade de sugerir valores dentro e fora do intervalo de dados para fazer previsões com o intuito de compreenderem em que circunstâncias o modelo era válido.	conjetura inicialmente estabelecida.
--	--	---	--------------------------------------

Caracterização global do conhecimento para ensinar Estatística de Patrícia

A partir da análise do quadro e relativamente a cada tipo de conhecimento para ensinar Estatística, destaco o que se revelou mais robusto e frágil para a professora:

Conhecimento comum matemático: Patrícia ao longo da preparação das tarefas, condução e reflexão das aulas evidenciou estar à vontade com alguns conteúdos estatísticos e mais insegura quanto a outros, demonstrando que desconhece alguns aspetos.

Patrícia evidenciou saber que a associação entre duas variáveis pode ser não linear e o conjunto de pontos pode seguir outra tendência. No entanto, durante a entrevista que antecedeu a primeira aula de modelação, explicou que ao experimentar que tipos de modelos de regressão poderia obter, optou por aquele que tinha um “bom” valor do coeficiente de correlação linear. Construiu questões que induziam à escolha de um modelo matemático qualquer, a partir do cálculo da raiz quadrada do valor do coeficiente de determinação, referindo-se a este como sendo o coeficiente de correlação linear. A forma como a professora procedeu leva-me a dizer que estes conceitos necessitam de um estudo mais aprofundado e de alguma clarificação, pois parece desconhecer que o coeficiente de correlação linear mede o grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis, e não de outro tipo de associação. Patrícia demonstrou conhecer que se pode concluir acerca da associação linear entre duas variáveis a partir do conhecimento sobre o estudo do grau da intensidade da associação linear entre as variáveis. Para além disso, revelou saber que a representação gráfica dos dados permite estudar qual a associação que pode existir entre duas variáveis. A observação da representação gráfica pedida na segunda e terceira tarefas, demonstrou que a professora compreendeu que esta pode revelar padrões e relações existentes escondidas nos dados, informação esta que pode não ser perceptível a partir de tabelas ou dados originais.

Patrícia demonstrou saber que as previsões de resultados, a partir de um modelo matemático, devem ser calculados no intervalo de possibilidades. Na fase de aula que antecedeu a entrega da primeira tarefa de modelação às alunas, Patrícia, ao apresentar um exemplo sobre as distribuições bidimensionais, referiu-se aos mínimos quadrados, dizendo que se a reta tivesse outro aspeto, a soma da distância dos pontos à reta seria maior. Embora não clarificasse muito bem este aspeto, entendeu-se a intenção de querer dar a entender que a soma da distância de todos os pontos à reta terá de ser a mínima possível. Patrícia destacou que a reta do modelo linear contém sempre um ponto denominado por centro de gravidade, evidenciando que atribui importância a esse conteúdo e conhece-o. Durante os episódios de aula acima descritos, existiram algumas confusões na linguagem usada, revelando que alguns conceitos estatísticos não estão claros para Patrícia. Nesse sentido, podemos dizer que o conhecimento comum matemático carece de aprofundamento e clarificação. Foi evidente a complexidade inerente ao ensino e aprendizagem sobre dados e relações bivariadas.

Conhecimento comum não matemático: No que diz respeito ao conhecimento comum não matemático, observou-se que Patrícia revelou neste caso um bom domínio, conhecendo detalhes da realidade a estudar, procurando assim temas de interesse e apelativos para as alunas. A professora demonstrou saber como construir instrumentos de recolha de dados reais, ao pensar juntamente com as suas alunas em questões que retratassem aquilo que necessitavam conhecer sobre a amostra. A construção do questionário, e a sua contribuição e das alunas permitiu a envolvência destas na recolha de dados e na compreensão da situação e levando à formulação do problema de investigação estatística. Na segunda tarefa de modelação e após as suas alunas terem referido que a amostra de crianças parecia ter problemas a nível alimentar e subnutrição, a professora avançou com uma pesquisa sobre o peso e IMC adequados na infância. Esta compreensão da situação real e pertinência do estudo inserida na Estatística possibilitou aprofundar e estudar este problema a um nível matemático, mas inserido num contexto real que foi despoletado por uma desconfiança e observação das suas alunas. Patrícia reconhecendo a importância de um contexto real para a compreensão de uma situação, tendo sabido problematizá-la e perceber que podiam surgir dados interessantes e adequados ao contexto, por exemplo, perceber por que razão as crianças da amostra selecionada pareciam ter baixo peso, resolveu pesquisar sobre razões que pudessem justificar esse fator. Descobriu um artigo que relacionava as horas de sono com o peso e

usou-o para o estudo pretendido. Compreendeu que esse artigo poderia favorecer a motivação das alunas e a compreensão de uma situação real que as preocupava.

Conhecimento especializado matemático: No que diz respeito a este tipo de conhecimento, pareceu haver alguma inexperiência na abordagem destes conteúdos em sala de aula, muitas vezes influenciada pela fragilidade evidenciada do conhecimento comum matemático. Patrícia demonstrou nem sempre estar preparada para responder às necessidades e intervenções das suas alunas, não tirando o máximo proveito de oportunidades de ensino não planeadas surgidas no decurso das interações educativas, cujas concretizações exigiam preparação. Antes da introdução da primeira tarefa de modelação, Patrícia optou por apresentar um exemplo que ilustrasse todo o trabalho que desejava ver desenvolvido ao longo de uma tarefa de modelação envolvendo as distribuições bidimensionais. Esta fase introdutória demonstrou que a professora assumiu um papel expositivo, dando pouca margem de participação às alunas. Este aspeto, evidenciou alguma falta de vontade com estes conteúdos, tendo sentindo-se mais segura ao apresentar o que já tinha preparado. O facto de Patrícia pensar que o valor do coeficiente de correlação linear era a raiz quadrada do valor do coeficiente de determinação de um modelo de regressão não linear, influenciou, na primeira tarefa de modelação, as justificações das alunas quanto à escolha de um modelo e levou-as a uma compreensão confusa sobre este assunto. Patrícia pretendeu com esta tarefa, não solicitar nenhum modelo matemático específico, mas sim deixar as alunas construírem vários, o que levou a alguns problemas. O que aconteceu foi que alguns dos modelos obtidos correspondiam a funções que ainda não tinham sido trabalhadas em sala de aula. Por exemplo, o modelo exponencial, neste curso profissional, nunca seria abordado, uma vez que para este curso a carga horária da disciplina de Matemática é apenas de 100 horas. As únicas funções trabalhadas tinham sido as polinomiais e nesse sentido, as alunas não tinham conhecimentos matemáticos para o trabalharem com outros modelos. A professora demonstrou não ter previsto estas dificuldades. Durante a aula, Patrícia disse-me que não estava à espera que escolhessem o modelo de regressão quadrática, mas sim o linear, reconhecendo que não deveria ter colocado na questão a escolha do modelo a partir do valor do coeficiente de correlação linear. Isso foi referido, não porque sabia que só faz sentido calcular esse valor para uma associação linear, mas sim porque as alunas não conseguiam trabalhar bem com o modelo de regressão quadrática. A professora demonstrou que não estava habituada a abordar estes conteúdos a partir de contextos reais

o que me leva a dizer que necessita de algum aprofundamento quer ao nível dos conceitos, quer ao nível da preparação da tarefa e quer ao nível da condução da aula. O trabalho matemático desenvolvido pelas alunas, durante a primeira tarefa de modelação, foi mais complicado do que o esperado e devido a uma falta de antevisão de dificuldades ao nível da testagem do modelo matemático escolhido. Patrícia não previu esta dificuldade e a forma como as alunas teriam de calcular o valor de x , teria de ser com recurso à fórmula resolvente, o que poderia ser um constrangimento, dado que, estas alunas, a maioria era oriunda de cursos CEF o que poderia implicar que muitos conhecimentos matemáticos não tivessem sido adquiridos. A professora disse-me, informalmente e durante a aula, que estava à espera que escolhessem o modelo linear, mas como tinham escolhido o modelo de regressão quadrática estava a dar cálculos mais complicados do que ela tinha previsto. Apanhada desprevenida, não conseguiu pensar numa forma rápida e conhecida pelas alunas para resolver aquela equação o que causou algum nervosismo na professora e algum desalento nas alunas. Surgiram modelos de regressão cuja abordagem matemática não tinha sido realizada em sala de aula e Patrícia durante a elaboração da tarefa não contemplou este aspeto. Estas alunas só tinham conhecimentos matemáticos relativamente às funções polinomiais e alguns modelos construídos não corresponderam aos esperados. Patrícia interveio durante a aula no sentido de se restringirem aos modelos de regressão polinomial, mas, no entanto, gerou-se em sala de aula alguns momentos de confusão. Patrícia demonstrou não conhecer as dificuldades das alunas relativamente a estes conteúdos. Patrícia evidenciou desconhecer essas dificuldades, justificando o trabalho matemático das alunas com o facto de serem oriundas de CEF e não terem pré-requisitos de anos anteriores. Este episódio de aula demonstrou que não é habitual a abordagem destes conteúdos estatísticos em sala de aula e que nem a professora se sente à vontade com eles, acabando por ter sido ela a resolver a equação e fornecer os resultados às alunas. Estas alunas, pouco habituados a tarefas mais exigentes, exerceram pressão sobre a professora, através de pedidos de ajuda, obrigando-a a mudar a natureza da tarefa, desde a fase de apresentação até à sua implementação. Neste sentido, esta tarefa não teve o grau cognitivo que era esperado.

Na terceira tarefa de modelação, Patrícia antevendo dificuldades no trabalho matemático a realizar pelas alunas, direccionou a construção dos modelos matemáticos para o modelo de regressão polinomial de grau 4. Essa opção foi devida ao conhecimento já adquirido sobre as suas alunas e dificuldades do ponto de vista das competências

matemáticas. Na questão dois, a professora apelou à observação da representação gráfica dos dados para uma primeira reflexão sobre a associação possível entre as duas variáveis. Durante esta fase, Patrícia dirigiu-se à turma no sentido de focar a atenção das alunas na observação da representação gráfica. O objetivo foi que as alunas percebessem que a tendência destes pontos não era linear. No entanto, a forma como colocou a questão na tarefa não foi clara, e a forma como conduziu o episódio de aula demonstrou alguma fragilidade na forma como estruturou esta questão.

Conhecimento especializado não matemático: Durante as entrevistas que antecederam as aulas e planificações, a professora anteviu dificuldades nas várias fases da concretização de cada tarefa, nomeadamente no uso do EXCEL e construção de tabelas e gráficos, o que evidenciou que esta teve em conta os conhecimentos não matemáticos das alunas e ausência de alguns pré-requisitos. Para a minimização dessas dificuldades, apresentou, durante as entrevistas, algumas possíveis intervenções. Para além disso, em muitas situações imprevistas de aula conseguiu gerir a aula na condução do sucesso das suas alunas. Na primeira tarefa (que antecedeu as de modelação), ao dar-se conta que as tabelas não estavam construídas corretamente, indagou as alunas sobre o número de questionários preenchidos e o número de linhas da tabela. Essas questões tiveram o propósito de, ao compararem com a realidade, perceberem que a tabela não estava bem. Na tarefa cinco (que antecedeu as de modelação), Patrícia embora não tenha explicado às alunas como corrigir, no EXCEL, um histograma, indagou-as acerca da forma como o gráfico lhes parecia estar construído, tendo em conta a situação real. No entanto, em nenhum dos trabalhos entregues pelas alunas, houve resposta a esta questão e Patrícia durante a aula não explorou esta questão e nem a discutiu.

Numa das tarefas, o facto de ter colocado uma tabela com informação inerente ao cálculo e interpretação do IMC, levou a que as alunas compreendessem que teriam de estudar a situação real sinalizada por elas, tendo de construir uma tabela semelhante com recurso ao EXCEL. A professora colocou questões no sentido das alunas refletirem sobre os resultados, tendo em conta o contexto real. Por exemplo, um dos grupos, numa tarefa, substituiu bem o valor dado para a altura, mas o resultado que estavam a obter para o calçado era superior a 100. Isso fez com que as alunas questionassem o valor e fossem rever os cálculos, descobrindo que tinha havido um erro. Dessa forma, e sabendo que é impossível alguém calçar um número de sapato desses perceberam que algo poderia estar errado. A professora conseguiu, com esta questão apelar à realidade, ensinar a trabalhar,

com recurso ao EXCEL, corretamente com o modelo, reconhecendo-o como um recurso fundamental para o estudo das distribuições bidimensionais e um meio facilitador na construção e visualização de vários modelos matemáticos, garantindo o sucesso dos alunos e dando sentido aos dados. Este conhecimento revelou-se robusto.

Em suma, o conhecimento não matemático revelou-se robusto e o conhecimento matemático evidenciou alguma fragilidade. O conhecimento comum matemático influenciou e condicionou o conhecimento especializado matemático, quer na forma como preparou as tarefas, quer na forma como conduziu as aulas. A professora desconhecia que usava de forma incorreta alguns termos relacionados com as distribuições bidimensionais e referiu-se a estes em várias situações. O conhecimento dos contextos favoreceu o ensino e aprendizagem das distribuições bidimensionais e durante algumas fases do ciclo de modelação revelou-se importante nas interpretações realizadas. Desta forma, conseguiu pensar em questões mais ricas e desafiadoras, e durante a condução das aulas conseguiu compreender e ultrapassar alguns constrangimentos, que se não conhecesse o contexto real, seria mais difícil de contornar.

Patrícia e o conhecimento para ensinar Estatística nas diferentes fases das tarefas de modelação estatística

A partir da análise do quadro e relativamente a cada fase de modelação, destaco os conhecimentos que foram evidenciados como robustos e os que estiveram mais frágeis:

Construção da representação real: Nesta fase de modelação, todos os tipos de conhecimentos revelaram-se robustos. Patrícia demonstrou saber: identificar variáveis a partir de um questionário (conhecimento comum matemático); pesquisar e aprofundar sobre a área profissional das suas alunas e construir instrumentos que permitiram organizar os dados a partir de questionários (conhecimento comum não matemático); incitar as alunas a observarem os dados e assim estabelecerem relações entre as variáveis (conhecimento especializado matemático); dar importância ao conhecimento das alunas sobre contextos da situação em estudo porque são alunas de apoio à infância e ensinou a interpretar e usar uma fórmula sobre o cálculo do IMC, assim como uma tabela que permitia compreender o estado de uma pessoa dado o seu IMC (conhecimento especializado não matemático).

Construção do modelo real: Nesta fase, o conhecimento não matemático foi robusto, mas o conhecimento matemático manifestou alguma fragilidade. Quanto ao conhecimento não matemático, Patrícia demonstrou saber: construir tabelas e diagramas de dispersão com recurso ao EXCEL (conhecimento comum); reconhecer possíveis incorreções das alunas, relativamente à construção do gráfico e tabela; proporcionar oportunidade de esclarecimento apelando ao conhecimento da situação real, ensinando as alunas a usar corretamente o EXCEL na construção das tabelas de modo, garantindo o sucesso das mesmas (conhecimento especializado); Relativamente ao conhecimento matemático, Patrícia revelou na construção do modelo real, um uso não consistente dos termos correlação e associação (conhecimento comum). Optou por uma determinada sequência de lecionação dos conteúdos inerentes às distribuições bidimensionais, que suscitaram alguma confusão quanto às aprendizagens. Para além disso, não usou, como exemplo introdutório ao estudo das distribuições bidimensionais, uma tabela com dados reais, mas sim uma escolhida a partir de um manual (conhecimento especializado). No entanto, existiram alguns aspetos positivos: reconheceu a importância da representação gráfica dos dados na identificação de relações ou padrões entre duas variáveis (conhecimento comum matemático).

Construção do modelo matemático: Nesta fase, o conhecimento não matemático revelou-se robusto, mas o conhecimento matemático manifestou alguma fragilidade, quer nos conteúdos estatísticos que demonstrou não estarem bem clarificados, quer na forma como preparou ou conduziu as aulas. Quanto ao conhecimento não matemático, a professora demonstrou saber: usar o EXCEL na construção de vários modelos matemáticos (conhecimento comum); ensinar a usar o EXCEL, na construção de vários modelos matemáticos a partir dos diagramas de dispersão, facilitando o trabalho das alunas; colocar questões desafiadoras no sentido das alunas assumirem um papel mais ativo na sua aprendizagem; colocar questões abertas e estatisticamente ricas relacionadas com a sua área profissional de modo a entenderem, a partir da mobilização do conhecimento extra matemático se, a partir das tabelas, os modelos matemáticos estavam ou não bem construídos (conhecimento especializado). No que concerne ao conhecimento matemático, surgiram alguns constrangimentos. Patrícia demonstrou: não saber que o coeficiente de correlação linear, mede apenas a associação linear entre duas variáveis e não outra, interpretando que o melhor modelo de regressão (linear ou não) é aquele cujo valor do coeficiente de correlação linear é o maior (conhecimento comum), quando nem

faz sentido calculá-lo se a associação não for linear; que o seu conhecimento comum influenciou o conhecimento especializado, porque durante a condução das aulas, questionou as alunas sobre o grau da intensidade da associação não linear entre as variáveis, apelando incorretamente à interpretação do valor do coeficiente de correlação linear. Para além disso, não teve em conta as dificuldades e as aprendizagens anteriores das alunas, porque ao solicitar vários modelos matemáticos não revelou ter previsto que as alunas não conheciam as funções que poderiam surgir (conhecimento especializado), evidenciando não ter previsto essas dificuldades.

Obter resultados matemáticos: Nesta fase, quase todos os tipos de conhecimento foram robustos, apenas o conhecimento especializado matemático evidenciou alguma fragilidade. Patrícia demonstrou saber: que se deve testar o modelo matemático e solicitar cálculos a partir do modelo para determinar previsões no intervalo de possibilidades (conhecimento comum matemático); que se deve usar o EXCEL como ferramenta auxiliar no cálculo de valores a partir dos modelos matemáticos, assim como, reconhecer a importância dos contextos para entender o significado das variáveis (conhecimento comum não matemático); ensinar a usar o EXCEL, de modo a conduzir as alunas a fazerem substituições no modelo matemático escolhido e a obterem resultados matemáticos, sendo assim o computador reconhecido como um recurso decisivo para trabalhar com os alunos uma Matemática mais realista (conhecimento especializado não matemático). Patrícia não anteviu dificuldades das alunas na mobilização de conhecimentos matemáticos não consolidados (e que já tinham sido lecionados por ela ou em anos anteriores quando tiveram de trabalhar matematicamente com o modelo matemático escolhido), suscitando alguns constrangimentos durante a condução das aulas (conhecimento especializado matemático).

Interpretação dos resultados matemáticos: Nesta fase, todos os tipos de conhecimentos revelaram-se robustos. Patrícia evidencia saber: que os resultados matemáticos obtidos são possibilidades num dado contexto e para determinada amostra e que o modelo matemático pode ter algumas limitações (conhecimento comum matemático); pesquisar sobre dado contexto e encontrou uma tabela sobre o IMC, que permitia tirar conclusões sobre os resultados matemáticos obtidos para o peso e altura das crianças (conhecimento comum não matemático); como conduzir as aulas estabelecendo diálogos de modo a que não surgissem interpretações erradas a partir dos resultados matemáticos obtidos, monitorizando o trabalho das alunas e levando à reflexão sobre a

evolução da produção matemática, assim como à exploração de novas ideias em discussão com as colegas; conduzir as alunas a fazerem previsões para outros valores no contexto real conhecido, de modo a criticarem os resultados (conhecimento especializado matemático); reconhecer a importância de conhecer os contextos reais para interpretar adequadamente os resultados matemáticos obtidos, tendo ensinado a calcular e interpretar uma tabela de IMC e a analisar um artigo sobre as horas de sono e peso, com o intuito de as alunas compreenderem qual a relação entre essas variáveis (conhecimento especializado não matemático). Deste modo relacionou o conhecimento do contexto com o conhecimento estatístico ao comparar os dados da situação com os dados obtidos.

Validação do modelo matemático: Nesta fase, Patrícia revelou alguma fragilidade na maioria dos conhecimentos. Não reconheceu: a importância da necessidade de procurar outros modelos matemáticos no caso de refutar o inicial e nem (nas duas primeiras tarefas), que os valores obtidos a partir de um modelo conduzem a possibilidades para um certo contexto e amostra (conhecimento comum matemático); que o contexto real pode ser um indicador de um modelo matemático ser refutado em prol de outro, uma vez que não sentiu necessidade de construir outro, caso não se adequasse à amostra (conhecimento comum não matemático); a necessidade de solicitar a construção de outro modelo matemático, uma vez que na preparação das tarefas não colocou essa questão (conhecimento especializado matemático); No entanto existiram alguns aspectos positivos: reconheceu a importância do contexto real na validação dos modelos quando apelou à comparação dos resultados com a conjectura inicialmente estabelecida (conhecimento especializado não matemático); Durante a condução de uma das últimas aulas, a professora sentiu necessidade de sugerir valores dentro e fora do intervalo de dados para solicitar previsões, com o intuito de compreenderem em que circunstâncias o modelo era válido, Desta forma conseguiu que as alunas compreendessem que os resultados matemáticos obtidos a partir de certo modelo são possibilidades para um certo contexto e que este apresenta limitações. Desta forma evidenciou evolução relativamente às duas primeiras tarefas (conhecimento especializado matemático).

Em suma, as fases de modelação que evidenciaram maior fragilidade nos vários tipos de conhecimento foram: a construção do modelo real, a construção do modelo matemático, obtenção de resultados matemáticos e a validação do modelo matemático. Quanto às restantes fases, Patrícia evidenciou robustez nos vários tipos de conhecimento, embora seja evidente alguma fragilidade no conhecimento matemático.

Patrícia e as dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que se evidenciaram na preparação, condução e reflexão de aulas de modelação estatística

Destacam-se, a seguir, as dificuldades de Patrícia relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que se evidenciaram ao longo das fases das práticas de ensino de aulas de modelação estatística. Na primeira tarefa da fase de “pré-modelação”, durante a entrevista de reflexão pós aula, Patrícia mencionou que sentiu dificuldades em focar a atenção das alunas no que pretendia que fizessem na tarefa. Explicou que isto deveu-se à característica pouco usual desta tarefa, pois estas estavam habituadas a reproduzir tudo o que a professora fazia, notando alguma resistência inicial. Na quinta tarefa desta fase de “pré-modelação”, essa dificuldade foi ultrapassada.

Em ambas as tarefas, Patrícia durante as entrevistas de reflexão imediata pós aula, referiu que todas as fases do ciclo de modelação estiveram presentes. Segundo ela, a passagem dos dados reais, que constavam numa tabela, onde para cada criança constavam os dados dos questionários, para uma tabela onde os organizava segundo as variáveis em estudo, correspondia ao modelo matemático. Este aspeto evidenciou que a professora, nesta fase, ainda não tinha clarificado o que distingue um modelo real de um modelo matemático, o que significa que esta dificuldade ainda estava por superar nesta fase do trabalho. Outra dificuldade sentida, mas que ela não referiu na entrevista pós aula, esteve relacionada com o conhecimento especializado não matemático evidenciado, quando não ensinou as suas alunas a corrigir o histograma construído com recurso ao EXCEL. Patrícia pareceu não saber como juntar as barras que apareciam separadas e deixou os gráficos das alunas ficarem incorretos.

Na primeira tarefa de modelação, Patrícia não se referiu, durante a entrevista pós aula, a nenhuma dificuldade superada durante a preparação da tarefa ou condução da aula.

Foram evidentes algumas dificuldades por superar em todas as tarefas de modelação, nomeadamente relativamente ao conhecimento comum matemático e conhecimento especializado matemático. Durante a entrevista pré aula e condução das aulas, Patrícia demonstrou dificuldades relativamente ao conhecimento que evidenciou ter sobre os conteúdos estatísticos relacionados com as distribuições bidimensionais. Estas dificuldades não foram identificadas pela professora. Patrícia revelou não saber que o coeficiente de correlação linear apenas mede a associação linear entre duas variáveis estatísticas numéricas. Patrícia continuou a evidenciar, ao longo de todas as tarefas, dificuldades no uso não consistente dos termos relacionados com as distribuições

bidimensionais, mostrando que desconhece alguns conteúdos relacionados com esta temática. Essas dificuldades persistiram e continuaram por superar. O conhecimento comum matemático, que evidenciou ter sobre estes conteúdos, continuou a interferir na forma como formulou as questões no enunciado das tarefas e condução das aulas.

Quanto ao conhecimento especializado matemático, Patrícia não conseguiu prever, que o modelo matemático poderia ser refutado e, como tal, nem no enunciado das tarefas e nem durante as aulas, colocou questões que levassem à procura de um outro modelo mais adequado. Patrícia durante a entrevista pós aula da terceira tarefa de modelação, explicou que não esperava que as alunas, ao inventarem valores para testarem o modelo matemático, o fizessem para valores fora do intervalo de dados. Embora ela tivesse sido apanhada de surpresa e nesse instante esse aspeto tivesse constituído uma dificuldade imediata sentida, ela depressa colocou questões que conduziram as alunas a perceberem em que contexto real aquele modelo matemático era válido, acabando por a fazer refletir sobre a formulação da questão e superando essa dificuldade. Durante a entrevista pós aula da terceira aula de modelação, Patrícia consciencializou-se que durante a fase de validação, deve explorar, no futuro, melhor esta fase e colocar questões que permitam conduzir a uma maior reflexão, por parte dos alunos, sobre a adequabilidade de dado modelo matemático e, caso seja refutado, tenham de construir outro. Neste sentido, parece ter havido uma evolução relativamente a esta dificuldade e esta parece estar superada. Foi também mencionado por ela, que não deveria ter induzido as alunas a escolherem o modelo polinomial de grau 4, pois ela sentiu que talvez as suas alunas não tivessem percebido o porquê desse modelo e não outro. Foi notório que o facto de desconhecer alguns aspetos inerentes aos conteúdos sobre as distribuições bidimensionais (conhecimento comum matemático) interferiu com o seu conhecimento especializado matemático, expondo-a a situações que por vezes suscitaram dificuldades na forma como conduziu a aula. Para além disso, na última entrevista pós aula realizada, referiu que sentiu dificuldades na fase de validação do modelo matemático, uma vez que não insistiu na escolha de um novo, caso o inicial fosse refutado e deveria tê-lo feito. Foram evidentes algumas dificuldades por superar, nesta fase do ciclo de modelação, revelando alguma inexperiência na gestão deste tipo de situações.

Foram apontadas por Patrícia, durante a entrevista pós aula da primeira tarefa de modelação, algumas dificuldades sentidas durante a condução da aula e relacionadas com alguma fragilidade do seu conhecimento especializado matemático. A professora revelou não conhecer bem as aprendizagens das alunas sobre o tema Funções. Ao solicitar a

construção de vários modelos matemáticos, surgiram no decorrer da aula, vários constrangimentos relacionados não só com a escolha de um modelo matemático, como na fase de testagem. Esses constrangimentos foram referidos por Patrícia durante a entrevista pós aula. A professora explicou que a aula não decorreu como previsto, mencionando que surgiram situações e dificuldades inesperadas. Disse ainda que, sentiu dificuldades durante a condução da aula, porque foi apanhada desprevenida relativamente ao trabalho matemático que as aulas desenvolveram, quer durante a escolha de um modelo matemático, quer na fase de testagem do mesmo. Uma outra dificuldade apontada esteve relacionada com a opção que tomou, quanto à sequenciação de lecionação dos conteúdos estatísticos, inerentes às distribuições bidimensionais. A professora explicou que não deveria ter tomado essa opção contrária à decidida e discutida em reunião de equipa colaborativa.

Na segunda tarefa de modelação, foi notório que Patrícia tomou consciência das dificuldades das suas alunas e das suas próprias dificuldades durante a condução da aula anterior, tendo pensado nesta tarefa de forma a minimizar alguma confusão na lecionação dos conteúdos da aula anterior. Patrícia superou essas dificuldades, tendo tido mais atenção acerca dos conhecimentos matemáticos das suas alunas sobre Funções e assim reformulando esta segunda tarefa. Essa reflexão fê-la estruturar e direccionar mais a tarefa para o que pretendia (construção do modelo de regressão linear) e ter colocado, quer no enunciado da tarefa, quer durante a condução da aula, questões que facilitaram a testagem do modelo de regressão linear obtido.

Durante a entrevista realizada após a última aula de modelação, Patrícia reconheceu a dificuldade na forma como conduziu as aulas e que, segundo ela, possa ter condicionado a consolidação e aquisição de alguns conteúdos relacionados com as distribuições bidimensionais.

Capítulo 8 – Conclusões

Este capítulo organiza-se em quatro secções. Na primeira faço uma breve síntese dos aspetos fundamentais deste estudo; na segunda apresento as conclusões do estudo, dando resposta às três questões orientadoras de investigação com base na análise transversal proporcionada pelos casos; na terceira apresento uma reflexão sobre uma proposta de um *framework* do conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação com recurso a distribuições bidimensionais e, por último, termino com algumas considerações finais, destacando o papel do trabalho colaborativo.

Breve síntese do estudo

Este estudo sobre o conhecimento para ensinar Estatística com recurso a tarefas de modelação, desenvolvido num contexto de trabalho colaborativo, enquadra-se no quadro de investigações sobre o professor. Dessas investigações salienta-se a evolução da prática de ensino do professor relativamente à preparação, condução e reflexão sobre a sua prática quando inserido em equipas de trabalho colaborativo. Essa prática é facilitada por estar integrada num ambiente de partilha e reflexão, constituindo um ponto de partida para a evolução do conhecimento profissional dos professores (Llinares & Krainer, 2006; Mewborn, 2003). A colaboração (Hiebert, Gallimore, & Stigler, 2002; Ruthven & Goodchild, 2008) constitui um meio que pode ajudar a perceber o modo como os professores mobilizam esse conhecimento e como este evolui.

A modelação matemática tem vindo a ganhar importância no ensino da Matemática. No NCTM (1991) recomenda-se que todos os alunos: “apliquem o processo de modelação matemática a situações problemáticas do mundo real” (p. 163). A modelação, ao ser essencialmente entendida como um processo, é descrita, usualmente, através de um esquema: o ciclo da modelação (Ferri, 2006). Os vários programas enfatizam a implementação de tarefas de modelação matemática ganhando destaque no programa de Matemática para o ensino secundário profissional (ME, 2004). Embora já desde algum tempo a Estatística esteja presente no programa de Matemática, nem todos

os professores lhe dão a importância que esta tem na sociedade e muitas vezes não a abordam com a devida importância que deveria ter. Relativamente às distribuições bidimensionais, vários autores referem a complexidade do ensino e aprendizagem sobre dados e relações bivariadas (Engel & Sedlmeier, 2011; Estepa & Batanero, 1996; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Mugabe, Fernandes & Correia, 2012). Alguns autores (Burgess, 2007; Groth, 2007) assinalam diferenças entre a Estatística e a Matemática, argumentando a favor da necessidade de quadros do conhecimento profissional dos professores distintos para a Matemática e para a Estatística (Groth, 2007).

O objetivo deste estudo foi identificar e interpretar o conhecimento específico para ensinar Estatística evidenciado por professoras de Matemática do ensino profissional de diversos cursos no quadro de uma experiência de ensino, com recurso a tarefas de modelação que envolvem distribuições bidimensionais, desenvolvida em contexto colaborativo.

Para conseguir identificar e interpretar o conhecimento para ensinar Estatística evidenciado pelas professoras foi concebido como referência um quadro de análise, definido no capítulo de revisão de literatura, que cruza as fases do ciclo de modelação (Ferri, 2006) com os vários tipos de conhecimento estatístico para ensinar propostos por Groth (2007) e que neste estudo, como anteriormente explicado, foram denominados por conhecimento para ensinar Estatística. Este quadro fez emergir os conceitos de conhecimento matemático e não matemático como, por exemplo, o conhecimento dos contextos, bem como os conceitos de conhecimento comum e especializado, sendo o primeiro detido por qualquer pessoa com formação matemática e o segundo específico de quem leciona esta disciplina.

Assim, como questões orientadoras do estudo elegeram-se as seguintes:

- Como se caracteriza o conhecimento para ensinar Estatística revelado pelas professoras na prática de ensino com tarefas de modelação estatística?
- Que conhecimento para ensinar Estatística se evidencia nas diferentes fases de desenvolvimento das tarefas de modelação estatística exploradas pelas professoras em sala de aula?
- Que dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística se evidenciam na preparação, condução e reflexão de aulas de modelação estatística pelas professoras?

Neste estudo, optou-se pelo paradigma interpretativo, de natureza qualitativa, seguindo o design de estudo de caso (Yin, 2003) relativo a duas professoras que lecionaram o 10.º ano de escolaridade do ensino profissional. A recolha de dados recorreu à observação participante de aulas e sessões de trabalho colaborativo; a entrevistas iniciais, finais, pré e pós aula a cada professora; e à recolha de materiais produzidos pelas professoras, incidindo sobre tarefas de modelação criadas pelas professoras, incluindo o surgimento da ideia, a elaboração das questões, a sua preparação e condução em sala de aula e reflexão sobre a aula. A análise dos dados procurou desocultar os diferentes tipos de conhecimento usados pelas professoras e identificar os seus pontos fortes e fracos.

As duas professoras, Sara e Patrícia, tinham, até ao início deste estudo, percursos bastante semelhantes e eram ambas professoras contratadas, tendo lecionado em várias escolas. Sara, com 29 anos, tinha 4 anos de serviço e já lecionado quase todos os níveis de ensino, inclusive o ensino secundário profissional. Patrícia, com 33 anos, tinha 9 anos de serviço e já lecionado todos os níveis de ensino, à exceção de Matemática Aplicada às Ciências Sociais e o ensino secundário profissional, até ao início deste estudo. Quando o trabalho de equipa começou conheciam muito pouco sobre modelação matemática e nunca tinham criado tarefas de modelação adaptadas a contextos reais. Ambas pesquisaram e aprofundaram o seu conhecimento sobre os contextos relacionados com a área profissional dos seus alunos, recorreram ao uso do EXCEL e criaram tarefas de modelação sobre as distribuições bidimensionais.

Conclusões gerais

Nesta secção apresento as conclusões do estudo que se organizam de acordo com as três questões de investigação: a primeira foca-se nas características do conhecimento para ensinar Estatística revelado na prática de ensino com tarefas de modelação; na segunda identifico e caracterizo os vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística revelado nas diferentes fases de desenvolvimento das tarefas de modelação estatística; na última, concluo acerca das dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que se evidenciaram na preparação, condução e reflexão das aulas de modelação estatística. As conclusões apresentadas têm por base a comparação entre os dois casos,

identificando o que existe em comum e o que se distingue nos casos das professoras, estabelecendo relações com o quadro teórico que baliza o estudo.

Características do conhecimento para ensinar Estatística revelado na prática de ensino com tarefas de modelação

Os quatro tipos de conhecimento foram convocados por ambas as professoras em distintas fases do processo de modelação estatístico, revelando-se robustos, de um modo geral, na compreensão da representação real e na obtenção de resultados matemáticos. Nas outras fases de modelação, parece existir maior fragilidade, com maior número de constrangimentos no conhecimento matemático.

Em ambas as professoras, verificou-se que o conhecimento do contexto foi reforçado pelo contacto direto com a realidade, permitindo o envolvimento dos alunos e tendo em conta a sua área profissional e interesses.

Destaca-se a fragilidade do conhecimento matemático em muitas situações e a robustez do conhecimento não matemático, que muitas vezes parece ter vindo em auxílio do conhecimento matemático, evitando conclusões e aprendizagens menos incorretas. Sem se aperceberem, as professoras usaram uma linguagem algo confusa. No entanto, o conhecimento não matemático permitiu que os alunos compreendessem o que as professoras pretendiam que investigassem com as tarefas. Embora não tivessem aprendido como usar corretamente os termos associação e correlação, perceberam o que era para estudar e conseguiram interpretar resultados. Outros exemplos serão explicados ao longo dos vários tipos de conhecimento.

Conhecimento comum matemático. As professoras demonstraram nem sempre estar à vontade com alguns conceitos estatísticos, desconhecendo alguns aspetos relacionados com as distribuições bidimensionais, reforçando o que mencionam alguns autores quanto à complexidade inerente ao ensino destes conteúdos (Engel & Sedlmeier, 2011; Estepa & Batanero, 1996; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Mugabe, Fernandes & Correia, 2012).

Começando com o que é comum às duas professoras, podemos dizer que identificaram, com facilidade, variáveis a partir de um dado contexto real. Para além disso, ambas revelaram compreender que para se testar um modelo matemático, se devem efetuar cálculos para determinar previsões no intervalo de possibilidade e reconheceram

a importância da equação da reta de regressão linear para prever resultados (ME, 2001a, 2001b), assim como as equações de outros modelos de regressão. Demonstraram também saber, que a associação entre duas variáveis pode não ser linear e o conjunto dos dados pode seguir outra tendência (Martins, 2005). Outros aspetos deste tipo de conhecimento revelaram-se frágeis. Evidenciaram um uso não consistente dos termos associação correlação, quer na preparação das tarefas, quer durante a condução das aulas. As professoras demonstraram não saber que o cálculo do coeficiente de correlação linear mede o grau da intensidade da associação linear entre duas variáveis e não de uma associação não linear (Martins, 2005). Muitas vezes, referiram-se ao coeficiente de correlação linear quando pretendiam determinar a raiz quadrada do valor do coeficiente de determinação de um modelo de regressão não linear. Na fase de validação dos modelos, não reconheceram a importância da necessidade de procurarem outros modelos matemáticos, no caso de ser refutado o inicial.

Existiram algumas diferenças entre as duas professoras. Sara revelou saber, quer na forma como pensou nas questões que colocou nas tarefas, quer na forma como conduziu as aulas, que os resultados matemáticos obtidos a partir dos modelos matemáticos correspondem a possibilidades e não a generalizações (Burgess, 2007). Com Patrícia, este aspeto nem sempre foi evidente. No entanto, Patrícia parece dar maior importância ou referir-se a mais conteúdos relacionados com os dados bivariados do que Sara. Patrícia, em todas as tarefas, revelou saber que a observação a partir da representação gráfica dos dados permite saber qual a associação que pode existir entre duas variáveis (Martins, 2005; Veaux *et. al.*, 2004) e, no caso, da associação linear, qual o seu grau de intensidade, ao relacionar com o valor do coeficiente de correlação. Na segunda e terceira tarefas de modelação de Patrícia, as questões colocadas evidenciaram que a professora compreendeu que a representação gráfica dos dados pode revelar padrões e relações existentes escondidas nos dados, informação esta que pode não ser perceptível a partir de tabelas ou de dados originais (Estepa, 2008; Martins, 2005). Na primeira aula de modelação, Patrícia evidenciou dar destaque a conteúdos que Sara não deu. Por exemplo, referiu-se aos mínimos quadrados, explicando que se a reta tivesse outro aspeto, a soma das várias distâncias dos pontos à reta seria maior. Também aproveitou para referir que a reta de regressão linear contém sempre um ponto, denominado por centro de gravidade, aspeto este nunca referido por Sara. Sara demonstrou compreender que, por vezes, os alunos consideram apenas a existência de associação entre duas variáveis,

quando o sinal do coeficiente de correlação linear é positivo, rejeitando a associação inversa como algo pouco aceitável (Estepa, 2008; Estepa & Batanero, 1995), indo ao encontro do que a investigação diz (Ben-Zvi & Arcadi, 2001) relativamente às dificuldades identificadas por parte dos alunos em lidar com a covariação negativa, isto porque são contraditórias às crenças prévias sobre a possível relação entre duas variáveis. Este fenómeno é designado por “correlação ilusória” (Chapman & Chapman, 1982) e tem origem na experiência e no contexto do aluno e é usado frequentemente na interpretação de dados e contextos que o rodeiam.

A fragilidade evidenciada pelas duas professoras neste tipo de conhecimento foi influenciar o conhecimento especializado matemático, pois ao preparar as questões sobre a escolha de um dado modelo matemático partiram sempre do pressuposto que o melhor modelo matemático seria aquele cujo valor absoluto do coeficiente de correlação linear fosse o maior. No entanto, nem sempre os modelos matemáticos eram representados por uma equação cuja função era afim e, como tal, ao determinarem a raiz quadrada do valor do coeficiente de determinação, o valor encontrado não era o coeficiente de correlação linear. Muitas vezes também se referiram a correlação e a associação entre duas variáveis como significasse o mesmo, usando um termo ou outro indistintamente.

Note-se que o uso de conhecimento matemático comum é essencial na fase de construção do modelo matemático e matematização, embora afete de forma determinante a fase de interpretação dos resultados do modelo. Se a construção do modelo matemático não for bem realizada ou se as previsões a partir desse modelo não forem corretas devido a uma incorreta manipulação da equação do modelo de regressão poderá comprometer a validade dos resultados matemáticos e as interpretações não serem as esperadas. No entanto, o conhecimento do contexto parece vir em auxílio para que as interpretações realizadas sejam corretas, pois mesmo que a equação do modelo de regressão não seja trabalhada corretamente e existam erros de cálculos, se a realidade ou contexto for conhecida, é mais fácil antecipar se aqueles resultados são possíveis. Será mais fácil identificar possíveis erros de cálculo, se o modelo é ou não o mais adequado, ou ainda quais são os limites desse modelo matemático, tendo em conta o contexto.

Conhecimento comum não matemático. Este conhecimento revelou-se robusto nas várias fases das tarefas e de modelação. As professoras revelaram um bom domínio deste conhecimento, conhecendo detalhes da realidade a estudar. Isto ficou a dever-se ao facto de num momento anterior ter havido contacto com o terreno e as professoras terem

aprofundado o seu conhecimento sobre a área profissional dos alunos, procurando assim temas de interesse e apelativos para os alunos (Kaiser & Maaß, 2007; Burak, 2004; Fuller, 2001; Pires, 2001; Matos & Carreira, 1994; Niss, 1992). Deste modo, compreenderam como construir instrumentos de recolha de dados e operacionalizar essa recolha com os alunos, tal como Wodewotzki e Jacobini, (2005) defendem. A construção do questionário e a contribuição das professoras e alunos permitiu a envolvimento destes na recolha de dados (Wodewotzki & Jacobini, 2005) e na compreensão da situação, enriquecendo todo o ciclo investigativo (Wild & Pfannkuch, 1999; Shaugnessy 2007) e levando à formulação do problema de investigação estatística. Como indicam Makar e Fielding-Wells (2010) esta formulação do problema a estudar constituiu a base fundamental para o trabalho a realizar. Por exemplo, Sara após perceber que os seus alunos pretendiam realizar uma gincana, construiu, conjuntamente com eles, tabelas de registo de tempos e pontuações dos jogos. Patrícia pesquisou sobre o Índice de Massa Corporal (IMC) e causas de baixo peso na infância e construiu uma tabela que permitia interpretar o IMC. Para além disso, ambas construíram um questionário sobre as características físicas, motoras e hábitos das crianças da amostra a fim recolherem dados reais. Durante as tarefas, as professoras demonstraram saber construir tabelas, diagramas de dispersão e modelos matemáticos a partir dos diagramas de dispersão, com recurso ao EXCEL. Sara e Patrícia, a partir dos resultados matemáticos demonstraram serem capazes de interpretá-los e criticá-los, tendo em conta a realidade. Durante a condução das aulas, as professoras demonstraram saber que se deve proceder à “limpeza de dados” (Martins & Ponte, 2010; Wild & Pfannkuch, 1999), pois havia casos em que, ou as crianças não tinham realizado os jogos todos ou não tinham respondido a todas as questões do questionário. Tal como Makar e Fielding-Wells (2011) defendem, estas professoras conseguiram orientar facilmente o trabalho dos alunos, reconhecendo oportunidades para aprendizagens significativas durante a discussão entre estes, relativa a problemas surgidos a partir da recolha de dados. Perceberam que se para cada criança, e caso pretendessem relacionar variáveis, os dados não tivessem completos, ao organizarem os dados em tabelas estas ficariam com espaços vazios e os modelos matemáticos construídos estariam incorretos.

Poucas diferenças são encontradas entre as duas professoras. Patrícia usou o EXCEL, como ferramenta auxiliar no cálculo de valores a partir dos modelos matemáticos para fazer previsões, reconhecendo esse recurso ao seu dispor útil para o

analisar (Kerr & Maki, 1979; Ponte, 1992); enquanto que Sara não o fez, tendo feito os cálculos analiticamente ou com recurso a uma calculadora.

Conhecimento especializado matemático. Este conhecimento foi convocado em várias fases das tarefas e do ciclo de modelação, revelando-se umas vezes robusto, mas na maioria das situações foi frágil e influenciado pela fragilidade do conhecimento comum matemático. Quanto ao primeiro caso, ambas as professoras incitaram os alunos a observarem os dados reais e a estabelecerem, a partir desse “olhar”, relações entre as várias variáveis surgidas (Batanero & Diaz, 2004; Ferri, 2006), contrariando o que dizem alguns autores sobre a complexidade inerente ao estabelecimento de relações a partir dos dados (Engel & Sedlmeier, 2011; Estepa & Batanero, 1996; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Mugabe, Fernandes & Correia, 2012). Conseguiram colocar questões no sentido de clarificarem o significado do x e do y , levando os alunos a interpretá-los e a compreenderem como trabalhar com os modelos matemáticos. Souberam como conduzir as aulas, estabelecendo diálogos, de modo a que não surgissem interpretações erradas a partir dos resultados matemáticos obtidos. Colocaram questões desafiadoras no sentido de os alunos assumirem um papel mais ativo na sua aprendizagem (Stein & Smith, 1998). As questões iniciais foram abertas e ricas, relacionadas com a sua área profissional e conduziram ao estabelecimento de conjeturas e formulação do problema em estudo Heaton e Mickelson (2002).

Relativamente ao que foi comum às duas professoras e se revelou mais frágil, podemos dizer que nenhuma das duas usou, como exemplo introdutório ao estudo das distribuições bidimensionais, uma tabela com dados reais das situações conhecidas, mas sim uma escolhida a partir de um manual, evidenciando que a sua prática usual era essa. O conhecimento comum matemático, relativamente ao desconhecimento de que o coeficiente de correlação linear mede apenas a associação linear entre duas variáveis, interferiu no conhecimento especializado comum das duas professoras (Martins, 2005) pois, durante a condução das aulas e mesmo na forma como as questões estavam redigidas no enunciado da tarefa, revelou que a justificação da escolha dos modelos matemáticos de regressão não linear se baseou no valor da raiz quadrada do coeficiente de determinação, como se do coeficiente de correlação linear se tratasse.

Por vezes, as professoras colocaram questões pertinentes sobre a associação possível entre as duas variáveis estudadas, valorizando a representação gráfica e encarando-a como uma boa oportunidade para dar a entender que os resumos numéricos

de dados não são suficientes para captar todas as características da relação entre duas variáveis (Estepa, 2008).

Foram contudo encontrados aspetos diferenciadores entre as duas professoras. Por exemplo, contrariamente ao que Patrícia fez, Sara não reconheceu, em algumas situações de aula, a necessidade de questionar os alunos sobre em que condições, ou para que amostra determinado modelo poderia ser válido. Numa das tarefas surgiram *outliers* e Sara não explorou essa situação quando um dos alunos referiu que existia um ponto que parecia estar a “fugir” dos outros (Martins, 2005). Ela não aproveitou a intervenção do aluno e não colocou questões que permitissem estudar a influência da eliminação desses pontos na reta de regressão linear e no valor do coeficiente de correlação linear, revelando que ou não atribui importância a este aspeto, ou não o fez por desconhecimento ou por nunca ter trabalhado estas situações em sala de aula e não fazer parte da prática usual. Pareceu existir alguma inexperiência na abordagem destes conteúdos em sala de aula. Sara revelou nem sempre estar preparada para responder às necessidades e intervenções dos seus alunos, ideia esta defendida por Pacheco (1996) e Kraemer (2008) não tirando o máximo proveito de oportunidades de ensino não planeadas surgidas no decurso das interações educativas, cujas concretizações exigiam preparação.

No caso de Patrícia, embora os modelos surgidos tenham sido escolhidos à semelhança de Sara a partir do valor do coeficiente de correlação linear, com base no conhecimento não matemático, ela conseguiu colocar questões e alguns modelos foram interpretados como válidos ou não e em que condições. Algumas situações ou intervenções correram menos mal porque parece que o conhecimento não matemático veio em auxílio do conhecimento matemático.

Contrariamente ao que Patrícia fez, Sara evidenciou preocupação quanto às dificuldades e aprendizagens anteriores dos seus alunos. Apelou aos conhecimentos já anteriormente lecionados sobre funções polinomiais, demonstrando que pensou numa forma de abordar o que pretendia ensinar e tendo em consideração o que os alunos já conheciam. Patrícia não teve em conta as dificuldades e aprendizagens anteriores das suas alunas, porque ao solicitar, na primeira tarefa, vários modelos matemáticos, não revelou ter previsto que as alunas não conheciam as funções que poderiam surgir. Por exemplo, as alunas construíram um modelo exponencial, desconhecido para si. Patrícia no enunciado da tarefa não sugeriu modelos conhecidos pelas alunas (polinomiais), optando por fazê-lo durante a condução da aula. As alunas escolheram o modelo de regressão

linear e emergiu outra dificuldade na fase de testagem do modelo. As alunas, oriundas de CEF, não se lembravam ou não conheciam a fórmula resolvente, causando algum impasse na fase de obtenção de resultados. Patrícia acabou por fornecer às alunas os resultados. Estas alunas, pouco habituadas a tarefas mais exigentes, exerceram pressão sobre a professora, através de pedidos de ajuda (Stein & Smith, 1998). Esta pressão pode levar o professor a mostrar como se faz e tem como consequência, muitas vezes, transformar um desafio que exige raciocínio, numa tarefa de baixo nível cognitivo, que pode traduzir-se na simples aplicação de um procedimento. Neste sentido, esta tarefa não teve o grau cognitivo que era esperado.

Patrícia optou por uma determinada sequência de lecionação dos conteúdos, inerentes às distribuições bidimensionais, contrária ao que tinha sido decidido em equipa de trabalho colaborativo, o que suscitou alguma dificuldade de aprendizagem. Patrícia demonstrou ter selecionado uma sequência de conteúdos que não corresponderam às necessidades e aprendizagens das alunas, revelando não estar preparada para os constrangimentos surgidos. Para Kraemer (2008), por um lado, os professores têm, quotidianamente e ao longo do ano letivo, a responsabilidade de selecionar e conceber experiências de aprendizagem baseadas nos conteúdos dos programas e, por outro lado, têm de estar preparados para responder às necessidades e interesses dos seus alunos, ideia esta também defendida por Pacheco (1996) e para tirar o máximo proveito de oportunidades de ensino não planeadas que possam surgir no decurso das interações educativas, pelo que conseguir concretizar estes aspetos exige preparação. A planificação de uma experiência de ensino tem que ter em consideração diversos fatores que a podem influenciar. Segundo Kraemer (2008, p. 5), o professor tem que:

- (i) determinar o que é que os alunos podem aprender num determinado momento, a partir daquilo que eles já sabem e já fazem (conteúdos matemáticos a aprender); (ii) selecionar e/ou criar atividades e tarefas e encadeá-las umas nas outras de tal maneira que os alunos possam atingir os objetivos que o professor fixou para eles; e (iii) explicitar aquilo que os alunos vão descobrir/aprender nestas condições e como o vão fazer (aspeto teórico e metodológico da planificação).

O facto de ter pedido vários modelos de regressão distintos, suscitou os constrangimentos já descritos anteriormente, levando a que na próxima tarefa retomasse a sequência inicialmente acordada.

Em síntese, existiu alguma fragilidade na abordagem das distribuições bidimensionais em sala de aula, quer na forma como prepararam as aulas, quer na forma como as conduziram, isto porque a abordagem destes conteúdos acarretou alguma complexidade e o conhecimento comum matemático sobre estes conteúdos carece de aprofundamento.

Conhecimento especializado não matemático. Este conhecimento revelou-se robusto nas várias fases das tarefas e ciclo de modelação. As professoras atribuíram importância ao conhecimento dos alunos sobre os contextos, tendo-os a conduzindo à construção da representação real. Usaram fotografias ou imagens do registo direto da situação, introduziram nas tarefas diálogos dos seus alunos sobre conjecturas que foram estabelecendo à medida que contactavam com a realidade e excertos de artigos científicos, fazendo ver aos seus alunos a importância de terem recolhido os dados reais. Por exemplo, Sara usou fotografias do dia da gincana e Patrícia colocou, no enunciado escrito da tarefa, uma tabela sobre o IMC onde ensinava a preencher e a interpretar. Tal como estas professoras fizeram, Wodewotzki e Jacobini (2005) enfatizam que para a compreensão e construção do pensamento estatístico o estudo não deve ser feito isoladamente; é importante que seja trabalhado com dados reais, relevantes para os estudantes e, principalmente, obtidos por eles mesmos. Esta ideia foi ao encontro do que se pretendeu com este estudo, pois o objetivo foi ensinar tópicos de Estatística através da modelação matemática e que fossem os próprios alunos, a partir das suas motivações e necessidades (Heaton & Mickelson, 2002), face ao curso profissional em que estavam integrados, a organizar atividades em contextos profissionais que levassem à recolha de dados reais e ao surgimento de variáveis que pudessem conduzir ao estudo de relações por eles lançadas a partir da formulação de problemas e conjecturas. Esta ideia também é defendida por Burak (2004), pois, segundo este autor, a modelação matemática vai ao encontro das expectativas do aluno, por dar sentido ao que ele estuda e por satisfazer esses interesses e motivações. O aluno passa a trabalhar com mais entusiasmo e perseverança, desenvolvendo atitudes positivas e gosto face à Estatística. O facto de relacionarmos a aprendizagem da Estatística com o contexto e motivações do aluno poderá ser um meio facilitador da aprendizagem.

Ambas as professoras ensinaram os seus alunos a usarem corretamente o EXCEL na construção de tabelas, diagramas de dispersão e modelos matemáticos. Durante a condução das aulas, colocaram questões no sentido de os alunos entenderem se, a partir

dessas tabelas, os modelos matemáticos estavam ou não bem construídos. Na construção das tabelas, alertaram para que usassem, no EXCEL, a vírgula em vez do ponto na representação decimal de números. O EXCEL foi usado como recurso, por ambas as professoras, para ensinar os alunos a fazerem substituições no modelo matemático escolhido e a obterem resultados matemáticos. O EXCEL foi uma ferramenta importante em todo o ciclo de modelação e durante as aulas. Permitiu uma abordagem mais rápida e eficaz dos conteúdos inerentes às distribuições bidimensionais, permitindo a construção de vários modelos matemáticos simultâneos, estabelecendo uma comparação mais intuitiva por parte dos alunos a partir da representação gráfica que tinham. Este recurso e o acesso aos dados reais forneceram a estas professoras novas abordagens informais para os dados, usando contextos ricos e significativos para estes alunos (Ben-Zvi *et. al.*, 2012), como os proporcionados pelas tarefas de modelação estatística. O EXCEL funcionou como instrumento de apoio a estes alunos na exploração e análise de dados, na resolução de problemas estatísticos envolvendo dados reais e na compreensão de conceitos complexos e ideias estatísticas, com o objetivo de desenvolver o seu raciocínio estatístico (Ben-Zvi, 2006; Ben-Zvi & Garfield, 2004).

Sara e Patrícia demonstraram saber colocar questões interessantes, que surgiram a partir do conhecimento da realidade, apelando à comparação entre as conjecturas inicialmente estabelecidas provenientes da observação direta da realidade e do senso comum, com as interpretações emergentes dos resultados matemáticos. As questões iniciais colocadas motivaram os alunos, tiveram em conta a sua área profissional e interesses e conseguiram respondê-las (Makar & Fielding-Wells, 2010). Muitas questões foram abertas, estatisticamente ricas, com conteúdo apropriado aos alunos e relacionadas com outras áreas do saber. Podemos dizer que, contrariamente ao que a investigação refere, todos estes aspetos foram valorizados pelas professoras (Heaton & Mickelson, 2002).

Os contextos reais e o contacto com a realidade foram reconhecidos de extrema importância para a interpretação adequada dos resultados matemáticos obtidos, assim como na construção da representação real da situação, construção de modelos e validação. O conhecimento do contexto pode ser reforçado com o contacto direto com os contextos das situações e isso é possível fazer-se com os próprios alunos, atendendo aos seus interesses e áreas profissionais (Makar & Fielding-Wells, 2010). Este facto vai ao encontro de Gal e Garfield (1997) que defendem que a Estatística possibilita aos alunos

a compreensão e o saber lidar com a incerteza, variabilidade e informação estatística existente no dia-a-dia e, desta forma, contribuindo para a produção, interpretação e comunicação de dados de problemas com que se deparam na sua vida profissional.

O conhecimento não matemático foi reforçado com a envolvimento dos próprios alunos na procura das situações problemáticas a estudar, na recolha de dados reais (Wodewotzki & Jacobini, 2005) e em todas as fases do ciclo de modelação e fases das tarefas, tal como enfatizam Shaughnessy e Burgess (2007). Para além disso, parece ter auxiliado o conhecimento matemático, promovendo momentos de reflexão e discussão em sala de aula, que minimizaram a aprendizagem menos correta destes conteúdos.

Conhecimento para ensinar Estatística nas diferentes fases de desenvolvimento das tarefas de modelação estatística

A seguir destaco os conhecimentos que foram evidenciados como robustos e os que estiveram mais frágeis ao longo de cada fase do ciclo de modelação, procurando o que se manifestou comum e distinto entre as professoras.

Construção da representação real. Nesta fase de modelação, todos os tipos de conhecimento revelaram-se robustos e comuns às duas professoras, à exceção do conhecimento especializado não matemático.

As professoras conseguiram: identificar variáveis a partir de um dado contexto (conhecimento comum matemático); pesquisar e aprofundar sobre a área profissional dos seus alunos e construir instrumentos que permitiram recolher dados reais (Wodewotzki & Jacobini, 2005) a partir de jogos e questionários (conhecimento comum não matemático), procurando assim temas de interesse e apelativos para os seus alunos (Kaiser & Maaß, 2007; Burak, 2004; Fuller, 2001; Pires, 2001; Matos & Carreira, 1994; Niss, 1992); e incentivar os alunos a observarem os dados e assim estabelecerem relações entre as variáveis (Batanero & Diaz, 2004; Ferri, 2006). As questões iniciais foram abertas e ricas, relacionadas com a sua área profissional e conduziram ao estabelecimento de conjecturas e formulação do problema em estudo (Heaton & Mickelson, 2002) (conhecimento especializado matemático).

Relativamente ao conhecimento especializado não matemático e dada a natureza de cada curso profissional, cada professora manifestou evidências distintas, mas com o mesmo objetivo. Sara usou fotografias do registo direto da situação como uma forma de

levar à compreensão real da situação (Ferri, 2006). Patrícia deu importância ao conhecimento das alunas sobre contextos da situação em estudo, relacionados com crianças do pré-escolar, ensinou a interpretar e usar uma fórmula sobre o cálculo do IMC e uma tabela que permitia compreender o estado físico de uma pessoa dado o seu IMC.

Construção do modelo real. Nesta fase, o conhecimento não matemático foi robusto, mas o conhecimento matemático manifestou alguma fragilidade para ambas as professoras.

Quanto ao conhecimento não matemático, as evidências foram comuns às duas professoras que revelaram saber: construir tabelas e diagramas de dispersão com recurso ao EXCEL (conhecimento comum) valorizando a tecnologia ao adotar abordagens informais orientadas para os dados, usando contextos ricos e significativos para os alunos, como os proporcionados pelas investigações estatísticas (Ben-Zvi *et al.*, 2012); e reconhecer possíveis incorreções dos alunos relativamente à construção dos gráficos e tabelas e proporcionarem oportunidade de esclarecimento apelando ao conhecimento da situação real, ensinando estes, a usar corretamente o EXCEL na construção das tabelas, de modo a garantir o sucesso dos mesmos e dando sentido aos dados (Burgess, 2007) (conhecimento especializado).

Relativamente ao conhecimento matemático, existiram alguns aspetos comuns e outros distintos entre as duas professoras. Começando com o que foi comum, estas professoras revelaram na construção do modelo real, um uso não consistente dos termos correlação e associação (conhecimento comum) e não usaram, como exemplo introdutório ao estudo das distribuições bidimensionais, uma tabela com dados reais, mas sim uma escolhida a partir de um manual (conhecimento especializado). No entanto, tiveram o cuidado de conduzir os alunos à formulação do problema da investigação estatística (Makar & Fielding-Wells, 2010), colocando questões iniciais desafiadoras, relacionadas com a sua área de interesse e alcançáveis de serem resolvidas, facilitando assim a construção do modelo real.

Foram tomadas opções distintas na sequenciação da leção dos conteúdos inerentes às distribuições bidimensionais e destacados alguns aspetos que Sara não deu importância e Patrícia enfatizou nas suas aulas. Patrícia optou por uma determinada sequência de leção dos conteúdos inerentes às distribuições bidimensionais, que suscitaram alguma dificuldade de aprendizagem. Essa opção foi contrária a que Sara tomou e que tinham acordado em sessão de trabalho colaborativo. A atividade de ensino

inclui uma sequência organizada de tarefas ou atuações, cujo principal objetivo é a aprendizagem de determinados conteúdos pelos alunos (Pacheco, 2001), e que no caso de Patrícia não se revelou eficaz (conhecimento especializado). Patrícia reconheceu a importância da representação gráfica dos dados na identificação de relações ou padrões entre duas variáveis, dando-lhe maior destaque do que Sara (Garfield & Ben-Zvi, 2008) (conhecimento comum).

Construção do modelo matemático. Nesta fase, o conhecimento não matemático revelou-se robusto, mas o conhecimento matemático manifestou alguma fragilidade, quer nos conteúdos estatísticos que revelaram não estar bem clarificados, quer na forma como prepararam ou conduziram as aulas.

Quanto ao conhecimento não matemático, as professoras demonstraram saber: usar o EXCEL na construção de vários modelos matemáticos (conhecimento comum); ensinar a usar o EXCEL, na construção de vários modelos matemáticos a partir dos diagramas de dispersão, facilitando o trabalho dos alunos através de uma abordagem experimental indutiva da matemática (Matos, 1997); colocar questões desafiadoras no sentido dos alunos assumirem um papel mais ativo na sua aprendizagem (Stein & Smith, 1998) e questões abertas e estaticamente ricas relacionadas com a sua área profissional de modo a entenderem, a partir da mobilização do conhecimento extra matemático (Ferri, 2006) se, a partir das tabelas, os modelos matemáticos estavam ou não bem construídos (conhecimento especializado).

No que concerne ao conhecimento matemático e que se manifestou comum às duas professoras, surgiram alguns constrangimentos. As professoras demonstraram desconhecer que o coeficiente de correlação linear mede apenas a associação linear entre duas variáveis e não outra (Martins, 2005) interpretando que o melhor modelo de regressão (linear ou não) é aquele cujo valor do coeficiente de correlação linear é o maior (conhecimento comum), quando nem faz sentido calculá-lo se a associação não for linear (Martins, 2005); (conhecimento comum). O conhecimento comum influenciou o conhecimento especializado, porque durante a condução das aulas, questionaram os alunos sobre o grau de intensidade da associação não linear entre as variáveis, relacionando-o com a raiz quadrada do coeficiente de determinação, ao qual chamaram de valor do coeficiente de correlação linear. Existiram aspetos distintos, relacionados com situações de aula diferentes. Por exemplo, Sara não aproveitou o facto de existirem *outliers*, para colocar questões que permitissem estudar a influência da eliminação desses

pontos na reta de regressão linear e no valor do coeficiente de correlação linear (Martins, 2005; De Veaux *et. al.*, 2004), revelando que não atribuiu importância a este aspecto na exploração das aulas (conhecimento especializado). Patrícia, não teve em conta as dificuldades e as aprendizagens anteriores das alunas, porque ao solicitar vários modelos matemáticos não revelou ter previsto que as alunas não conheciam as funções que poderiam surgir (conhecimento especializado), evidenciando não ter previsto essas dificuldades, tal como sugere Ponte (2000).

Obter resultados matemáticos. Nesta fase de modelação, existem algumas diferenças relativamente às duas professoras. Para Sara, todos os tipos de conhecimento revelaram-se robustos, mas para Patrícia isso não aconteceu, nomeadamente no conhecimento especializado matemático.

Ambas as professoras revelaram saber: que se deve efetuar cálculos e testar o modelo matemático para determinar previsões no intervalo de possibilidades (conhecimento comum matemático); reconhecer que as previsões devem ser solicitadas tendo em conta o contexto real e que se pode usar o EXCEL como ferramenta auxiliar no cálculo de valores a partir dos modelos matemáticos, assim como, reconhecer a importância dos contextos para entender o significado das variáveis (conhecimento comum não matemático); ensinar a usar o EXCEL, de modo a conduzir os alunos a fazerem substituições no modelo matemático escolhido e a obterem resultados matemáticos, sendo assim o computador reconhecido como um recurso decisivo para trabalhar com os alunos uma Matemática mais realista na medida em que se reduzem os obstáculos que têm a ver diretamente com o cálculo e operações rotineiras (Matos, 1997). Deste modo, valorizaram a tecnologia no apoio aos alunos na exploração e análise de dados, na resolução de problemas estatísticos envolvendo dados reais e na compreensão de conceitos complexos e ideias estatísticas, com o objetivo de desenvolver o seu raciocínio estatístico (Ben-Zvi, 2006; Ben-Zvi & Garfield, 2004) (conhecimento especializado não matemático).

Relativamente ao que foi distinto às duas professoras e no que concerne ao conhecimento especializado matemático, Sara colocou questões no sentido de clarificar o significado do x e do y , de modo a que alunos os conseguissem interpretar; e de compreender como trabalhar com o modelo matemático, levando a que os alunos usassem as ferramentas matemáticas ao seu dispor para o analisar (Kerr & Maki, 1979; Ponte, 1992). Patrícia, no entanto, na maior parte das vezes, explicou de imediato o significado

das variáveis, sem questionar as alunas. Patrícia não anteviu dificuldades das alunas, tal como Ponte (2000) sugere, na mobilização de conhecimentos matemáticos não consolidados e que já tinham sido lecionados por ela ou em anos anteriores quando tiveram de trabalhar matematicamente com o modelo matemático escolhido, suscitando alguns constrangimentos durante a condução das aulas.

Interpretar resultados matemáticos. Nesta fase, todos os tipos de conhecimentos revelaram-se robustos e na grande maioria comuns às duas professoras. Estas evidenciaram saber: que os resultados matemáticos obtidos são possibilidades num dado contexto e para determinada amostra e que o modelo matemático pode ter algumas limitações (Burgess, 2007) (conhecimento comum matemático); interpretar os resultados matemáticos obtidos a partir do que se conhece da realidade (Ferri, 2006) e tomar decisões informadas por eles (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Gal, 2002) (conhecimento comum não matemático); e como conduzir as aulas estabelecendo diálogos de modo a que não surgissem interpretações erradas a partir dos resultados matemáticos obtidos (conhecimento especializado matemático), monitorizando o trabalho dos alunos e levando à reflexão sobre a evolução da produção matemática e à exploração de novas ideias em discussão com os colegas (Ainley & Lutley, 2007). Neste caso, Patrícia ainda conduziu as alunas a fazerem previsões para outros valores no intervalo de possibilidades, de modo a criticarem os resultados. Reconheceram ainda a importância de conhecer os contextos reais para interpretar adequadamente os resultados matemáticos obtidos (Ferri, 2006), (conhecimento especializado não matemático), de modo a relacionar o conhecimento do contexto com o conhecimento estatístico relacionando os dados da situação com os dados obtidos (Wild & Pfannkuch, 1999), tirando partido dos dados e da tecnologia usada (Garfield & Ben-Zvi, 2010; Henriques & Oliveira, 2012).

Validação do modelo matemático. Nesta fase, as professoras revelaram alguma fragilidade na maioria dos conhecimentos e que foram comuns às duas professoras. Não reconheceram: a importância da necessidade de procurar outros modelos matemáticos no caso de refutar o inicial e nem (nas duas primeiras tarefas) que os valores obtidos a partir de um modelo conduzem a possibilidades para um certo contexto e amostra (Burgess, 2007) (conhecimento comum matemático); que o contexto real pode ser um indicador de um modelo matemático ser refutado em prol de outro, uma vez que não sentiram necessidade de construir outro, caso não se adequasse à amostra (conhecimento comum não matemático); e a necessidade de solicitar a construção de outro modelo matemático,

uma vez que na preparação das tarefas não colocaram essa questão (conhecimento especializado matemático). Para além destes aspetos comuns, Patrícia nem sempre reconheceu a necessidade de questionar as alunas sobre em que condições, ou para que amostra, determinado modelo poderia ser válido, deixando por explorar algumas situações surgidas durante a realização das tarefas (primeira e segunda tarefa). Contudo, foi notória uma evolução deste aspeto na terceira tarefa (conhecimento especializado matemático).

Como aspetos positivos e comuns às duas professoras destaca-se reconhecerem a importância do contexto real na validação dos modelos quando apelaram à comparação dos resultados com a conjectura inicialmente estabelecida (conhecimento especializado não matemático).

Em suma, as fases de modelação que evidenciaram maior fragilidade nos vários tipos de conhecimento e que foram comuns às duas professoras foram: a construção do modelo real, a construção do modelo matemático e a validação do modelo matemático. De fazer notar ainda, no caso de Patrícia, a fase que corresponde à obtenção de resultados matemáticos. Quanto às restantes fases, as professoras evidenciaram robustez nos vários tipos de conhecimento, embora emergja alguma fragilidade no conhecimento matemático. Destaca-se o facto de na fase da construção do modelo real e matemático ser necessário ser convocado um determinado tipo de conhecimento, conhecimento comum matemático e que nem sempre se manifestou robusto. Durante estas duas fases, este conhecimento é necessário porque implica que os professores sejam detentores de todos os conteúdos estatísticos que vão ensinar, assim como, saber como usar e aplicar os vários termos que fazem parte desta temática. Neste caso, foi notório que as professoras desconhecem em que situações é que devem usar alguns termos, havendo ainda alguma confusão entre alguns deles. A abordagem que foi feita sobre as associações não lineares levou a alguns destes constrangimentos, desconhecidos para as professoras, evidenciando que esta é uma parte da Estatística que não está bem clarificada. Muitas justificações dadas na escolha dos modelos matemáticos não foram as mais corretas. Questões que as professoras colocaram aos alunos não teve a terminologia mais adequada, o que levou a que o conhecimento especializado matemático tivesse sido influenciado pelo conhecimento comum matemático. Quanto à fase da validação dos modelos, o conhecimento especializado matemático manifestou-se frágil. As professoras não incitaram os alunos a procurar outro modelo, no caso de refutação do inicial, e alguns momentos de aula não

forma explorados no sentido de explorar o ciclo de modelação e este reiniciar-se. No entanto, o conhecimento do contexto (conhecimento não matemático) permitiu que os alunos e professoras compreendessem em que situações um modelo poderá ser válido e quais são as suas limitações, apresentando justificações válidas.

Dificuldades relativas ao conhecimento para ensinar Estatística que se evidenciaram na preparação, condução e reflexão de aulas de modelação estatística

Ao longo da preparação das tarefas, condução das aulas e reflexão realizada pelas duas professoras, foram evidentes dificuldades relativamente aos vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística. Algumas dificuldades foram superadas, mas outras passaram-lhes despercebidas e persistiram, nomeadamente no que diz respeito ao conhecimento comum matemático.

Podemos dizer que o que mais sobressaiu nas duas professoras foram as dificuldades inerentes ao conhecimento comum matemático, relacionadas com algum desconhecimento sobre os conteúdos estatísticos inerentes às distribuições bidimensionais. Ambas as professoras calcularam a raiz quadrada do coeficiente de determinação e referiram-se-lhe como sendo o valor do coeficiente de correlação linear, para associações que por vezes não eram lineares, desconhecendo o facto de esse valor só fazer sentido ser calculado, caso a associação entre duas variáveis seja linear (Martins, 2005). Este aspeto condicionou a condução das aulas e o ensino destes conteúdos, interferindo com o conhecimento especializado matemático. Para além disso, persistiu o uso não consistente dos termos relacionados com as distribuições bidimensionais, nomeadamente correlação e associação. Estas dificuldades não foram identificadas pelas professoras, porque elas não se aperceberam que desconheciam aspetos sobre esta temática, ficando assim por superar. O conhecimento comum matemático, que evidenciaram ter sobre estes conteúdos, interferiu na forma como formularam as questões no enunciado das tarefas e condução das aulas, levando a situações imprevistas com as quais tiveram de se confrontar e tentar resolver, nomeadamente quando os alunos tinham de optar por um modelo matemático, com base no que tinha sido ensinado pelas professoras. Essas dificuldades surgiram na fase de testagem dos modelos e na fase de validação. Relativamente à fase de testagem, essas dificuldades foram minimizadas porque o conhecimento não matemático permitiu compreender os resultados matemáticos obtidos, levando a conclusões para a amostra mais fiáveis.

Outra dificuldade comum às duas professoras esteve relacionada com a validação dos modelos matemáticos. Nem sempre a formulação escrita das questões ou a sua colocação em sala de aula conduziram à necessidade de procurarem um outro modelo, caso fosse refutado o inicial (Ferri, 2006). No entanto, ao longo das entrevistas pós aula, as professoras foram tomando consciência que, durante a fase de validação, devem explorar, no futuro, melhor esta fase e colocar questões que permitam conduzir a uma maior reflexão, por parte dos alunos, sobre a adequabilidade de dado modelo matemático e, caso seja refutado, tenham de construir outro. Neste sentido, parece ter havido uma evolução relativamente a esta dificuldade, havendo evidência da sua consciencialização e vontade de fazer diferente.

Outro aspeto comum e que evoluiu ao longo do contexto de trabalho colaborativo foram os conceitos de modelação matemática, tarefa de modelação e distinção entre modelo real e modelo matemático. Durante a fase de “pré-modelação”, ambas as professoras pensavam que o modelo matemático poderia ser uma tabela de frequências, por exemplo, mas à medida que os conteúdos foram sendo lecionados e as tarefas discutidas em equipa aperceberam-se que nem todas as tarefas permitiam o surgimento do modelo matemático. Houve uma evolução significativa sobre o que é modelação matemática e ambas superaram essa dificuldade. Neste aspeto, a fase de “pré-modelação” teve um papel preponderante na clarificação destes conceitos.

Quanto ao que se distingue entre elas, não há muito a apontar de significativo. Surgiram situações pontuais durante a condução das aulas, que foram distintas devido às especificidades de cada turma, curso ou tarefas. O que foi mais evidente esteve relacionado com a decisão de sequenciarem de modo distinto, a leção dos conteúdos relacionados com as distribuições bidimensionais. Patrícia tomou uma decisão contrária à da equipa colaborativa, trazendo-lhe alguns constrangimentos que ela tentou resolver ao longo da realização das várias tarefas. Para além disso, Patrícia ensinou ou referiu-se a mais conteúdos do que Sara, nomeadamente, mencionou a reta dos mínimos quadrados e o centro de gravidade, ao contrário de Sara que nunca se referiu a esses conceitos.

***Framework* relativo ao conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação com recurso a distribuições bidimensionais**

O quadro 17 resulta da reflexão realizada a partir do *Framework* adotado para identificar e interpretar os vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística das professoras participantes deste estudo, com tarefas de modelação no ensino das distribuições bidimensionais. O *Framework* usado inicialmente revelou-se adequado a este estudo e permitiu identificar os vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística revelado na prática de ensino e durante o desenvolvimento das várias fases do ciclo de modelação. Esses conhecimentos foram identificados a partir da preparação das tarefas em sessões de equipa colaborativa, da condução das aulas, das entrevistas de reflexão pré e pós aulas e das sessões de equipa colaborativa. No entanto, nem sempre foi fácil, em algumas das fases de modelação, identificar tipos de conhecimento distintos. Neste sentido, apresento agora uma nova proposta que agrega as fases de interpretação de resultados matemáticos e de validação do modelo matemático, passando o *Framework* a contemplar cinco fases ao invés de seis como inicialmente considerado. Ao serem interpretados os resultados matemáticos, ao serem comparados com a realidade, permitem compreender se o modelo matemático é ou não adequado e em que condições pode ser válido, justificando-se por tal a junção destas duas últimas fases de modelação na identificação dos vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística.

Quadro 17: *Framework* relativo ao conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação envolvendo distribuições bidimensionais

Fases de modelação	Tipos de conhecimento	Conhecimento matemático	Conhecimento não matemático
Construção da representação real	Comum	Reconhecer que podem emergir variáveis estatísticas a partir de contextos reais e ser capaz de as identificar.	Aprofundar o conhecimento sobre situações e temas em estudo. Saber construir instrumentos de recolha de dados.
	Especializado	Proporcionar oportunidades para incitar os alunos a estabelecerem relações a partir da “observação” direta da situação real.	Reconhecer eventual conhecimento dos alunos sobre o contexto da situação.
Construção do modelo real	Comum	Identificar associações lineares ou não entre duas variáveis estatísticas. Usar corretamente terminologia relativa às distribuições bidimensionais. Reconhecer a importância da “limpeza” dos dados na construção do modelo real.	Construir tabelas e diagramas de dispersão com recurso à tecnologia. Interpretar tabelas e diagramas de dispersão com base no contexto real.

		Reconhecer a importância da representação gráfica dos dados reais e concretizá-la.	
	Especializado	Reconhecer os dados reais como importantes na introdução dos conceitos estatísticos. Indagar acerca da “limpeza” dos dados e sua importância para a construção do modelo real. Questionar a partir da representação gráfica dos dados. Dar exemplos, nas tarefas, de tabelas que permitam ensinar a organizar os dados reais.	Identificar e ajudar nas dificuldades inerentes ao uso de recursos tecnológicos. Apelar, através da elaboração de questões, à correta construção dos modelos reais a partir do conhecimento da situação real.
Construção do modelo matemático	Comum	Reconhecer a adequabilidade da reta de regressão linear e/ou outros modelos de regressão não linear e escrevê-los na forma de função. Determinar o valor do coeficiente de correlação e apreciar o seu valor com vista a adoção de um modelo adequado. Reconhecer o efeito dos <i>outliers</i> na representação da reta de regressão linear. Identificar os diferentes tipos de associação linear entre duas variáveis. Entender o significado do x e do y na função que representa o modelo matemático.	Usar recursos tecnológicos para construir e representar modelos matemáticos.
	Especializado	Usar os dados reais para dar exemplos de modelos matemáticos. Colocar questões que permitam calcular o coeficiente de correlação e refletir sobre o seu valor com vista a adoção de um modelo adequado. Questionar sobre o efeito dos <i>outliers</i> na representação da reta de regressão linear. Colocar questões que permitam entender o significado do x e do y na função que representa o modelo matemático. Colocar questões que conduzam à construção de vários modelos matemáticos.	Ensinar a construir corretamente, com recurso a meios tecnológicos, as funções referentes aos modelos matemáticos.
Obtenção de resultados matemáticos	Comum	Efetuar cálculos a partir do modelo para determinar previsões no intervalo de possibilidades.	Usar recursos tecnológicos, como ferramentas auxiliares no cálculo.
	Especializado	Apoiar a realização de cálculos a partir do modelo e interrogar sobre o intervalo de possibilidades. Antever dificuldades no tema Funções.	Ensinar a usar a tecnologia, de modo a facilitar os cálculos relativos ao modelo matemático.
Interpretação de resultados matemáticos/ Validação do modelo matemático	Comum	Compreender os resultados matemáticos obtidos a partir do modelo matemático e/ou coeficiente de correlação, tendo em conta o seu sinal e ordem de grandeza.	Interpretar e criticar os resultados matemáticos obtidos a partir de um modelo matemático, tendo em conta a realidade e validá-lo ou não. Usar informação adicional sobre o tema a estudar de modo a criticar

		Reconhecer o efeito da eliminação dos <i>outliers</i> no valor do coeficiente de correlação linear. Compreender em que condições/amostra o modelo matemático é válido; Relacionar a representação gráfica dos dados com o valor do coeficiente de correlação.	de forma mais consciente os resultados matemáticos.
	Especializado	Colocar questões que conduzam à interpretação correta dos resultados obtidos a partir do modelo matemático e/ou valor do coeficiente de correlação e das condições em que um dado modelo matemático é válido para uma dada amostra. Questionar sobre o efeito da eliminação dos <i>outliers</i> no valor do coeficiente de correlação. Questionar sobre a relação entre a representação gráfica dos dados e o valor do coeficiente de correlação; Incitar a construir outro modelo matemático, caso o inicial seja refutado.	Colocar questões que apelem ao sentido crítico dos alunos de modo a ensinar a refletir sobre o significado dos resultados obtidos a partir do modelo matemático e validação do modelo matemático, tendo em conta o contexto real.

A partir da análise do quadro 17, identificam-se alguns aspetos relativos aos vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística com tarefas de modelação envolvendo distribuições bidimensionais, em cada uma das várias fases do ciclo de modelação e que, no caso destas professoras, revelaram-se mais comuns do que distintos.

Esta proposta de *Framework*, concebida a partir do enquadramento teórico e reelaborada com inspiração nos casos de duas professoras, pode constituir uma referência para analisar os vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística (cujo foco foi o conhecimento do conteúdo) com tarefas de modelação envolvendo distribuições bidimensionais, permitindo identificar aspetos recorrentes da prática de ensino dos professores. Esta identificação pode proporcionar uma maior reflexão por parte dos professores e levá-los a agir de forma mais ativa no aprofundamento e clarificação de conceitos, assim como melhorar a forma como preparam e conduzem estas aulas, proporcionando aos seus alunos oportunidades de aprendizagem da Matemática mais enriquecedoras e significativas.

Considerações finais

Podemos concluir que o conhecimento do contexto pode ser reforçado com o contacto direto com os contextos das situações e isso é possível fazer com os próprios alunos e atendendo aos seus interesses, como fizeram estas professoras. Os contactos prévios com os contextos a estudar, sempre que possível, podem ser importantes para, o aprofundamento do conhecimento não matemático, do saber lidar melhor com a modelação e suas dificuldades e ainda, a criação de tarefas de modelação interessantes e desafiadoras. As tarefas de modelação estatística foram concebidas de modo a fazerem parte de uma experiência de ensino, constituindo um desafio para as professoras envolvidas. O próprio conceito de modelação matemática (Swetz, 1992) e de tarefa de modelação não estava clarificado e foi ao longo desta experiência de ensino que, após estudo e discussão em equipa colaborativa, foi compreendido. Inicialmente as tarefas foram pensadas, por todas as professoras, com a finalidade de serem lecionados todos os conteúdos estatísticos do módulo referido, mas com o surgimento de alguns constrangimentos em sala de aula, reflexões individuais e em equipa colaborativa, as professoras aperceberam-se que nem todos os conteúdos estatísticos permitiam passar por todas as fases do ciclo de modelação (Ferri, 2006), tendo denominado as tarefas iniciais de “pré-modelação”. Concluíram então que as distribuições bidimensionais seriam o foco da modelação matemática, denominada neste estudo por modelação estatística. Conclui-se que o conceito de modelação, de modelo matemático e tarefa de modelação é algo que não está clarificado para as professoras. Esta falta de conhecimento sobre o que é modelação e tarefa de modelação matemática pode ter consequências na escolha das tarefas pelos professores (Azevedo, 2009), pois podem evitar propor estas tarefas em que sejam necessários conhecimentos que não dominam ou concretizá-las de forma limitada, eliminando fases do processo de modelação que requeiram conhecimento comum matemático que desconhecem ou fases em que o especializado matemático não exista. Conclui-se que o conhecimento não matemático, que pode ser reforçado a partir do contacto direto com os contextos das situações, não é suficiente para se criarem tarefas de modelação de nível cognitivo desafiador. O conhecimento matemático ao revelar-se frágil pode condicionar a forma como essas tarefas são preparadas e propostas aos alunos, condicionando a condução das aulas e o ensino e aprendizagem dos vários conteúdos matemáticos. Não basta conhecer os contextos, o professor deve ser detentor de um conhecimento matemático robusto para que consiga lidar com a modelação matemática.

Quanto ao ensino das distribuições bidimensionais, conclui-se que existe uma certa complexidade inerente ao que sabem sobre este assunto e à forma como ensinam, o que encontra correspondência em alguns autores (Engel & Sedlmeier, 2011; Estepa & Batanero, 1996; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Mugabe, Fernandes & Correia, 2012). A abordagem às associações não lineares é algo que é sugerido pelo programa de Matemática do ensino secundário de forma muito ligeira, que alerta apenas para uma referência que a tendência dos pontos pode ser não linear. Para além disso, notou-se um uso não consistente da terminologia relacionada com as distribuições bidimensionais. Neste estudo constatou-se que os professores evidenciam insegurança na abordagem destes conteúdos, revelando que não sabem, por exemplo, que o coeficiente de correlação linear apenas mede a associação linear entre duas variáveis (Martins, 2005; Veux *et. al.*, 2004). O uso não consistente da terminologia revela alguma confusão nos conceitos. Este conhecimento comum matemático fragilizado pode influenciar, quer na forma como constroem tarefas, quer na maneira como as seleccionam ou até mesmo evitá-las em casos em que sejam necessários conhecimentos que não dominam ou concretizá-las de forma limitada, eliminando fases do processo de modelação que requeiram conhecimento comum matemático que desconheçam ou fases em que o especializado não exista.

No entanto, se optarem por abordar este conteúdo, pode acontecer que seja ensinado de forma menos correta. A preparação e condução de aulas de modelação sobre estes conteúdos evidenciam alguma fragilidade e denuncia uma prática pouco usual. No entanto, posso concluir que esta experiência de ensino, para além de desafiante, permitiu abordar as distribuições bidimensionais de uma forma distinta, permitindo desenvolver conexões com os significados, explorando relações entre várias formas de pensar (Stein & Smith, 1998).

O facto de as professoras terem integrado uma equipa colaborativa permitiu pensarem conjuntamente em temáticas relacionadas com áreas profissionais dos seus alunos, surgindo propostas conjuntas de atividades que proporcionaram a recolha de dados reais, levando a uma prática que é pouco usada e que de um modo geral os professores optam por não fazer: envolverem os alunos na formulação do problema em estudo e na recolha de dados. Desta forma, foi possível operacionalizar formas de recolher dados reais e criar tarefas ricas e desafiadoras. O trabalho colaborativo teve um papel crucial neste processo, pois permitiu a evolução do conhecimento para ensinar Estatística, porque houve necessidade de aprofundar o conhecimento não matemático ao estarem em

contacto direto com a realidade, algo que não costuma ser hábito na prática de ensino de qualquer professor. A partir daí, pensaram criar tarefas que lhes permitissem ensinar conceitos inerentes às distribuições bidimensionais, considerando assim as tarefas como ponto de partida da abordagem aos conceitos e explorando em simultâneo o ciclo de modelação.

A colaboração (Hiebert, Gallimore, & Stigler, 2002; Ruthven & Goodchild, 2008) ajudou a perceber o modo como as professoras mobilizaram o conhecimento para ensinar Estatística e constituiu um meio para o desenvolver. O facto de as professoras terem trabalhado em equipa colaborativa proporcionou o contacto com vários contextos distintos, com professores de outras áreas disciplinares, tendo sido uma oportunidade para que o conhecimento para ensinar Estatística evoluísse e saísse enriquecido pelo contacto com a realidade. Isto pode implicar maior interdisciplinaridade, maior colaboração entre professores e relação com o exterior. Este poderá ser um caminho para promover a articulação transversal, fomentando o trabalho de equipa entre áreas exteriores à Matemática. Este tipo de tarefas permite deixar o exterior entrar na aula de Matemática e deixar a aula de Matemática sair para o exterior, promovendo maior capacidade crítica, alterando a visão da disciplina de Matemática e levando a perceber a importância da Estatística como uma área interessante na compreensão e intervenção no real.

Sendo a Estatística um tema a abordar no final do ano letivo e as distribuições bidimensionais um conteúdo ao qual é atribuída, de um modo geral, pouca importância, há tendência para começar a ignorá-lo ou a ser lecionado de forma rápida e menos cuidada. A formação nesta área da Estatística poderá ter um papel preponderante no ensino das distribuições bidimensionais, alertando para aspetos a serem trabalhados e identificados como problemáticos nesta experiência de ensino, e ou ainda, existirem mais equipas colaborativas que permitam uma maior partilha de conhecimentos e reflexão sobre as práticas.

A este propósito é de salientar que, não se tendo constituído como objetivo da investigação, com este estudo foi possível contribuir para constituir um pequeno conjunto de tarefas de modelação estatística e de “pré-modelação” contextualizadas a cada curso profissional, que foram ao encontro das orientações do programa de Matemática e que têm sido aplicadas e reajustadas por mim e por outros professores que lecionam este tipo de cursos. Para além disso, outros temas da Matemática já foram abordados com recurso

à criação de tarefas de modelação, no âmbito de uma oficina de formação por mim dinamizada ao longo destes últimos anos.

O ensino da Matemática nos cursos profissionais exige dos professores alguma criatividade perante a desmotivação generalizada dos alunos que integram estes cursos. Nem sempre é fácil criar e preparar tarefas que os motivem, os conduzam a desejar aprender e lhes permita valorizar a disciplina. Com este estudo, percebi que é possível mudar alguma coisa. Se as motivações e interesses dos alunos forem tidos em conta, com algum trabalho e vontade, os professores podem despertar estes alunos para a Matemática, proporcionando momentos de aprendizagem ricos e significativos. Sugiro que mais investigações sejam desenvolvidas no âmbito do ensino profissional e para os vários módulos que constituem o programa de Matemática.

Por último, termino com uma reflexão pessoal e profissional sobre o que aprendi ao longo deste trabalho. A constituição da equipa de trabalho colaborativo começou com quatro colegas de trabalho, incluindo-me, com as mesmas dúvidas, inseguranças e vontade de aprender mais. Como professora identifico-me com estas professoras e ao longo deste trabalho, também evolui ao nível dos vários tipos de conhecimento para ensinar Estatística. Também lecionei cursos profissionais e o trabalho que elas desenvolveram, também eu o fiz e tenho vindo a realizar ao longo destes anos. Este estudo permitiu-me aprofundar o meu conhecimento sobre o tema Estatística, que reconheço que não estava tão clarificado como eu julgava. Foi sem dúvida uma grande aprendizagem para mim. Todo este trabalho foi desenvolvido num clima de respeito e foi por isso que todas evoluímos como pessoas e professoras, podendo no futuro sermos melhores profissionais.

O facto de ser investigadora e professora do ensino secundário permitiu aproximar a investigação à escola. Como investigadora e professora do ensino secundário foi mais fácil dar continuidade ao trabalho em anos posteriores, promovendo a colaboração e confiança mútua entre colegas, fomentando o trabalho entre pares pedagógicos e proporcionando momentos ricos de partilha e discussão de modo a continuar a desenvolver investigações (Krainer, 2011). Penso que uma forma de aproximar mais a investigação à escola, poderá passar por existirem mais investigadores que sejam professores, ou então a partir dos resultados das investigações serem criadas oficinas de formação onde sejam divulgados os resultados e apresentadas propostas de tarefas ricas que permitam evoluir os vários tipos de conhecimento para ensinar Matemática. No caso

do ensino secundário profissional, essas oficinas de formação poderão ser um caminho para se produzirem materiais adequados e adaptados aos vários cursos, porque o que os professores fazem não é isso. A prática usual é lecionar da mesma forma como o fazem no ensino regular, mas os alunos do ensino profissional têm outro perfil e, como tal, todas as tarefas e forma como se preparam e conduzem as aulas têm que ter outro “olhar” por parte dos professores, não se podendo esquecer que estão a preparar jovens para o mundo do trabalho e que a Matemática deve ser ensinada com base nos contextos reais.

Referências

- Abrantes, P. (1995). Matemática, realidade e trabalho de projecto num ambiente de inovação curricular. In J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota, & M. Santos (Orgs.), *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?* (pp. 77-124). Lisboa: SPCE.
- Ainley, J., & Luntley, M. (2007). The role of attention in expert classroom practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(1), 3-22.
- Alarcão, I., & Tavares, J. (2003). *Supervisão da prática pedagógica. Uma perspetiva de desenvolvimento e aprendizagem*. (2ª edição revista e atualizada): Coimbra: Almedina.
- Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 33-52.
- APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- Apple, M. (1997). *Os professores e o currículo. Abordagens sociológicas*. Lisboa: Educa.
- Azcárate, P. (1998). Sobre el conocimiento didáctico del contenido. Dilemas y alternativas. In L. Rico & M. Sierra (Ed.), *Prime Simposio de la Sociedad Espanola de Investigación en Educación Matemática* (pp. 27-36). Granada: SEIEM.
- Azcárate, P. (1999). El conocimiento profesional: Natureza, fuentes, organización y desarrollo. *Cuadrante*, 8, 111-138.
- Azevedo, M. (2009). Ensino por investigação: problematizando as atividades em sala de aula. In A. Carvalho (Org.), *Ensino de Ciências: unindo a pesquisa e a prática*. São Paulo: Cengage Learning.
- Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching* (Vol. 2, pp. 1-48). Greenwich, CT: JAI Press.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade. And how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-46.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education* 49(5), 389 -407.
- Bardin, L. (1997). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

- Bassanezi, R. (1994). *Modelagem matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores*. Blumenau: Dynamis.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Editora Contexto.
- Batanero, C., & Diaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In J. Patrício Rojo (Ed), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125- 164). Zaragoza: Instituto de Ciencias de la Educación.
- Batanero, C., Estepa, A., & Godino, J. D. (1997). Students' learning of statistical association in a computer environment. In J. Garfield & G. Burril (Eds.), *Research on teaching statistics and new technologies* (pp. 191-206). Voorburg: International Statistical Institute.
- Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. & Rossman, A. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education*. New York, NY: Springer.
- Bednarz, N., Desgagné, S., Couture, C., Lebus, P., & Poirier, L. (1999, Maio). *Collaborative case studies: A framework for collaborative research involving teachers and researchers*. Comunicação apresentada no encontro A Thematic Network of Teacher Education in Europe - Network F, Lisboa, Portugal.
- Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about data analysis. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 121–145). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ben-Zvi, D. (2006). *Scaffolding students informal inference and argumentation*. Disponível http://www.researchgate.net/publication/228637727:Scaffolding_students'_informal_inference_and_argumentation, acessado em 27 de abril de 2014.
- Ben-Zvi, D., & Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 35–65.
- Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (Eds.) (2008). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 121–145). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2010). Introducing the emerging discipline of statistics education. *School Science and Mathematics*, 108 (8), 355-361.
- Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM Mathematics Education*, 44, 913-925.
- Biembengut, M. S. (1997). *Qualidade de ensino de Matemática na engenharia: uma proposta metodológica e curricular*. (Tese de Doutorado, Universidade Federal do Estado de Santa Catarina).
- Bishop, A. (2001). What values do you teach when you teach mathematics? In P. Gates (Ed.), *Issues in Mathematics Teaching*. London: Routledge.

- Blum, W. (1995). Applications and modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research. In C. Sloyer, et al. (Eds.), *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 1-20). Yorklyn: Water Street Mathematics.
- Blum, W., & Ferri, R. (2009) Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the dance of agency. In N. Pateman, B.J. Dougherty, & J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 1, 3-16.
- Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).
- Boavida, A., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.) *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2001). *Informática e educação matemática*. (2^a ed.) Belo Horizonte: Editora Autêntica.
- Bound, D., & Walker, D. (1998). Promoting reflection in professional courses: The challenge of context. *Studies in Higher Education*, 23(2), 191-207.
- Bourdieu, P. (1972). *Esquisse d'une théorie de la pratique*. Genève: Droz.
- Borko, H., & Putman, R. T. (1995). Expanding a teacher's knowledge base: A cognitive psychological perspective on professional development. In T. R. Guskey, & M. Huberman (Eds.). *Professional development in education: New Paradigm and Practices*. New York, N.Y.: Teachers College Press.
- Brocardo, J. (2001). *Investigações na aula de Matemática: Um projeto curricular no 8.º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Bromme, R., & Tillema, H. (1995). Fusing experience and theory. *Learning and Instruction*, 5, 261-267.
- Burak, D. (2004). Modelagem matemática e a sala de aula. *Encontro Paranaense de modelagem em educação matemática*. Londrina: Londrina UEL.
- Burgess, T. A. (2007). Investigating the nature of teacher knowledge needed and used in teaching statistics. Unpublished Ed.D. dissertation, Massey University, Palmerston North, New Zealand. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications
- Burriel, G. (2008). The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics. In *Proceedings of ICME 11*. Monterrey, México: ICME. Acedido em <http://www.icme11.org/tsg/show/23>.

- Burns, R. (2000). *Introduction to research methods*. London: SAGE Publications.
- Calderhead, J. (1988). The development of knowledge structures in learning to teach. In J. Calderhead (Ed.), *Teachers' professional learning* (pp. 51-64). London: Falmer Press.
- Campos, C. R. (2007). *A educação estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação*. (Tese de Doutorado, Universidade do Estado de São Paulo).
- Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Canavarro, A. P. (2004). Matemáticas y realidad en el aula: Un salto de “bungy jumping” para los alumnos? In J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (coords), *La actividad matemática en la aula* (pp. 25-34). Barcelona: Editorial GRAÓ.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Canavarro, A., & Ponte, J. (2005). O papel do professor no currículo de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 63-89). Lisboa: APM.
- Canavarro, A.P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: o caso de Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.
- Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1989). Building on the knowledge of students and teachers. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference* (Vol. 1, pp. 34-45). Lisboa, Portugal: PME.
- Carter, K. (1990). Teachers' knowledge and learning to teach. In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 291-310). New York: Macmillan.
- Carter, K., & Doyle, W. (1987). Teachers' knowledge structures and comprehension processes. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp. 147-169). London: Cassel.
- Carreira, S. (1992). *A Aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à Folha de Cálculo*. Lisboa: APM.
- Carreira, S. (1995). A matematização na natureza e na sociedade: Uma forma de encarar a relação Matemática – Realidade. In J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota, & M. Santos (Orgs.), *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?* (pp. 25-70). Lisboa: SPCE.
- Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 355–374.
- Chapman, O. (1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 201-228.

- Chapman, O. (2004). Facilitating peers interactions in learning mathematics: teachers' practical knowledge. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 191-198). Bergen, Norway: PME.
- Chapman, L. J., & Chapman, J. P. (1982). Test results are what you think they are. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 239-248). Cambridge: Cambridge University Press.
- Christiansen, B., & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Clandinin, D. J., & Connely, F. (1986). On narrative method, personal philosophy, and narrative unities in the story of teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, 23(4), 293-310.
- Clark, C., & Peterson, P. (1986). Teachers' thought processes. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*. New York: MacMillan Publishing Company.
- Cochran-Smith, M., & Lytle, S. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in a community. *Review of Research in Education*, 24, 249-305.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. London: Routledge & Falmer.
- Connelly, F., & Clandinin, D. J. (1985). Personal practical knowledge and the modes of knowing: Relevance for teaching and learning. In E. Eisner (Ed.), *Learning and teaching the ways of knowing* (Part II, pp.174-198). Chicago: University of Chicago Press.
- Davis, P. J. (1988). Applied mathematics as social contract. *ZDM*, 88(1), 10-15.
- D' Ambrosio, U. (1986). Da realidade à ação: Reflexões sobre educação (e) matemática. Campinas, SP: Summus/Universidade de Campinas.
- De Veaux, R., & Velleman, P. (2004). *Intro Stats*. 1st ed. Boston: Pearson Education.
- Dewey, J. (1910). *How we think*. Chicago: Henry Regnery.
- Duarte, J. (2011). *Tecnologias e pensamento algébrico: um estudo sobre o conhecimento profissional dos professores de matemático*. (Tese de Doutorado, Universidade de Lisboa)
- Drier, H. S. (2000). Investigating mathematics as a community of learners. *Teaching Children Mathematics*, 6, 358-362.
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modelling perspective on students' mathematical reasoning about data. In NCTM, *Journal for research in mathematics education*, 34(2), 110-133.

- Edwards, D., & Hamson, M. (1990). *Guide to mathematical modelling*. Florida: CRC Press.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London: Croom Helm.
- Engel, J., & Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education* (pp. 247-258). New York: Springer.
- Eraut, M. (1994). *Developing professional knowledge and competence*. London: Falmer Press.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.
- Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(2), 155-170.
- Estepa, A., & Batanero, C. (1995). Judgments of association in scatterplots. In J. Garfield (Ed.), *Research Papers from the 4th International Conference on Teaching Statistics* (pp. 117-124). Minnesota, MN: The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics.
- Estepa, A., & Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatterplots: An empirical study of students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, 25-41.
- Even, R., & Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29 (1), 1-20.
- Everston, C., & Green, J. L. (1986). Observation as inquiry and method. In M. C. Wittrock, *Handbook of research on teaching* (pp. 162-213). New York: Macmillan.
- Fenstermacher, G. (1994). The knower and the known: the nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education*, 20, 3-56.
- Fernandes, J. (2004). Utilização das tecnologias nas práticas pedagógicas de professores de Matemática do ensino secundário. In Actas ProfMat2004 (CD-ROM, p. 196-208). Covilhã: Associação de Professores de Matemática.
- Ferreira, A. (2006). Trabalho colaborativo e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Reflexões sobre duas experiências brasileiras. *Quadrante*, 15, 121-144.
- Ferri, B. (2006). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de matemática. *Educação e Matemática*, 110, 19-25.
- Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Brasil: Autores Associados.
- Fitzallen, N. (2012). *Reasoning about covariation with tinkerplots*. (Tese de doutoramento, University of Tasmania).

- Fontana, A., & Frey, J. H. (1994). Interviewing: the art of science. In Norman K. Denzin & Yvonna S. Lincoln (Eds), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 361-374). Thousand Oaks: Sage.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education*. GAISE report. American Statistical Association. Disponível em www.amstat.org/education/gaise/, acessado em 20 de fevereiro de 2014.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK-12 curriculum Framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Disponível em <http://www.amstat.org/>
- Franke, M., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Charlotte: Information Age Publishing.
- Fuller, M. (2001). The graphics calculator and mathematical modelling – Creating and integrated learning environment. In J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston, & S. P. Carreira (Coords), *Modelling and mathematics education*. (pp. 143-150). Chichester: Horwood Publishing.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, componentes, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I., & Garfield, J. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds). *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1-13). Amsterdam: IOS Press.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning. Research and teaching practice*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Gimeno, J. (1989). *El curriculum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata.
- Goetz, J., & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. New York: Academic Press.
- Guimarães, M. (1996). *O conhecimento profissional do professor da Matemática: Dois estudos de caso* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Griffiths, H. B., & Howson, A. G. (1974). *Mathematics: Society and curricula*. London: Cambridge University Press.
- Grint, K., & Woolgar, S., (1997). *The machine at work. Technology, work and organization*. Cambridge: Polity.
- Groth, R. R. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 427-437.

- Groth, R.E. (2013). Characterizing key developmental understandings and pedagogically powerful ideas within a statistical knowledge for teaching framework. *Mathematical Thinking and Learning*, 15, 121-145.
- Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança*. Lisboa: Mc Graw-Hill.
- Heaton, R. M., & Michelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 35-59.
- Henriques, A., & Oliveira, H. (2012). Investigações estatísticas: um caminho a seguir. *Educação e Matemática*, 120, 3-8.
- Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one? *Educational Researcher*, 31(5), 3-15.
- Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics Professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: the transformation of an innovation. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematical education and technology*, NATO ASI Series F (Vol. 121, pp. 1-17). Berlin: Springer.
- Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research on mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 323-349). Dordrecht: Kluwer.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Phillip, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Jaworski, B. (1992). *Reflection and development*. Unpublished doctoral dissertation. Open University, England.
- Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom - problems and opportunities. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.) *Modelling and applications in mathematics education*. (pp. 99 – 108). New York: Springer.
- Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R., & Stillman, G. (Eds) (2011). *Trends in teaching and learning on mathematical modelling*. New York: Springer.
- Kerr, D. R., & Maki, D. (1979). Mathematical models to provide applications in the classroom. In S. Sharrone, & R. Reys (Eds.), *Applications in school mathematics* (pp. 1-7). Reston: NCTM.

- Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.
- Krainer, K. (2011). Teachers as stakeholders in mathematics education research. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 47-62). Ankara: PME.
- Lança, C., & Canavarro, A. P. (2008). O recurso a sensores e calculadoras gráficas no emergir da proporcionalidade inversa com alunos do 9º ano: papel e potencialidades. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 210-223). Lisboa: SPCE – SEM.
- Leikin, R., & Zazkis, R. (2007). A view on the teachers' opportunities to learn mathematics through teaching. *Proceedings of 31st International Conference for Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. 122-128). Seoul, Korea.
- Leikin, R. (2006). Learning by teaching: The case of Sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. In R. Zazkis, & S. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 115–140). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Leinhardt, G., & Greeno, J. (1986). The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology*, 78(2), 75-95.
- Lesh, R. (1979). Applications: why, which and how. In S. Sharron, & R. Reys (Eds.), *Mathematics application in school*. Reston: NCTM.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational studies in Mathematics*, 12 (2), 235-264.
- Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind – in which development involves several interacting and simultaneously developing stands. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 205-226.
- Lesh, R., & Yoon, C. (2007). What is distinctive in (our views about) models & modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching?. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education*. (pp. 161 – 170). New York: Springer.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modelling. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Volume 1, pp. 763 – 804. Michigan: Frank K. Lester.
- Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa. Fundamentos e práticas* (2ª edição). Lisboa: Instituto Piaget.
- LLinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 429-459). Rotherdam: Sense Publishers.

- Loureiro, C., Oliveira, F., & Brunheira, L. (2000). *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. (pp. 251-254). Lisboa: GRAFIS.
- Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Malloy, C. (2002). Democratic access to mathematics through democratic education: an introduction. (In English, Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 17-26). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1), 152-173.
- Makar, K., & Fielding-Wells, J. (2011). Teaching teachers to teach statistical investigations. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. New York, NY: Springer.
- Martins, G. (2005). *Introdução às probabilidades e estatística*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística.
- Martins, M., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: DGIDC.
- Mason, J. (2005). Mediating mathematical thinking with e-Screens. In S. Johnston-Wilder, & D. Pimm (Eds.), *Teaching Secondary Mathematics with ICT* (pp. 219-234). Berkshire, UK: Open University Press.
- Matos, J. (1997). Modelação Matemática: o papel das tecnologias de informação. *Educação e Matemática*, 45, 41-43.
- Matos, J., & Carreira, S. (1994a). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante*, 3 (1), 19-53.
- Matos, J., & Carreira, S. (1994b). *Modelação e aplicações no ensino da Matemática: Situações e problemas*. Projecto MEM. DEFCUL.
- Matos, J., & Santos, M. (2002). Educação Matemática e (in) justiça social: uma agenda de investigação necessária. *Actas do XIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM/ Fundação Calouste Gulbenkian.
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Mewborn, D. S. (2003). Teaching, teachers' knowledge, and their professional development. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 45-52). Reston: NCTM.
- ME (2001a). *Programa de Matemática A para o ensino secundário*. Lisboa: ME, DES.
- ME (2001b). *Programa de Matemática para o ensino secundário profissional*. Lisboa: ME, DES.

- ME (2004). *Programa de Matemática para o ensino secundário profissional*. Lisboa: ME, DES.
- ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.
- ME (2013). *Programa de Matemática A e metas curriculares para o ensino secundário*. Lisboa: DGIDC.
- Moore, D. (1998). Should mathematicians teach statistics? *The College Mathematical Journal*, 19 (pp. 3-35).
- Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp.227-255). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academia Publishers.
- Mugabe, D. A., Fernandes, J. A., & Correia, P. F. (2012). Avaliação da associação Estatística num diagrama de dispersão por estudantes universitários. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, C. Nunes (Orgs.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 403-414). Coimbra: APM.
- Munby, H., Russell, T., & Martin, A. (2001). Teachers' knowledge and how it develops. In V. Richardson (Ed.). *Handbook of research on teaching* (pp. 877-903). Washington, D.C.: AERA.
- NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston: VA.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA.
- NCTM (2007). *Princípios e normas profissionais para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Niss, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. *Educação e Matemática*, 23, 1-2.
- Nunes, C., & Ponte, J. (2010). O papel do professor e o desenvolvimento curricular: Que desafios? Que mudanças? In GTI (Ed.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 61-88). Lisboa: APM.
- Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Oliveira, H., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 30-42). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Oliveira, H., & Henriques, A. (2014). Promover o raciocínio estatístico no ensino básico recorrendo à tecnologia. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 23-31.
- Olson, M. (1997). Collaboration: An epistemological shift. In H. Christiansen, L. Goulet, C. Kreniz, & M. Maeers (Eds.). *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 13-25). New York: State University of New York Press.

- Ormell, C. P. (1991). A modelling view of mathematics. In M. Niss, W. Blum, & I. Huntley (Eds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 125-131). Chichester: Ellis Horwood.
- Pacheco, J. (1996). *Currículo: Teoria e prática*. Porto: Porto Editora.
- Pacheco, J. (2001). *Currículo: Teoria e prática* (2ª ed.). Porto: Porto Editora.
- Patton, M. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park: Sage Publications.
- Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. London: Sage.
- Perrenoud, P. (1993). *Práticas pedagógicas. Profissão docente e formação. Perspectivas sociológicas*. Lisboa: Dom Quixote.
- Perrenoud, P. (1996). Le travail sur l'habitus dans la formation des enseignants. Analyse des pratiques et prise de conscience. In L. Paquay; M. Altet; E. Charlier, & P. Perrenoud (Eds.), *Former des enseignants professionnels. Quelles stratégies? Quelles compétences?* (pp. 181-208). Bruxelles: de Boeck.
- Perrenoud, P. (1999). *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed Editora.
- Perrenoud, P. (2000). *10 Novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed Editora.
- Perrenoud, P. (2001). *Ensinar: agir na urgência, decidir na incerteza*. (2ª ed.) Porto Alegre: Artmed Editora.
- Perrenoud, P. (2002). *A Prática reflexiva no ofício do professor*. Porto Alegre: Artmed.
- Perrenoud, P. (2005). *Escola e Cidadania: O papel da Escola na Formação para a Democracia*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Pimentel, M. T. (2010). *O conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: Que relações com um programa de formação contínua?* (Tese de doutoramento, Universidade do Minho).
- Pires, M. (2002). A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: Um projecto de reflexão acção. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 125-154). Lisboa: APM.
- Ploger, D., Klinger, L., & Rooney, M. (1997). Spreadsheets, patterns, and algebraic thinking. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 330-335.
- Poirier, J., Clapier-Valladon, S., & Raybaut, P. (1999). *Histórias de vida: teoria e prática*. Oeiras: Celta Editora.
- Ponte, J. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, 2(2), 95-108.

- Ponte, J. (1993). Professores de Matemática: Das concepções aos saberes profissionais. In *Actas do IV SIEM* (pp. 59-80). Setúbal: APM.
- Ponte, J. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.
- Ponte, J. (1996). Perspectivas de desenvolvimento profissional. In J. Ponte; C. Monteiro; M. Maia; L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática. Que formação?* Lisboa: SEM. SPCE.
- Ponte, J. (2001). A Investigação sobre o professor de Matemática: problemas e perspectivas. *Educação Matemática em Revista*, 11, 10-13.
- Ponte, J. (2003). Investigar, ensinar e aprender. In *Actas do ProfMat 2003*. Santarém: Associação de Professores de Matemática, pp. 25–39.
- Ponte, J. (2005). O Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.
- Ponte, J. (2011). Preparing teachers to meet the challenges of statistics education. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds), *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 3-7). New York: Springer.
- Ponte, J. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Coord.), *Teoria, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83 – 98). Barcelona: GRAO.
- Ponte, J., Matos, J., Guimarães, H., L. Cunha Leal, & Canavarro, A. P. (1991). *O processo de experimentação dos novos programas de Matemática: Um estudo de caso*. Lisboa: IIE.
- Ponte, J. (1996). Perspectivas de desenvolvimento profissional. In J. Ponte; C. Monteiro; M. Maia; L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática. Que formação?* Lisboa: SEM. SPCE.
- Ponte, J. & Oliveira, H. (1997). *Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional de professores de Matemática*. In G. Ramalho, C. Silva, & I. Oliveira (Eds.), *Actas SEIEM VI* (pp. 3-23). Lisboa: APM.
- Ponte, J., Matos, J., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.
- Ponte, J., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, 7(1), 3-32.
- Ponte, J., & Serrazina, L. (1998). *As novas tecnologias na formação inicial de professores*. Lisboa: Departamento de Avaliação, Prospectiva e Planeamento do Ministério das Educação.

- Ponte, J., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 2, p. 145-163.
- Ponte, J., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam/Taipei: Sense.
- Popkewitz, T. (2002). Whose heaven and whose redemption? The alchemy of the mathematics curriculum to save. *Proceedings of the Third International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 35-56). Denmark: Centre for Research in Learning Mathematics.
- Reason, P. (1988a). Introduction. On P. Reason (Ed.), *Human inquiry in action. Developments in new paradigm research* (pp. 1-17). London: Sage.
- Reason, P. (1988b). The co-operative inquiry group. In P. Reason (Ed.), *Human inquiry in action. Developments in new paradigm research* (pp. 18-38). London: Sage.
- Reason, P. (1994). Three approaches to participative inquiry. In N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 324-339). London: Sage.
- Roldão, M. C. (1999). *Os professores e a gestão do currículo – perspectivas e práticas em análise*. Porto: Porto Editora.
- Rossmann, A. (1996). *Workshop statistics, discovery with data*. New York: Springer-Verlag.
- Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 561-588). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.
- Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. *Proceedings of the 35th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88). Ankara, Turkey: PME.
- Sandholtz, J. H., Ringstaff, C., & Dwyer, D. C. (1997). *Teaching with Technology: Creating a Student Centered Classroom*. New York: Teachers' College Press.
- Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Santos, L. & Ponte, J. (2002). A prática letiva como atividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante*, XI (2), 29-54.
- Saraiva, M. (2001). *O conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática: Um projecto colaborativo* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Schoenfeld, A. (2000). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas. [versão digital]. Acedido em 10 de Novembro de 2010, em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/schoenfeld%2091.pdf>

- Schön, D. (1991). *The reflective practioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.
- Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.
- Schön, D. (2000). *Educando o Profissional Reflexivo. Um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Editora ARTMED.
- Shaugnessy, J. M. (2007) Research on students' understanding of some big concepts. In G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook Thinking and reasoning with data and chance*. Reston, VA: NCTM.
- Scheaffer, R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. In G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data ant chance*. Reston, VA: NCTM.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Silva, J. (1977). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Cultura.
- Skovsmose, O. (1992). Democratic competence and reflective knowing in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 12 (2).
- Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematical education*. (Mathematics education library, Vol. 15). Dordrecht: Kluwer.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. *Bolema*, 14, 66-91.
- Skovsmose, O. (2005). *Travelling through education. Uncertainty, mathematics, responsibility*. Rotterdam; Sense Publishers.
- Steen, L. (2002). A problemática da literacia quantitativa. *Educação e Matemática*, 69, 79-88.
- Stein, M., & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Stein, M., Smith, M., Henningsen, M., & Silver, E. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction*. Reston: NCTM.
- Sowder, J. (2007). The nathemathical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (1.^a ed., Vol. I, pp. 157-223). Charlotte: Information Age Publishing.

- Swetz, F. (1992). Quando e como podemos usar modelação? *Educação e Matemática*, 23, 45-48.
- Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum – A resource guide of classroom exercises*. Reston, VA: NCTM.
- Vygotsky, L. (1981). The genesis of higher mental function. In J. V. Wersch (Ed. And Trans.), *The concept of activity in soviet psychology* (pp. 144 – 188). Armonk, NY: Harper & Row.
- Watson, J. (2008). Exploring beginning inference with novice grade 7 students. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 59–82.
- Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265.
- Wodewotzki, M.L.L. & Jacobini, O.R. (2004). O Ensino de Estatística no Contexto da Educação Matemática. In: Bicudo, M.A.V. & Borba, M. de C. (Orgs.). *Educação Matemática: Pesquisa em Movimento* (pp. 232-249). São Paulo: Editora Cortez.
- Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (Third Ed.). Newbury Park: Sage.
- Zabalza, M. (1992). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola*. Rio Tinto: Edições ASA. (Trabalho original em espanhol, publicado em 1987)
- Zieffler, A. S., & Garfield, J. B. (2009). Modelling the growth of students' covariation reasoning during and introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 7-31.

ANEXOS

Anexo 1

Lista de módulos da disciplina de Matemática para os cursos
profissionais de 300 horas

<p>Módulo A1: Geometria Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço. O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço.</p> <p>Módulo A2: Funções Polinomiais Funções e gráficos. Funções polinomiais de graus 2 e 3.</p> <p>Módulo A3: Estatística Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)</p>	<p>Módulo A4: Funções Periódicas Movimentos periódicos. Funções trigonométricas.</p> <p>Módulo A5: Funções Racionais Funções racionais. Modelação de situações envolvendo fenómenos não periódicos.</p> <p>Módulo A6: Taxa de Variação Taxa de variação média num intervalo. Taxa de variação num ponto.</p>	<p>Módulo A7: Probabilidade Modelos de Probabilidade.</p> <p>Módulo A8: Modelos Discretos Modelos discretos: sucessões e progressões.</p> <p>Módulo A9: Funções de Crescimento Modelos contínuos não lineares: exponencial, logarítmico e logístico.</p> <p>Módulo A10: Otimização Problemas de otimização. Aplicações das Taxas de Variação. Programação Linear como ferramenta de planeamento e gestão.</p>
---	---	---

Anexo 2

Lista de módulos da disciplina de Matemática para os cursos
profissionais de 300 horas

<p>Módulo B1</p> <p><i>Funções Periódicas e Não Periódicas</i> Modelação matemática de situações envolvendo fenómenos periódicos e não periódicos. Breve abordagem das funções trigonométricas e das funções racionais.</p>	<p>Módulo B4</p> <p><i>Programação Linear</i> Domínios planos. Interpretação geométrica de condições.</p>
<p>Módulo B2</p> <p>Estatística Computacional Tratamento exploratório de dados usando uma folha de cálculo.</p>	<p>Módulo B5</p> <p>Jogos e Matemática Desenvolvimento de capacidades matemáticas através do uso de jogos de raciocínio.</p>
<p>Módulo B3</p> <p>Modelos de Funções Estudo e resolução de problemas com modelos de funções elementares.</p>	<p>Módulo B6</p> <p>Padrões Geométricos Identificação e análise de propriedades de figuras geométricas em situações do mundo real. Regularidades e padrões associados a transformações geométricas.</p>

Anexo 3

Temas abordados no ensino secundário profissional

Número	Designação	Duração de referência (horas)
A1	Geometria	36
A2	Funções Polinomiais	36
A3	Estatística	27
A4	Funções Periódicas	36
A5	Funções Racionais	36
A6	Taxa de Variação	27
A7	Probabilidades	21
A8	Modelos Discretos	27
A9	Funções de Crescimento	27
A10	Otimização	27
B1	Funções Periódicas e não Periódicas	36
B2	Estatística Computacional	36
B3	Modelos de Funções	36
B4	Programação Linear	30
B5	Jogos e Matemática	36
B6	Padrões Geométricos	36

Anexo 4

Precedências do Elenco Modular (Ministério da Educação, 2004, pp. 9)

Nº	Designação	Precedências						
A1	Geometria							
A2	Funções Polinomiais							
A3	Estatística							
A4	Funções Periódicas	A2						
A5	Funções Racionais	A2	A5	Ou	A2	B1		
A6	Taxa de Variação							
A7	Probabilidades							
A8	Modelos Discretos							
A9	Funções de Crescimento	A2	A5	Ou	A2	B1		
A10	Optimização	A2	A5	A6	ou	A2	B1	A6
B1	Funções Periódicas e não Periódicas	A2						
B2	Estatística Computacional	A3						
B3	Modelos de Funções							
B4	Programação Linear							
B5	Jogos e Matemática	A3						
B6	Padrões Geométricos	A1						

Anexo 5

Módulos para os cursos de 100 horas
(Ministério da Educação, 2004/5, p. 11)

Módulo Fixo	Módulos Opcionais		Precedências	
A3 - Estatística	A1	Geometria	A3	Estatística
	A7	Probabilidades		
	B2	Estatística Computacional		
	B3	Modelos de Funções	A3	Estatística
	B4	Programação Linear		
	B5	Jogos e Matemática	A3	Estatística
	B6	Padrões Geométricos	A1	Geometria

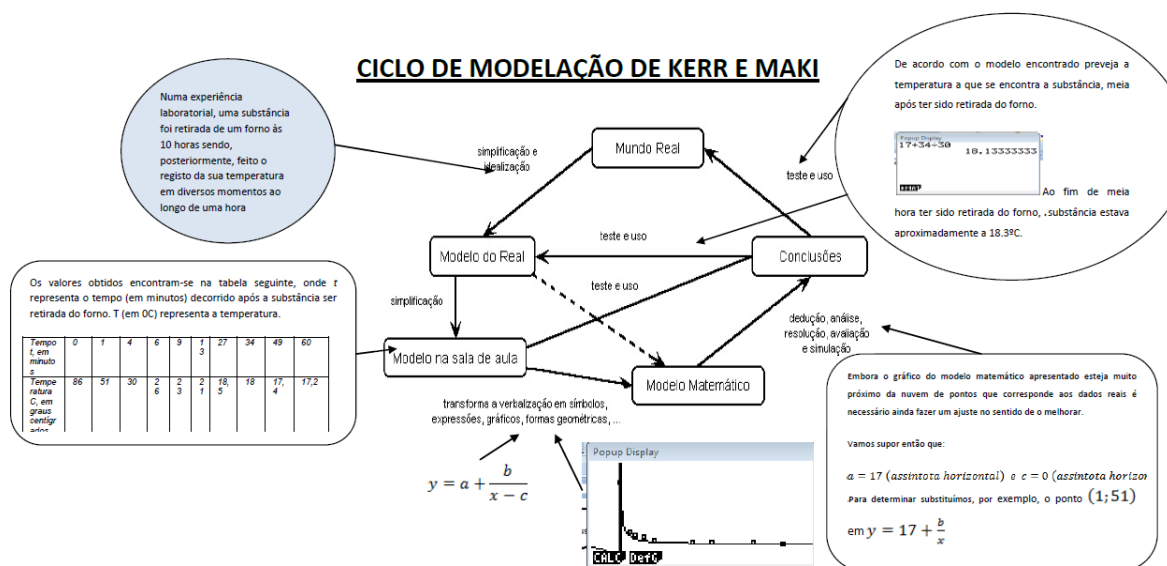
Anexo 6

Documento com os princípios orientadores das linhas estratégicas de ação da escola

OBJECTIVOS	INDICADORES	METAS	MÉTODO DE COMPARAÇÃO	
Promover a melhoria dos resultados dos alunos, no Agrupamento	Taxas de transição/conclusão, tendo como referência todos os alunos do ensino regular, por ciclo.	Melhorar as taxas de transição, sucesso em 2010/2011: ✓ 1º ciclo: 2% ✓ 2º ciclo: 2% ✓ 3º ciclo: 2% ✓ Secundário: 3%	Diferença entre as taxas de transição/conclusão de 2010/2011 com as de 2009-2010 (1º, 2º e 3º ciclo e ensino secundário regular).	1
Promover a melhoria dos resultados por ano de escolaridade	Taxas de transição/conclusão por ano de escolaridade.	Melhorar em: ✓ 1º ano – 0% ✓ 2º ano – 3% ✓ 3º ano – 2% ✓ 4º ano – 1% ✓ 5º ano – 2% ✓ 6º ano – 2% ✓ 7º ano – 3% ✓ 8º ano – 2% ✓ 9º ano – 1% ✓ 10º ano – 4% ✓ 11º ano – 3% ✓ 12º ano – 2%	Diferença entre as taxas de transição/conclusão de 2010/2011 com as de 2009/2010, por ano de escolaridade.	2
Melhorar os resultados numa disciplina por ciclo de aprendizagem	Média dos resultados das disciplinas de Língua Portuguesa /Português e Matemática, por ciclo e por ano	Melhorar a média por disciplina, por ciclo e por ano em 3% (objectivo partilhado)	Diferença entre a média obtida em cada disciplina com a de 2009-2010 (ciclo/ano).	3
Melhorar o progresso da qualidade das aprendizagens	Resultados da avaliação do primeiro período, por disciplina/turma	Progressão média dos alunos em cada disciplina /turma –5%	Resultados da avaliação diagnóstica, avaliação aferida /testes intermédios e resultados finais	4
Melhorar as classificações das provas de avaliação externa, em comparação com a avaliação interna.	Média de resultados dos alunos por professor, nas provas de avaliação externa. Média dos resultados dos mesmos alunos, na mesma disciplina (do mesmo professor), na avaliação interna.	Obtenção de resultados nas provas de avaliação externa, com um desvio não superior a 20% relativamente às classificações internas.	Diferença entre a média das classificações do mesmo grupo de alunos nas provas de avaliação externa de uma disciplina e a média das classificações internas da mesma disciplina Diferença entre a relação da média de CIF e CE do mesmo grupo de alunos e a relação entre a média de CIF e CE nacional.	5
Diminuir as taxas de desistência e repetência.	Percentagens de alunos que são retidos por excesso de faltas e dos que anulam a matrícula, por turma/disciplina	Diminuir as taxas de saída precoce em cada ciclo/ ano até em 1% no 3.º ciclo; 3% - 10.º ano; 2% - 11.º ano; 2% 12.º ano.	Taxas de saída escolar precoce (alunos que foram retidos por faltas / alunos que anularam a matrícula em 2010/2011), em comparação com a de 2009/2010.	6
Promover os resultados de sucesso nos Cursos Profissionais, CEF e EFA	Taxas de transição /conclusão /certificação	Atingir taxas de sucesso (transição/conclusão) dos alunos dos Cursos Profissionais em, pelo menos, 60%. (1º ano); 87% (2º ano) e 90% (3º ano), por turma; dos CEFs, em, pelo menos, 80%, e dos Cursos EFA, em, pelo menos 50%.	Cursos Profissionais – níveis de conclusão de dos módulos para o ano respectivo. CEF – taxa de conclusão/transição relativamente ao número de alunos que iniciou o ano /curso.	7
Promover o sucesso nas Modalidades de Formação ao longo da vida (Formações Modulares)	Taxas de certificação das formações.	Atingir taxas de sucesso (certificação) dos alunos, em, pelo menos, 65%	Taxa de certificação relativamente ao número de formandos que iniciou a formação.	8
Promover a proficiência em língua portuguesa nos residentes adultos falantes de outras línguas	Número de inscrições e taxas de certificação da formação.	Atingir taxas de sucesso (certificação) dos alunos, em, pelo menos, 60%	Taxa de certificação relativamente ao número de formandos que iniciou a formação	9

Anexo 7

Conformação da tarefa 3 ao ciclo de modelação de Kerr e Maki (1979),
apresentada na terceira sessão de trabalho colaborativo



Anexo 8

Perfis de desempenho dos cursos profissionais: **Técnico de cozinha-pastelaria**

O **Técnico de Cozinha-Pastelaria** é o profissional que, no domínio das normas de higiene e segurança alimentar, planifica e dirige os trabalhos de cozinha, colabora na estruturação de ementas, bem como prepara e confeciona refeições num enquadramento de especialidade, nomeadamente gastronomia regional portuguesa e internacional.

As **atividades principais** a desempenhar por este técnico são:

- armazenar e assegurar o estado de conservação das matérias-primas utilizadas no serviço;
- preparar o serviço de cozinha para a confeção das refeições;
- assegurar a limpeza e arrumação dos espaços, equipamentos e utensílios, verificando existências e controlando o seu estado de conservação;
- preparar/confecionar fundos, molhos e guarnições;
- preparar, confeccionar e empratizar entradas, sopas, pratos de carne, de peixe e mariscos, de legumes e outros alimentos e sobremesas, quer regionais quer internacionais;
- articular com o serviço de mesa a fim de satisfazer os pedidos de refeições e serviços especiais;
- pesquisar novas técnicas e tendências de cozinha e pastelaria;
- implementar as normas de auto-controlo e HACCP;
- gerir e controlar os custos de produção;
- colaborar na elaboração de cartas e ementas.

Anexo 9

Perfis de desempenho dos cursos profissionais: **Técnico de Gestão Desportiva**

PERFIL DE DESEMPENHO À SAÍDA DO CURSO

O TÉCNICO DE GESTÃO DESPORTIVA é o profissional que, no domínio das técnicas e práticas das diferentes modalidades desportivas individuais e coletivas planeia, organiza e desenvolve atividades e eventos desportivos, promovendo simultaneamente a imagem dos clubes, associações, ginásios, escolas ou de outras entidades.

As atividades principais a desempenhar por este técnico são:

- Supervisionar e planejar ou colaborar na supervisão e planeamento de atividades e eventos desportivos, em colaboração com os órgãos responsáveis da organização, tendo em conta a estratégia e a política comercial da organização, o público-alvo e o mercado.
- Organizar e desenvolver ou colaborar na organização e no desenvolvimento de atividades e eventos desportivos, utilizando os equipamentos, os espaços e as instalações adequadas, de acordo com a estratégia e a política comercial da organização e as necessidades e as motivações dos clientes.
- Supervisionar e coordenar ou colaborar na supervisão e coordenação e manutenção preventiva e corretiva dos equipamentos, dos espaços e das instalações desportivas.
- Atender a reclamações e sugestões dos clientes, identificando as suas necessidades e expectativas e assegurando a sua resolução/satisfação e/ou transmitindo-as ao seu superior hierárquico.
- Avaliar ou colaborar na avaliação dos resultados do desenvolvimento das atividades e dos eventos desportivos, nomeadamente, verificando a execução do orçamento e participando em estudos de análise de qualidade dos serviços desportivos prestados, detetando e comunicando eventuais anomalias/desvios ao estabelecido e propondo medidas e ações corretivas.
- Elaborar relatórios e outros documentos de controlo, relativos à sua atividade.

Anexo 10

Perfis de desempenho dos cursos profissionais: **Técnico de apoio à infância**

O **Técnico Auxiliar de Infância** é o profissional qualificado apto a acompanhar e vigiar crianças, sob supervisão dos educadores de infância ou de forma autónoma, de modo a garantir a sua segurança e bem estar, colaborando na organização e desenvolvimento das atividades educacionais.

As **atividades principais** a desempenhar por este técnico são:

- _ prestar diariamente cuidados de tipo maternal à criança, respondendo às suas necessidades individuais de sono, alimentação, higiene corporal e promoção da saúde;
- _ desenvolver comportamentos que fomentem a aquisição de hábitos de autonomia, independência e autoconfiança por parte da criança;
- _ colaborar com a educadora de infância na execução de atividades lúdicas e pedagógicas e outras atividades que fomentem e promovam os processos de socialização das crianças em creches, em estabelecimentos de educação pré-escolar e em atividades de tempos livres;
- _ acompanhar, apoiar e desenvolver atividades educacionais em internatos, amas e em outras estruturas de apoio escolar e familiar.
- _ assegurar à criança condições de bem-estar e de segurança, física e afetiva, ao nível da saúde individual e coletiva;
- _ detetar problemas de saúde e/ou dificuldades de desenvolvimento da criança, comunicando-as à educadora e/ou aos pais, bem como atender às necessidades especiais da criança;
- _ orientar a organização do grupo de crianças, garantindo o bem estar de todas elas;
- _ assegurar a manutenção, organização e gestão das salas e dos materiais utilizados;
- _ acompanhar as crianças nas atividades extracurriculares;
- _ manter o ambiente utilizado pelo grupo de crianças em boas condições de higiene e segurança;
- _ assegurar a cada momento a vigilância do grupo de crianças que lhe estão atribuídas

Anexo 11

Propostas de contextos reais para cada curso profissional

Curso técnico profissional de:	Propostas de situações do mundo real	Recursos	Recolha de dados	Pertinência e interesse	Tempo de duração	Conteúdos estatísticos	Outros professores envolvidos e função
Gestão desportiva	<p>1 – corrida com alunos do pré escolar ou 1º ciclo com o objetivo de estabelecer uma relação entre o tempo de que demoram a executar atividades desportivas e peso ou altura ou sexo ou nº de calçado</p> <p>2- Gincana composta por vários jogos (propostas dos alunos): . hula-hula (em 30 seg/1 min quantas vezes consegue o arco dar voltas à cintura ser cair ao</p>	<p>- material de do grupo de ed. Física e dos alunos do curso prof de gestão desportiva Fitas para delinear o espaço onde decorrerá a corrida; cronómetro; grelhas de registo; inquérito; apito; máquina fotográfica; cartões com identificação numérica para as crianças; fita métrica</p> <p>Bolas de petanca, cordas, arco de hula hula, baliza, bolas de futebol, cronómetro, grelhas de registo, máquina fotográfica</p>	<p>-Elaboração de um inquérito que contemple os seguintes aspetos: Se praticam desporto; se praticam, quantas vezes; há quanto tempo; qual o desporto que mais gostam; Nº calçado, peso, altura, sexo. -Grelhas de massa corporal já existentes no grupo de Ed Física para os alunos do agrupamento</p> <p>- recolha de dados a partir de grelhas para registo do: .tempo que as conseguem rodar o arco no hula hula; .nº de vezes consecutivas que conseguem saltar à corda; Nº de vezes que acertam no arco - nº de penaltis marcados;</p> <p>- gestão do custo dos materiais utilizados</p>	<p>Permitir realizar um estudo estatístico sobre obesidade infantil e dinamizar uma palestra para apresentar os dados e conclusões à comunidade escolar.</p> <p>Organização de um evento desportivo tendo como ponto de partida a preferência das crianças e os custos da organização de uma atividade desse género</p>	<p>Irão ser realizadas várias tarefas com estes dados</p>	<p>Tipos de variáveis; Tabelas de frequências (organização dos dados); Gráficos (apresentação dos dados e discussão) Medidas de tendência central (conclusões) Variáveis bidimensionais (diagrama de dispersão, regressão, coeficiente de correlação : por exemplo a relação entre o tempo com uma das outras variáveis) Medidas de dispersão</p>	<p>Grupo de educação física; Alunos dos cursos profissionais; Alunos do pré escolar ou 1º ciclo</p>

<p>chão?)</p> <p>- salto à corda (em 30 seg/1 min quantos saltos consegue dar?)</p> <p>-petanca adaptada (com um arco no chão a uma determinada distância, e tendo 10 bolas disponíveis, quantas consegue atirar de modo a ficarem dentro do arco ?)</p> <p>-mini sprints (numa distância a definir , por exemplo, de uma ponta à outra do campo de futebol sintético, quem é o mais rápido?)</p> <p>-os penaltis (com cinco bolas de futebol disponíveis e a uma determinada distância da baliza, quantos penaltis conseguimos marcar?)</p> <p>. etc</p>							
---	--	--	--	--	--	--	--

Cozinha /Pastelaria	1-organização de um lanche para crianças em idade pré-escolar ou 1º ciclo (lanche confeccionado e servido pelos alunos de cozinha e pastelaria – com colaboração das crianças - no dia do evento organizado pelos alunos de gestão desportiva e apoio à infância) que seja saudável e visando vários aspetos: Tabelas nutricionais Preferências das crianças Hábitos alimentares Custos dos alimentos Quantidades de alimentos	O (espaço) Cozinha da escola Alimentos : pão, queijo, fiambre, alface, tomate, bolos alusivos à matemática, sumos naturais, água, fruta, outros. Guardanapos e toalhas de papel Grelhas de registo Máquina fotográfica	Os alimentos apresentados no lanche terão por base um inquérito realizado aos EE das crianças com vista a aferir acerca dos gostos alimentares, nº de refeições por dia, tipo de alimentos que normalmente consome, pequeno almoço. De acordo com as tabelas nutricionais e no dia do lanche e tendo em conta o que as crianças escolhem para lanchar, preencher uma grelha com o número de calorias que vão ingerir para comparar com os valores recomendáveis para as crianças naquela faixa etária e peso dessas crianças. Os alunos de cozinha terão que preencher uma grelha com o custo do lanche, em geral, e de cada alimento de modo a conseguirem fazer previsões para um evento maior e tendo em conta a verba disponível pela escola para esse tipo de atividades. Fazer um levantamento entre os alimentos consumidos pelas crianças e o desperdício de alimentos desse dia, para melhor fazer uma estimativa para uma próxima atividade.	Reflexão sobre os hábitos alimentares, custos dos alimentos e gestão de uma ementa saudável e económica	Irão ser realizadas várias tarefas com estes dados	Tipos de variáveis; Tabelas de frequências (organizações dos dados); Gráficos (apresentação dos dados e discussão) Medidas de tendência central (conclusões) Variáveis bidimensionais (diagrama de dispersão, regressão, coeficiente e correlação : por exemplo a relação entre o tempo com uma das outras variáveis) Medidas de dispersão	Professores técnicos de cozinha; Alunos dos cursos profissionais; Alunos do pré-escolar ou 1º ciclo
---------------------	--	--	--	---	--	--	---

Apoio à infância	Organização de atividades lúdicas: jogos matemáticos; pinturas faciais; plasticinas. Estudo acerca dos hábitos das crianças: hábitos de higiene (dentes, mãos), horas de sono(nº de horas de sono, horas a que vão para a cama, se tem quarto próprio) , frequência de creches ou amas, passatempos e gostos.	Jogos (tangram); plasticina/ massa de modelar para moldagem de números e figuras geométricas; cartolinas; tintas; pinceis, toalhas, cola. Grelhas de registo, inquéritos. Máquina fotográfica (foto das pinturas faciais)	Grelhas de registo para os custos dos materiais a usar no evento de modo a levar a uma reflexão sobre a viabilidade dessas atividades. Grelhas de registo relacionadas com os inquéritos a realizar aos EE das crianças.	Organização de atividades lúdicas ligadas à matemática para crianças e que sejam apelativas e do agrado destas e de baixo custo a nível económico	Irão ser realizadas várias tarefas com estes dados	Tipos de variáveis; Tabelas de frequência (organização dos dados); Gráficos (apresentação dos dados e discussão) Medidas de tendência central (conclusões) Variáveis bidimensionais (diagrama de dispersão, regressão, coeficiente e correlação : por exemplo a relação entre o tempo com uma das outras variáveis) Medidas de dispersão.	Professores de artes; Alunos dos cursos profissionais; Alunos do pré-escolar ou 1º ciclo
------------------	---	---	--	---	--	---	--

Anexo 12

Questionário elaborado pelos alunos e professoras e entregues aos Encarregados de Educação

Este questionário destina-se a obter informações sobre os hábitos do seu (sua) educando(a), pelo que todas as questões são relativas a ele(a).

Em cada uma das questões assinale a opção correta com um X.

1. Sexo: Masculino ☐ Feminino ☐
2. Idade:
3 anos ☐ 4 anos ☐ 5 anos ☐ 6 ☐
3. Peso: ____ Kg
4. Altura: ____ m
5. Qual o número de sapato que calça? _____
6. O seu educando encontra-se a realizar algum tipo de dieta alimentar?
Não ☐ Sim ☐
Se respondeu sim à questão anterior, especifique. _____

7. Quantas refeições faz o seu educando durante o dia?
3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ou mais ☐
8. Qual o seu prato preferido?
Massa ☐ Peixe ☐ Carne ☐ Fast food ☐ Salada ☐ Sopa ☐
Outro ☐ Qual: _____
9. Ao pequeno-almoço o seu educando ingere:
Leite ☐ Iogurte ☐ Fruta ☐ Cereais ☐
Pão ☐ Sumos ☐ Doces ☐
Outro ☐ Qual: _____
10. Quantas peças de fruta come por dia?
0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
11. Ele (a) bebe às refeições? Não ☐ Sim ☐

Se respondeu sim à questão anterior, o quê?

Água ☐ Sumos sem gás ☐ Refrigerantes ☐
Leite ☐ Outro ☐ Qual: _____

12. Quanto às guloseimas, o seu educando come...
Muitas ☐ Algumas ☐ Poucas ☐ Nenhumas ☐
13. É portador de alguma alergia alimentar? Não ☐ Sim ☐
Se respondeu sim à questão anterior, é alérgico(a) a que alimentos?

14. O seu educando gosta de ajudar em pequenas tarefas na cozinha?
Não ☐ Sim ☐
15. Qual o desporto que o seu educando gostaria de experimentar no futuro?

16. O seu educando pratica desporto? Sim ☐ Não ☐
17. Se respondeu sim na última questão:
17.1.1. Qual a modalidade que pratica? _____
17.1.2. Qual a regularidade?
1 vez por semana ☐ 2 vezes por semana ☐
3 vezes por semana ☐ 4 ou mais vezes por semana ☐
18. Se sim, há quanto tempo?
Menos de 1 ano ☐ 1 a 2 anos ☐
2 a 3 anos ☐ Outro ☐ Qual? _____
19. Quantas horas diárias dorme o seu educando (considere as 24 horas do dia) _____
20. O seu educando divide o quarto com:
Ninguém (dorme em quarto próprio) ☐
1 irmão ☐
Mais do que 1 irmão ☐ Quantos? ____
Pais ☐
Outros ☐ Quem? _____
21. Relativamente aos hábitos de higiene:
Com que frequência o seu educando lava as mãos por dia?
Nenhuma ☐ 1 vez ☐ 2 vezes ☐
3 vezes ☐ mais ☐
22. Antes de frequentar este jardim de infância o seu educando:
Ficava com os pais ou outros familiares ☐

Ficava com uma ama ☐
Ficava na creche ☐
Outro: ☐ _____

23.

O seu educando tem passatempos preferidos:

Ver TV ☐ Jogar ☐ Cantar/dançar ☐ Ouvir histórias ☐
Pintar/desenhar ☐ Passear ☐ Outro ☐ _____

Obrigada pela sua colaboração

Anexo 13

Recolha de dados – Questionários

Questão n.º ____									
Aluno n.º:	1. Sexo		2. Idade				3	4.	5. N.º
	M	F	3	4	5	6	. Peso (kg)	Altura (m)	sapato
1	X			X			18.5	1.10	28
2		X		X			19	1.08	28
3									
4	X				X		24	1.17	29
5	X					X	20	1.25	30
6									
7		X		X			18	1.10	26
8	X				X		16	1.18	30
9		X		X			15	1.10	26
10	X				X		24	1.15	29
11	X				X		28.5	1.22	32
12	X			X			19	1.10	30
13		X		X			16	1.10	26
14		X			X		22	1.15	31
15		X			X		22	1.21	30
16		X		X			25	1.11	29
17		X			X		19.5	1.10	28
18	X				X		21	1.15	32
19									
20	X			X			19	1.12	29
21		X			X		21	1.10	30
22									
23	X			X			18	1.08	29
24		X			X		19	1.07	27
25									
TOTAL	10	10	0	9	10	1	-	-	-

Questão n.º ____							
6. Faz dieta alimentar?				7. Quantas refeições faz por dia?			
Aluno n.º:	Sim	Não	Se sim, qual?	3	4	5	6 ou mais
1		X				X	
2		X				X	
3							
4		X				X	
5		X				X	
6							
7		X				X	
8		X				X	
9		X				X	
10		X				X	
11		X			X		
12		X				X	
13		X					X
14		X			X		
15		X				X	
16		X				X	
17		X			X		
18		X			X		
19							
20		X			X		

21		X			X	
22						
23		X			X	
24		X			X	
25						
TOTAL		20		5	14	1

Questão n.º ____								
8.Prato Preferido								
Aluno n.º:	Massa	Peixe	Carne	Fast Food	Salada	Sopa	Tudo	Outro. Qual?
1	X							
2							X	Arroz
3								
4			X					
5	X							
6								
7	X							
8			X					
9						X		
10		X						
11			X					
12	X							
13	X							
14		X						
15		X						
16	X							
17								Lasanha
18			X					
19								
20	X							
21		X						
22								
23								Batata frita com ovo estrelado
24	X							
25								
TOTAL								

Questão n.º ____								
9. Ao pequeno-almoço ingere ...								
Aluno n.º:	Leite	Iogurte	Fruta	Cereais	Pão	Sumos	Doces	Outro. Qual?
1				X				
2				X				
3								
4				X				
5				X				
6								
7				X				
8				X				
9				X				
10					X			
11					X			
12				X				
13					X			
14				X				

15	X							
16				X				
17				X				
18				X				
19								
20	X							
21					X			
22								
23				X				
24	X							
25								
TOTAL	3	0	0	13	4	0	0	0

NOTA: Considera-se leite com cereais e pão acompanhado com leite

Questão n.º _____												
10. N.º peças de fruta que come por dia?						11. Bebe às refeições?						
Aluno n.º:						Sim	Não	Se Sim, o quê?				
	0	1	2	3	4			Água	Sumo sem gás	Refrigerante	Leite	Outro Qual?
1			X			X		X				
2					X	X					X	
3												
4				X		X						Ice tea
5			X			X		X				
6												
7		X				X		X				
8					X	X		X				
9		X				X			X			
10			X			X		X				
11	X					X		X				
12			X			X			X			
13				X		X		X				
14			X			X			X			
15				X		X				X		
16					X	X			X			
17		X				X			X			
18		X				X		X				
19												
20		X				X			X			
21		X				X			X			
22												
23			X			X						Sumo natural de laranja
24			X			X			X			
25												
TOTAL	1	6	7	3	3	X		8	8	1	1	2

Questão n.º _____									
12. Guloseimas que come por dia?					13. É portador de alergia alimentar?			14. Gosta de ajudar na cozinha?	
Aluno n.º:	Muitas	Algumas	Poucas	Nenhumas	Sim	Não	Se Sim, a que alimentos?	Sim	Não
1	X					X		X	
2	X					X		X	

3									
4			X			X		X	
5		X				X		X	
6									
7			X			X		X	
8		X				X		X	
9			X			X		X	
10			X			X		X	
11				X		X			X
12			X			X		X	
13		X				X		X	
14		X				X		X	
15		X				X		X	
16		X				X		X	
17		X				X		X	
18		X				X		X	
19									
20	X					X		X	
21			X			X			X
22									
23	X					X		X	
24			X			X			X
25									
TOT AL	4	8	7	1		20		17	3

Questão n.º ____												
Aluno n.º:	15. Desporto que gostaria de experimen- tar no futuro?	16. Pratica desporto?										
		Sim	Não	17. Se sim...								
				17.1. Qual?	17.2. Regularidade?				18. Há quanto tempo?			
					1 x sem	2 x sem	3 x sem	4 x sem	Menos de 1 ano	1 a 2 anos	2 a 3 anos	Outro Qual?
1	Futebol		X									
2	Ginástica Acrobática		X									
3												
4	Futebol		X									
5	Futebol		X									
6												
7	Futebol ou volei		X									
8	NR	X		atletismo		X			X			
9	NR		X									
10	Futebol	X		Natação		X				X		
11	Futebol		X									
12	Andar de mota	X		Karaté / Natação		X (cada)			X			
13	Dança		X									
14	Ginástica acrobática	X		Natação/ Ballet/ Judo				X			X	
15	NR		X									
16	Ballet /		X									

	natação											
17	Futebol		X									
18	NR		NR									
19												
20	Futebol		X									
21	Futebol		X									
22												
23	Equitação	X										
24	Não sabe		X									
25												
TOTAL		5				3		1		2	1	

Questão n.º ____											
Aluno n.º:	19. N.º horas que dorme	20. Divide o quarto com...					21. N.º vezes que lava as mãos diariamente				
		Ninguém	1 irmão	Mais do que 1 irmão	Pais	Outros Quem?	Nenhuma	1	2	3	Mais
1	12	X									X
2	10		X								X
3											
4	10		X								X
5	9	X									X
6											
7	10				X						X
8	10		X								X
9	?				X						X
10	12	X								X	
11	?		X								X
12	10	X									X
13	11		X								X
14	9.5	X								X	
15	9.5		X								X
16	10.5	X									X
17	11	X									X
18	8			X				X			
19											
20	8.5	X									X
21	10	X								X	
22											
23	11		X							X	
24	9	X									X
25											
TOTAL		10	7	1	2	0		1	0	4	15

Questão n.º ____											
Aluno n.º:	22. Antes de frequentar o Jardim de infância...				23. Passatempos preferidos						
	Ficava com pais ou outros familiares	Ficava com uma ama	Ficava na creche	Outro	TV	Jogar	Cantar/dançar	Ouvir histórias	Pintar/desenhar	Passear	Outro
1			X						X		
2		X							X		
3											
4	X				X						
5		X				X					

6											
7				Em casa rarament e em ama	X						
8			X						X		
9		X			X	X	X	X	X	X	
10			X							X	
11	X					X					
12			X							X	
13			X					X			
14			X						X		
15	X										Andar de bicicleta
16	X								X		
17	X				X						
18		X				X					
19											
20		X							X		
21			X						X		
22											
23			X							X	
24		X								X	
25											
TOTAL	5	6	8	1							

Anexo 14

Tarefa de “pré-modelação” de Sara: “Conhecer melhor o grupo ”

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos a situações do mundo real:

Materiais: calculadoras gráficas, questionários, computadores, software EXCEL, tabela de registo do jogo “Em cheio nas latas”.

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva.

Os alunos do curso profissional de gestão desportiva, entusiasmaram-se com o sucesso da gincana e pensaram em mais algumas questões para colocar no inquérito, de modo a relacionar com a destreza física das crianças. Resolveram fazer um levantamento acerca do género das crianças e também analisar a pontaria num dos jogos inventados por eles:

“**Em cheio nas latas**” (Fracas se derruba entre 0 a 1 latas, Baixa se derruba entre 2 a 3 latas, Média se derruba entre 4 a 6, Boa se derruba 7 ou 8 latas e muito boa se derruba 9 ou 10 latas)



Quais as características dos alunos que participaram na gincana?

Tendo em conta os dados obtidos, e como aluno do curso profissional técnico de gestão desportiva, no sentido de caracterizar o grupo que participou na gincana organizada no jardim-de-infância, terá que realizar um trabalho de estudo estatístico sobre os dados obtidos que contemple os seguintes aspetos:

- 1- Identifique os tipos de variáveis estatísticas em estudo;
- 2- Reflita sobre a forma de agrupar os dados e organize os dados em tabelas, quer para a característica “género”, quer para a pontaria, tendo o cuidado de construir tabelas a que possam ser retiradas conclusões sobre a pontaria dos rapazes e a pontaria das raparigas;

3- Prepare a apresentação dos resultados relativos às variáveis e apresente o trabalho na forma de gráficos, utilizando diferentes tipos de gráficos para cada variável (exemplo: gráfico circular, gráfico de barras e pictograma), optando por um tipo de gráfico em função da característica estudada, de modo que melhor descreva a situação real descrita e que para que posteriormente permita tirar conclusões e fazer estimativas;

4- De modo a testar a sua interpretação gráfica, responda a algumas questões a partir da observação dos gráficos e reflita sobre a forma como estão construídos e a sua adequabilidade à situação real.

Questões:

- Qual a percentagem de rapazes e raparigas?
- Quantos alunos têm fraca pontaria?
- Qual a percentagem de raparigas com pontaria muito boa? E de rapazes?
- Qual a percentagem de alunos que têm pontaria Média, Boa ou Muito Boa? E Fraca ou Baixa?

Caso não ache adequada a forma como apresentou graficamente os dados e não lhe permita tirar conclusões válidas, reconstrua os gráficos tendo em conta o tipo de variáveis que estudou acerca destas crianças.

5- A partir da reflexão anterior, redija uma pequena composição, com cerca de 10 linhas, em que resuma as conclusões e possíveis conjeturas que podemos retirar dos gráficos já elaborados e onde saliente as principais características e os respetivos resultados obtidos. Será que a capacidade das crianças relativamente à sua pontaria estará relacionada com o género?

Anexo 15

Primeira tarefa de “pré-modelação” criada por Sara: Início do estudo das características de um grupo de alunos do pré-escolar

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos a situações do mundo real:

- Identificar População e amostra;
- Classificar variáveis;
- Organizar dados para variáveis qualitativas e quantitativas discretas (contagem e frequência absoluta) a partir da recolha de dados reais e tirar conclusões.

Conteúdos estatísticos: população e amostra; classificação de variáveis estatísticas (variável qualitativa e quantitativa discreta); tabelas de frequências;

Materiais: calculadoras gráficas, questionários.

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Num agrupamento de escolas do litoral algarvio, os alunos do curso profissional técnico de gestão desportiva organizaram e realizaram uma “gincana” numa turma de educação pré-escolar do agrupamento.

Conjuntamente com a gincana foi realizado um inquérito, aos encarregados de educação, com o objetivo de melhor ficarmos a conhecer o grupo de crianças a estudar. Interrogámos os encarregados de educação acerca de características e hábitos dos alunos em causa.



Entre outras questões, colocaram-se as seguintes:

Q1 - Qual a idade do seu educando?

Q2 - Qual o desporto que o seu educando gostaria de experimentar no futuro?

Q3 - O seu educando pratica desporto? Sim ☐ Não ☐

Q4 - Qual a modalidade que pratica? _____

Q5 - Qual a regularidade? 1 vez por semana ☐ 2 vezes por semana ☐
3 vezes por semana ☐ 4 ou mais vezes por semana ☐

Quais as preferências desportivas dos alunos que participaram na gincana?

Tendo em conta os dados obtidos, e como aluno do curso profissional técnico de gestão desportiva, no sentido de caracterizar o grupo que participou na gincana organizada no jardim-de-infância, terá que realizar um trabalho de estudo estatístico sobre os dados obtidos que contemple os seguintes aspetos:

1- Identifique o tipo de variável estatística estudada em cada uma das questões acima referidas e retiradas dos questionários efetuados aos encarregados de educação;

2- Reflita sobre a forma de agrupar os dados e organize os dados recolhidos em cada uma das questões. Pode utilizar várias tabelas, onde coloca toda a informação possível para responder a questões como, por exemplo:

-Quantos alunos têm 4 anos?

-Qual a percentagem de alunos que gostaria de experimentar a praticar equitação?

-Qual a percentagem de alunos que pratica desporto?

- Quantos alunos praticam “natação”?

-Qual a percentagem de alunos que pratica desporto 1 vez por semana?

3- Responda às questões anteriores, tendo por base as tabelas que elaborou e indique exemplos de outras questões a que as tabelas construídas dão resposta. Caso haja necessidade, reformule as tabelas elaboradas.

4- Escreva uma pequena composição, com cerca de 10 a 15 linhas. Comece por identificar a população e a amostra utilizadas, e em seguida, resuma as conclusões que podemos retirar das tabelas já elaboradas e saliente as principais características e preferências a partir dos respetivos resultados obtidos. No final tente fazer conjecturas para os alunos do pré-escolar.

Anexo 16

Segunda tarefa de “pré-modelação” criada por Sara: O peso e a altura dos alunos do pré-escolar

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos a situações do mundo real:

Conteúdos estatísticos: classificação de variáveis estatísticas (variável qualitativa); tabelas de frequências.

- Agrupar dados em classes;
- Organizar dados quantitativos contínuos (contagem e frequência absoluta) a partir de dados reais e tirar conclusões.

Materiais: calculadoras gráficas, inquéritos.

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Durante a realização de uma gincana desportiva com crianças do pré-escolar, os alunos do curso profissional técnico de gestão desportiva, resolveram integrar no inquérito a entregar aos encarregados de educação, algumas questões relacionadas com a altura e peso das crianças, para que seja possível no desenvolvimento do estudo estatístico, relacionar a atividade física das crianças com o seu peso e altura.



Surgiu então a seguinte questão:

- Quais as características físicas dos alunos que participaram na gincana?

Tendo em conta os dados obtidos, a partir das respostas obtidas nos inquéritos, no sentido de caracterizar o grupo que participou na gincana organizada no jardim-de-infância, terá que realizar um trabalho de estudo estatístico sobre os dados obtidos que contemple os seguintes aspetos: altura e peso.

1- Identifique o tipo de variável estatística estudada em cada uma das questões efetuadas acerca dos alunos;

2- Reflita sobre a forma de agrupar os dados e organize os dados em tabelas, uma para cada variável, onde coloca toda a informação possível.

3- A forma como agrupou os dados será a mais adequada? Reflita sobre a forma como agrupou os dados e possíveis conclusões que poderá tirar a partir das tabelas.

Elabora três questões e dá a respetiva resposta, que deve ser retirada diretamente da tabela. Exemplo: “Quantos alunos têm altura/peso entre e ?”

Caso não ache adequada à situação descrita, reformule a organização dos dados de modo a que esta se ajuste à situação real.

4- Escreva uma pequena composição, com cerca de 10 linhas, em que resuma as conclusões que podemos retirar a partir das tabelas já elaboradas e onde saliente as principais características e os respetivos resultados obtidos. Procure fazer conjecturas.

No final poderá comparar os valores observados com os dados fornecidos por um pediatra e indicados como valores de referência para alunos nestas idades:

IDADE	FAIXA MAIS COMUM	
	PESO (kg)	ESTATURA (cm)
4 anos	13,950 – 19,710	97 – 109
5 anos	16,260 – 22,980	103 – 116

Fonte: <http://filhosecia.uol.com.br/2010/08/tabela-de-peso-e-altura/>

Por [Ruy do Amaral Pupo Filho - pediatra](#)

Anexo 17

Terceira tarefa de “pré-modelação” criada por Sara: *A pontaria no jogo: Em cheio nas latas*

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos a situações do mundo real:

- Para dados qualitativos, organizar dados em tabelas de frequências;
- Para dados qualitativos, apresentar dados em gráficos e tirar conclusões.

Conteúdos estatísticos: classificação de variáveis estatísticas (variável qualitativa); tabelas de frequências; gráfico de barras, pictogramas

Materiais: calculadoras gráficas, questionários, computadores, *software* EXCEL, grelha de registo do jogo “Em cheio nas latas”.

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Os alunos do curso profissional de gestão desportiva, entusiasmar-se com o sucesso da gincana e pensaram em mais algumas questões para colocar no inquérito, de modo a relacionar com a destreza física das crianças. Resolveram fazer um levantamento acerca do género das crianças e também analisar a qualidade da pontaria num dos jogos inventados por eles:



“Em cheio nas latas”

A pontaria neste jogo será considerada como:

- *Fraca* se derruba entre 0 a 1 latas,
- *Baixa* se derruba entre 2 a 3 latas,
- *Média* se derruba entre 4 a 6,

- *Boa* se derruba 7 ou 8 latas
- *Muito Boa* se derruba 9 ou 10 latas

Como se classifica a pontaria dos alunos que participaram na gincana?

Tendo em conta os dados obtidos, e como aluno do curso profissional técnico de gestão desportiva, no sentido de caracterizar o grupo que participou na gincana organizada no jardim-de-infância, terá que realizar um trabalho de estudo estatístico sobre os dados obtidos que contemple os seguintes aspetos: *Género e Pontaria*

1- Classifique o tipo de variável estatística estudada em cada uma das variáveis a estudar – *Género e Pontaria*.

2- Reflita sobre a forma de agrupar os dados e organize os dados em tabelas, tendo o cuidado de construir tabelas de modo a que possam ser retiradas conclusões sobre a pontaria dos rapazes e a pontaria das raparigas, tendo em conta a informação dos inquéritos (pontaria) e das grelhas de registo (género)

3- Prepare a apresentação dos resultados relativos às variáveis e apresente o trabalho na forma de gráficos, utilizando diferentes tipos de gráficos para cada variável (pode por exemplo recorrer a gráficos circulares, a gráficos de barras ou pictogramas), tendo a atenção de optar por cada tipo de gráfico em função da característica estudada, de modo a que melhor descrevam a situação real descrita, para que posteriormente os gráficos permitam tirar conclusões e fazer estimativas;

4- De modo a testar a sua interpretação gráfica, responda a algumas questões a partir da observação dos gráficos que construiu e reflita sobre a forma como estão construídos e a sua adequabilidade à situação real.

Questões:

- Qual a percentagem de raparigas com pontaria Muito Boa? E de rapazes?
- Quantos alunos (rapazes e raparigas) têm Fraca pontaria?
- Qual a percentagem de alunas (raparigas) que têm pontaria considerada Média, Boa ou Muito Boa?

Caso não ache adequada a forma como apresentou graficamente os dados e não lhe permita tirar conclusões válidas, reconstrua os gráficos tendo em conta o tipo de variáveis que estudou acerca destas crianças.

5- A partir da reflexão anterior, redija uma pequena composição, com cerca de 10 linhas, em que resuma as conclusões e possíveis conjecturas que podemos retirar dos gráficos já elaborados e onde saliente as principais características e os respetivos resultados obtidos. Será que a capacidade das crianças relativamente à sua pontaria estará relacionada com o género? Faça conjecturas.

Anexo 18

Quarta tarefa de “pré-modelação” criada por Sara: *O início da Gincana*

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos aplicados a situações do mundo real.

Para dados quantitativos discretos, organizar dados em tabelas de frequências, apresentar dados em gráficos e tirar conclusões.

Conteúdos estatísticos: classificação de variáveis estatísticas (variável discreta); tabelas de frequências; gráficos de barras e gráficos circulares.

Materiais: calculadoras gráficas, questionários, computadores, software EXCEL.

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Num agrupamento de escolas algarvio, os alunos do curso profissional técnico de gestão desportiva organizaram e realizaram uma “gincana” numa turma de educação pré-escolar no agrupamento e pretendem agora encontrar a melhor forma de apresentar os resultados à comunidade escolar.

Entre as outras atividades desenvolvidas estão:

“*Lança, Atira e Acerta*”, onde se contabilizaram o número de bolas encestadas



“Chuta Chuta – Penáltis à Ronaldo”
onde se contabilizaram o número de bolas quem entraram na baliza



Os resultados obtidos foram registados pelos alunos no dia da gincana e encontram-se anexos a esta tarefa.

Surgiu uma questão: Será que as crianças do pré-escolar, deste agrupamento de escolas algarvio, estão a desenvolver competências motoras?

Tendo em conta os dados obtidos, e como aluno do curso profissional técnico de gestão desportiva, no sentido de dinamizar um trabalho sobre a destreza e competências motoras na infância, terá que realizar um trabalho de estudo estatístico prévio sobre os dados obtidos que contemple os seguintes aspetos:

- 1- Identifique o tipo de variável estatística em cada jogo;
- 2- Reflita sobre a forma de agrupar os dados e organize os dados em tabelas;
- 3- Prepare a apresentação dos resultados para o trabalho na forma de gráficos, utilizando diferentes tipos de gráficos para cada variável, de modo a que melhor descrevam a situação real descrita e que permitam tirar conclusões e fazer estimativas;
- 4- A forma como agrupou os dados será a mais adequada? Reflita sobre a forma como agrupou os dados e possíveis conclusões que poderá tirar a partir das tabelas. Para isso, elabore três questões e dê a respetiva resposta, que deve ser retirada diretamente da tabela. Exemplos: “Quantos alunos têm encestaram.... bolas?” “Qual a percentagem de alunos que marcaram apenas um penalti?”

(São meros exemplos, podem ser apresentados muitos outros resultados que sejam considerados pertinentes.)

5- Imagine agora que visita uma outra escola da região, mas na qual existem 300 alunos na faixa etária estudada. Faça uma previsão dos valores esperados para os resultados obtidos numa possível gincana, onde se indiquem previsões baseadas na composição anterior, por exemplo:

- quantos alunos se espera que encestem ... bolas;
- qual a percentagem de alunos se espera que marquem apenas um penalti;
- (- outras questões a que tenha respondido no ponto 4)

Anexo 19

Quinta tarefa de “pré-modelação” criada por Sara: *A Gincana contínua...*

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos aplicados a situações do mundo real.

Conteúdos estatísticos: classificação de variáveis estatísticas (variável contínua); tabelas de frequências; histogramas.

Materiais: calculadoras gráficas, questionários, computadores, software EXCEL.

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Num agrupamento de escolas algarvio, os alunos do curso profissional técnico de gestão desportiva elaboraram a organização e a realização de uma “gincana” numa turma de educação pré-escolar no agrupamento e pretendem agora encontrar a melhor forma apresentar os resultados à comunidade escolar. Estes alunos foram bastante criativos e entusiasmados com o trabalho que estavam a realizar em contexto profissional e resolveram acrescentar à gincana, dois jogos que tiveram bastante sucesso junto das crianças.

As atividades desenvolvidas foram:

“O Canguru Maluco”

e

“Sprints – O + Rápido”.



Os resultados obtidos foram registados pelos alunos no dia da gincana e encontram-se anexos a esta tarefa.

As crianças do pré-escolar conseguem ser rápidas?

Para dar continuidade ao estudo estatístico sobre as crianças do pré-escolar e considerando os dados obtidos no dia da gincana, terá que realizar um trabalho de estudo estatístico prévio sobre os dados obtidos que contemple os seguintes aspetos:

- 1- Identifique o Tipo de variável estatística em cada jogo/situação;

2- Reflita sobre a melhor forma de agrupar os dados e justifique qual o procedimento a adotar.

3- Tendo em conta o trabalho já realizado em tarefas anteriores, a reflexão e reformulações realizadas, organize os dados tendo em atenção as características das variáveis em estudo e em seguida elabore as tabelas respetivas;

4- Prepare a apresentação dos resultados para o trabalho na forma de gráficos, utilizando o tipo de gráfico que conhece que considere ser o mais adequado para cada variável, de modo a que gráficos obtidos descrevam o melhor possível a situação real descrita e que permita tirar conclusões e fazer estimativas;

5- De acordo com os gráficos obtidos e caso os ache adequados à situação descrita (caso contrário, reconstrua os gráficos), escreva uma pequena composição, com cerca de 10 linhas, em que saliente as conclusões de cada um dos jogos e evidencie os principais resultados obtidos, criando e respondendo, por exemplo, a questões como:

- Quantos alunos deram mais de “a” saltos?

-Qual a percentagem de alunos que dá menos de “a” saltos?

-Qual a percentagem de alunos que corre em menos de “a” segundos?

(São meros exemplos, podem ser apresentados muitos outros resultados que sejam considerados pertinentes.)

O que conclui acerca da destreza física destas crianças ao nível da rapidez de salto e velocidade de corrida?

Anexo 20

Sexta tarefa de “pré-modelação” criada por Sara: *Para conhecer melhor o grupo*

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos aplicados a situações do mundo real.

Conteúdos estatísticos: medidas de localização tendência central – média, moda e mediana

Materiais: calculadoras gráficas, questionários, computadores, software EXCEL.

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Num agrupamento de escolas algarvio, os alunos do curso profissional técnico de gestão desportiva elaboraram a organização e a realização de uma “gincana” numa turma de educação pré-escolar no agrupamento e pretendem agora encontrar a melhor forma apresentar os resultados à comunidade escolar.

Nas aulas anteriores obtiveram estes resultados:

O desporto que gostaria de experimentar no futuro.

DESPORTO	Freq absoluta	Freq relativa	Freq relativa %
Futebol	9	$9/20=0,45$	45%
Ginástica	2	$2/20=0,1$	10%
Ballet ou natacao	1	$1/20=0,05$	5%
Dança	1	$1/20=0,05$	5%
Andar de mota	1	$1/20=0,05$	5%
Equitação	1	$1/20=0,05$	5%
Não responde/ não sabe	5	$5/20=0,25$	25%
Total	20	1	100%

A idade das crianças

IDADE	Freq absoluta	Freq relativa	Freq relativa %
4	9	$9/20=0,45$	45%
5	10	$10/20=0,5$	50%
6	1	$1/20=0,05$	5%
total	20	1	100%

Altura das crianças

ALTURA	Freq. absoluta	Freq. relativa
[107 ; 111[10	50%
[111 ; 115[2	10%
[115 ; 119[5	25%
[119 ; 123[2	10%
[123 ; 127]	1	5%
total	20	100%

Para dar continuidade ao estudo estatístico sobre as crianças do pré-escolar e considerando os dados obtidos no dia da gincana e no questionário, terá que realizar um trabalho de estudo estatístico sobre os dados obtidos que contemple os seguintes aspetos:

- 1- Identifique o Tipo de variável estatística em cada jogo/situação;
- 2- Elabore um gráfico de barras ou um histograma que ilustre os dados recolhidos.
- 3- Se possível, determine a moda de cada conjunto de dados.
- 4- Se possível, determine a mediana/classe mediana de cada conjunto de dados. Se não for possível, justifique.
- 5- Se possível, determine a média de cada conjunto de dados. Se não for possível, justifique.
- 6- Que conclusões pode tirar acerca do tipo de variáveis estudadas e do cálculo das medidas de tendência central.

Anexo 21

Sétima tarefa de “pré-modelação” criada por Sara: *E se houvesse alterações na turma?*

Objetivo: Realizar um estudo que permita tirar conclusões acerca da inclusão de novos dados, nos dados já existentes, e verificar o que acontece à média, moda e mediana.

Conteúdos estatísticos: medidas de localização

Materiais: calculadoras, manual

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Na aula passada estudaram a média, a moda e a mediana associada a estes resultados:

SITUAÇÃO BASE - A idade atual das crianças

IDADE	Freq absoluta	Freq relativa	Freq relativa %
4	9	$9/20=0,45$	45%
5	10	$10/20=0,5$	50%
6	1	$1/20=0,05$	5%
total	20	1	100%

Q1 - Indica novamente a moda, a média e a mediana destes dados.

SITUAÇÃO nº 1 – NO ANO 2015

Ao passarem alguns anos, todos os alunos ficam mais velhos.

Q2 - Completa a nova tabela para as idades, para a idade das crianças em 2015:

IDADE	Freq absoluta	Freq relativa	Freq relativa %
total	20	1	100%

Q3- Se possível, determine a moda, a mediana e a média do novo conjunto de dados.

Q4- Que conclusões pode tirar acerca do tipo de variáveis estudadas e do cálculo das medidas de tendência central? Para cada uma das variáveis estudadas, quais das medidas de tendência central se mantiveram iguais na turma de 2012 e de 2015? E quais sofreram alterações?

SITUAÇÃO nº 2 – AINDA EM 2012, vamos dar rebuçados:

Q5 -Imaginemos agora que por cada ano de idade, vamos oferecer 5 rebuçados.
Preenche:

IDADE	Freq absoluta de rebuçados	Freq relativa de rebuçados	Freq relativa % de rebuçados
total	20	1	100%

Q6- Se possível, determine a moda, a mediana e a média do novo conjunto de dados.

Q7- Que conclusões pode tirar acerca do tipo de variáveis estudadas e do cálculo das medidas de tendência central? Para cada uma das variáveis estudadas, quais das medidas de tendência central se mantiveram para a idade e para o número de rebuçados e quais sofreram alterações?

Anexo 22

Oitava tarefa de “pré-modelação” criada por Sara: “*A dispersão dos resultados no jogo do Canguru Maluco e Em cheio nas Latas*”

Objetivo: A partir de um conjunto de dados reais quantitativos discretos, tirar conclusões sobre: Amplitude; Desvio padrão; Quartis; Diagrama de quartis

Conteúdos estatísticos: medidas de dispersão

Materiais: calculadoras, manual

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Considera nas questões 1 e 2 o número de saltos dado por cada aluno no jogo “Canguru Maluco”

1. Coloca todos os dados observados no EXCEL (podes ignorar o número de pauta de cada aluno) e em seguida, no EXCEL, indica:

- O Máximo
- O Mínimo
- A Amplitude
- A Mediana
- O 1º Quartil
- O 3º Quartil
- O Desvio padrão

Considera agora nas questões 3 e 4 o número de latas total que foi derrubado por cada aluno no jogo “Em cheio nas Latas”

2. Indica:

- O Máximo
- O Mínimo
- A Amplitude
- A Mediana
- O 1º Quartil
- O 3º Quartil
- O Desvio padrão (utiliza o excel)

3. Que conclusões pode tirar acerca da dispersão de resultados em cada uma das variáveis estudadas? Onde existe maior dispersão? Terá a ver com as regras de cada jogo? Porquê?

Anexo 23

Primeira tarefa de modelação criada por Sara: *Pé grande = peso pesado?*

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos aplicados a situações do mundo real. A partir dos conjuntos de dados reais criar uma grelha entre duas variáveis que permita relacionar dados

Conteúdos estatísticos: Relação entre as duas variáveis e interpretação em contexto real; Interpretar o coeficiente de correlação linear; Diagrama de dispersão; Reta de regressão linear; Estimar resultados

Materiais: Questionários, computadores, EXCEL.



Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Num agrupamento de escolas algarvio, houve um aluno do curso profissional técnico de gestão desportiva que ouviu o seguinte comentário:

“Os jovens com pé grande pesam mais!”- A Filipa achou estranho e ficou a pensar no assunto. Será que a frase que ouviu teria algum fundamento?

Resolveu propor à turma um estudo em que analisassem a possível relação entre o peso e o número de sapato que calçam... será possível existir relação? E que tipo de relação?

Tendo em conta que visitaram um jardim-de-infância do agrupamento em que organizaram uma gincana com as crianças vão tentar averiguar se o número de sapato dos alunos se relaciona com o peso.

Começaram por registar em EXCEL todos os dados recolhidos para melhor analisarem a situação.

Número de identificação da criança	Peso (em Kg, arredondado à unidade)	Número de sapato
1		
2		
3		
...		

Existirá alguma relação entre o peso (P em Kg) das crianças e o número de sapato que calçam?

Usando as potencialidades do EXCEL:

1. Crie uma tabela com o peso das crianças e o número de sapato que usam.
2. Represente o diagrama de dispersão, com recurso ao EXCEL.
3. Por observação direta, como considera a possível correlação? Existe ou não? Será positiva ou negativa? Forte ou fraca?
4. Consideremos que existe correlação linear entre estas duas variáveis, indique a equação da função obtida e determine o coeficiente de correlação linear. Represente a reta sobre o diagrama de dispersão.
5. Teste o modelo encontrado, fazendo estimativas.
 - a) A irmã mais nova de um dos alunos, que se encontra dentro da faixa etária estudada, tem 17,7 kg. Qual o número de sapato que espera que use?
 - b) Uma criança um pouco mais velha calça o 30. Qual será o peso esperado?
 - c) Um dos alunos da turma 10ºH pesa 74kg. Se usássemos este modelo, qual o número de sapato que se prevê associado?
 - d) Será que este modelo se adequa a adultos com mais de 100kg? Explique porquê.
6. O modelo encontrado traduz adequadamente a situação real descrita? Em que situações?
7. Existirá fundamento na frase que a Filipa ouviu? Dê a sua opinião.

Anexo 24

Segunda tarefa de modelação criada por Sara: *Os magricelas rápidos e saltitantes ou ...talvez não!*

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos aplicados a situações do mundo real. A partir dos conjuntos de dados reais criar uma tabela entre duas variáveis que permita relacionar dados.

Conteúdos estatísticos: Da relação entre as duas variáveis e interpretação em contexto real; Interpretar o coeficiente de correlação linear; Diagrama de dispersão; Reta de regressão linear; Estimar resultados.

Materiais: Questionários, computadores, EXCEL.

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Num agrupamento de escolas algarvio, durante uma aula de matemática em que se estudaram distribuições bidimensionais, surgiram varias ideias por parte dos alunos do curso profissional técnico de gestão desportiva:

O Lucas, disse “Acho que tamanho do pé está relacionado com a altura!”

A Giovanna, por seu lado pensou “O peso provavelmente influencia a corrida...acho que os mais pesados devem demorar mais tempo!”

O Joel ficou a pensar “O peso pode influenciar o número de saltos dado pelos alunos... os mais leves talvez saltem mais vezes...”



Será que as ideias destes alunos terão algum fundamento?

A professora resolveu propor à turma que analisassem a possível relação entre:

- o peso e o tempo que demoram a fazer o segundo print;*
- o tamanho do pé (número de sapato) e a altura;*
- o peso e o número de saltos no jogo “Canguru Maluco”;*

Começaram por registar em EXCEL todos os dados recolhidos, em três tabelas distintas, uma para cada situação:

Número de identificação da criança	Peso (Kg)	Tempo do 2º sprint
1		
2		
3		
...		

Número de identificação da criança	Peso (Kg)	Nº de saltos
1		
2		
3		
...		

Número de identificação da criança	Altura	Tamanho do sapato
1		
2		
3		
...		

Usando as potencialidades do EXCEL:

1. Crie três tabelas distintas, uma para cada situação.
2. Represente os diagramas de dispersão, com recurso ao EXCEL.
3. Consideremos que existe correlação linear entre as duas variáveis, indique a equação da função obtida e determine o coeficiente de correlação linear. Represente a reta sobre o diagrama de dispersão, em cada situação.

	Função escolhida	Coeficiente de correlação linear (r)
Nº sapato e altura		
Peso e tempo		
Peso e saltos		

4. Por observação direta do diagrama e tendo em conta os coeficientes de correlação encontrados, como considera a possível correlação? Existe ou não? Será positiva ou negativa? Forte ou fraca?

Nº sapato e altura: _____

Peso e tempo: _____

Peso e saltos: _____

5. Teste os modelos encontrados, fazendo estimativas.

- a) Qual o número de sapato previsto para um aluno com 1,34cm?
 - b) Quanto tempo se prevê que demore na atividade “Sprints- O + rápido” um aluno com 23kg?
 - c) Pode estimar-se o número de saltos previsto por um aluno com 23kg? Explique porquê.
6. Existirá fundamento nas ideias do Lucas, da Giovanna e do Joel? Observe atentamente os dados recolhidos e dê a sua opinião.

Anexo 25

Terceira tarefa de modelação criada por Sara: *Encontrei o melhor modelo matemático!*

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos aplicados a situações do mundo real. A partir dos conjuntos de dados reais criar uma grelha entre duas variáveis que permita relacionar dados

Conteúdos estatísticos: Da relação entre as duas variáveis e interpretação em contexto real; Interpretar o coeficiente de correlação linear; Diagrama de dispersão; Reta de regressão linear; Estimar resultados

Materiais: Questionários, computadores, EXCEL

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva

Num agrupamento de escolas algarvio, durante uma aula de matemática em que se estudaram distribuições bidimensionais, surgiram varias ideias por parte dos alunos do curso profissional técnico de gestão desportiva:

A Tânia disse: “Nos sprints, a primeira tentativa e a segunda tentativa são semelhantes!”

O Bruno disse ao Rodrigo: “Pelo que vi na Gincana, os miúdos com melhor pontaria no jogo “Em cheio nas latas” também são melhores no “Lança atira e acerta””



Será que estas afirmações correspondem ao que de facto acontece na realidade?

A professora resolveu propor à turma que analisasse encontrassem uma linha de tendência que seja a melhor possível para cada uma das situações.

- o tempo que demoram a fazer o primeiro e o segundo print;

- o número de acertos no jogo “Em cheio nas latas” e no “Lança atira e acerta”

Começaram por registar em EXCEL todos os dados recolhidos, em duas tabelas distintas, uma para cada situação:

Número de identificação da criança	Tempo do 1º sprint	Tempo do 2º sprint
1		
2		
3		
...		

Número de identificação da criança	Nº de acertos – Em cheio nas latas	Nº de acertos “Lança atira e acerta”
1		
2		
3		
...		

Usando as potencialidades do EXCEL:

1. Crie três tabelas distintas, uma para cada situação.
2. Represente os diagramas de dispersão, com recurso ao EXCEL.
3. Consideremos que existe correlação entre as duas variáveis, mas não necessariamente linear. Teste as várias linhas de tendência. Identifique qual a melhor traduz a situação.

Indique a equação da função obtida e determine o coeficiente de correlação linear. Represente a reta sobre o diagrama de dispersão, em cada situação.

Situação	Função escolhida	Coeficiente de correlação linear (r)
Sprints		
Pontaria		

4. Por observação direta do diagrama e tendo em conta os coeficientes de correlação linear encontrados, como considera a possível correlação? Existe ou não? Será positiva ou negativa? Forte ou fraca?

Sprints: _____

Pontaria: _____

5. Teste os modelos encontrados, fazendo estimativas.
 - a) Um aluno que no primeiro sprint fez um tempo de exatamente 5 segundos, quanto tempo demorará no segundo sprint?
 - b) Um aluno que no jogo “Em cheio nas latas” deitou abaixo 8 latas, quantas se prevê que encesta no jogo “Lança atira e acerta?”

6. Existirá fundamento nas ideias da Tânia e do Bruno? Observe atentamente os dados recolhidos e dê a sua opinião.

Anexo 26

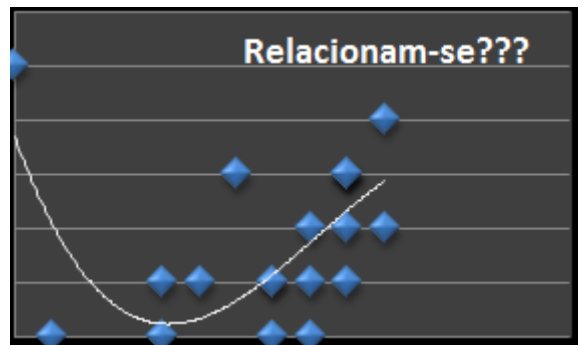
Quarta tarefa de modelação criada por Sara: *Será que estas variáveis estão relacionadas?*

Objetivo: Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos aplicados a situações do mundo real. A partir dos conjuntos de dados reais criar uma grelha entre duas variáveis que permita relacionar dados.

Conteúdos estatísticos: Relação entre as duas variáveis e interpretação em contexto real; Interpretar o coeficiente de correlação linear; Diagrama de dispersão; Diferentes tipos de Regressão; Estimar resultados

Materiais: Questionários, computadores, EXCEL.

Curso profissional envolvido: Curso profissional técnico de gestão desportiva



Num agrupamento de escolas algarvio, os alunos do curso profissional de gestão desportiva têm vindo a estudar as distribuições bidimensionais.

Em todas as aulas, a professora ouve pelo menos um comentário como:

“Acho que a altura se relaciona não com.... mas sim com”

“Acho que a pontaria se relaciona com..., mas o peso deve estar relacionado com ...”

Vamos passar à acção e nesta tarefa, o que se pretende é que cada grupo formule as suas próprias conjecturas e que as teste.

Usando as potencialidades do EXCEL:

1. Formula duas conjecturas acerca de variáveis que possam estar relacionadas (ainda não estudadas anteriormente)

1- _____

2- _____

2. Registe em EXCEL todos os dados recolhidos, em duas tabelas distintas, uma para cada situação:

Número de identificação da criança	_____	_____
1	_____	_____
2	_____	_____
3	_____	_____
...	_____	_____

3. Represente os diagramas de dispersão, com recurso ao EXCEL.

4. Consideremos que existe correlação entre as duas variáveis, mas não necessariamente linear. Represente sobre o diagrama de dispersão, as várias linhas de tendência, e apresente todas as possibilidades que testou (diagramas separados).

5. Identifique qual a função que melhor traduz cada uma das situações.

Indique a equação da função obtida e determine o coeficiente de correlação linear.

Situação	Função escolhida	Coeficiente de correlação linear (r)
Situação 1		
Situação 2		

6. Por observação direta do diagrama e tendo em conta os coeficientes de correlação linear encontrados, como considera a possível correlação linear? Existe ou não? Será positiva ou negativa? Forte ou fraca?

Situação 1 _____

Situação 2 _____

7. Teste os modelos encontrados, fazendo estimativas.

8. As suas conjecturas verificaram-se? Justifique a sua opinião.

9. Prepare uma apresentação para a turma sobre a tarefa que terminou de desenvolver. Nesta apresentação comunique aos colegas as conjecturas acerca das variáveis podem estar relacionadas na opinião do grupo, a forma como procederam e as conclusões a que chegaram. Teste o modelo matemático encontrado e apresente as conclusões obtidas à turma.

Anexo 27

Tabelas de pontuações e jogos da Gincana

Jogo: Lança, atira e Acerta

Nº Jogador	1ª tentativa	2ª tentativa	3ª tentativa	4ª tentativa	5ª tentativa	Total de pontuações	Observações
1	0	0	0	1	0	1	
2	1	0	0	0	1	2	
3	1	1	1	1	1	5	
4	1	0	1	0	1	3	
5	1	1	0	0	0	2	
6	0	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	1	1	
8	0	1	0	1	0	2	
9	0	0	1	1	1	3	
10	0	0	1	1	1	3	
11	0	0	0	0	0	0	
12	1	0	1	1	1	4	
13	0	0	0	0	0	0	
14							Faltou
15	0	0	0	0	0	0	
16	0	0	1	0	0	1	
17	0	1	0	0	0	1	
18	0	0	0	1	0	1	
19							Faltou
20	0	0	1	1	1	3	
21	0	0	0	0	0	0	
22	0	0	1	0	0	1	
23	0	1	1	1	0	3	
24	0	0	0	0	0	0	
25							

Jogo: O Canguru Maluco

Nº Jogador	Total de Saltos em 30 segundos	Observações
1	21	desistiu
2	21	
3	34	
4	33	
5	30	
6	35	
7	31	
8	29	
9	35	
10	42	
11	22	
12	41	
13	13	nee
14		faltou
15	26	
16	23	
17	29	
18	37	
19		faltou
20	35	
21	40	
22	27	
23	11	desistiu
24	26	
25		

Jogo: Em cheio nas latas

Nº Jogador	1ª tentativa	2ª tentativa	3ª tentativa	Total de latas derrubadas	Observações
1	0	0	4	4	
2	0	0	9	9	
3	0	0	0	0	
4	0	0	6	6	
5	8	0	0	8	
6	8	0	0	8	
7	0	0	9	9	
8	0	4	6	10	
9	0	0	9	9	
10	0	0	9	9	
11	0	0	4	4	
12	0	0	10	10	
13	0	7	0	7	
14					Faltou
15	0	0	1	1	
16	0	0	7	7	
17	5	0	0	5	
18	0	7	0	7	
19					Faltou
20	0	9	0	9	
21	0	0	4	4	
22	0	0	8	8	
23	9	0	0	9	
24	0	0	4	4	
25					

Jogo: “Chuta Chuta: Os penaltis à Ronaldo”

Nº Jogador	1ª tentativa	2ª tentativa	3ª tentativa	4ª tentativa	5ª tentativa	Total de pontuações	Observações
1	0	0	0	1	1	2	
2	0	0	1	0	0	1	
3	0	1	0	0	0	1	
4	0	0	1	0	1	2	
5	1	0	0	0	0	1	
6	1	1	0	1	0	3	
7	1	0	0	1	0	2	
8	1	1	1	1	1	5	
9	0	1	0	0	0	1	
10	0	1	0	1	1	3	
11	0	1	0	0	1	2	
12	0	0	0	0	0	0	
13	0	0	0	0	0	0	
14							Faltou
15	0	1	0	0	0	1	
16	1	1	1	0	0	3	
17	0	0	1	1	1	3	
18	1	0	0	0	1	2	
19							Faltou
20	1	1	0	1	1	4	
21	0	0	0	0	1	1	
22	0	0	1	1	1	3	
23	0	0	0	0	0	0	
24	0	1	0	0	0	1	
25							

Jogo: “Sprints – O + rápido”

Nº Jogador	Tempo que demora a percorrer os 15 metros	Tempo que demora a percorrer os 15 metros	Observações
	1ª vez(seg)	2ª vez(seg)	
1	05:17	05:71	
2	06:57	05:49	
3	05:76	04:95	
4	04:81	04:99	
5	05:94	06:84	
6	03:19	03:12	
7	03:51	03:42	
8	04:72	04:50	
9	05:17	05:98	
10	04:09	05:17	
11	04:50	04:54	
12	04:99	04:90	
13	07:60	08:73	
14			faltou
15	06:03	04:68	
16	06:52	06:16	
17	06:43	05:04	
18	04:68	04:77	
19			faltou
20	04:36	04:32	
21	05:08	05:17	
22	05:44	05:49	
23	05:22	05:04	
24	08:41	05:26	
25			

Anexo 28

Planificação das tarefas em sessão de trabalho colaborativo

Tarefas	Conteúdos estatísticos que irão emergir a partir das tarefas
1ª tarefa: Comum aos três cursos	População e amostra; Classificação de variáveis; Organização de dados para variáveis qualitativas e quantitativas discretas (contagem e frequência absoluta) a partir da recolha de dados reais e tirar conclusões.
2ª tarefa: Comum aos três cursos	Agrupar dados em classes; Organizar dados quantitativos contínuos (contagem e frequência absoluta) a partir de dados reais e tirar conclusões.
3ª tarefa: Para cada curso profissional (3 tarefas)	Para dados qualitativos, organizar dados em tabelas de frequências; Para dados qualitativos, apresentar dados em gráficos e tirar conclusões.
4ª tarefa: Para cada curso profissional (3 tarefas)	Para dados quantitativos discretos, organizar dados em tabelas de frequências; Para dados quantitativos discretos, apresentar dados em gráficos e tirar conclusões.
5ª tarefa: Para cada curso profissional (3 tarefas)	Para dados quantitativos contínuos, organizar dados em tabelas de frequências; Para dados quantitativos contínuos, apresentar dados em gráficos e tirar conclusões.
6ª tarefa: Para cada curso profissional (3 tarefas)	A partir de 3 grelhas de recolhas de dados reais distintos (variável qualitativa, quantitativa discreta e quantitativa contínua) realizar um estudo comparativo onde seja solicitado o cálculo das medidas de localização (se possível) e tirar conclusões.
7ª tarefa: Para cada curso profissional (3 tarefas)	Realizar um estudo que permita tirar conclusões acerca da inclusão de novos dados, nos dados já existentes, e verificar o que acontece à média e mediana.
8ª tarefa: Para cada curso profissional (3 tarefas)	A partir de um conjunto de dados reais quantitativos discretos, tirar conclusões sobre: Amplitude quartis Desvio padrão Quartis Diagrama de quartis
9ª tarefa: Para cada curso profissional (3 tarefas)	A partir dos conjuntos de dados reais criar uma grelha entre duas variáveis que permita tirar conclusões acerca: Da relação entre as duas variáveis e interpretação em contexto real; Interpretar o coeficiente de correlação linear; Diagrama de dispersão Reta de regressão linear Estimar
10ª tarefa: Para cada curso profissional	A partir de um conjunto de dados criar uma grelha entre duas variáveis que permita tirar conclusões

(3 tarefas)	acerca: Da relação entre as duas variáveis e interpretação em contexto real; Interpretar o coeficiente de correlação linear; Diagrama de dispersão Modelo de regressão (não linear) que melhor se adapta ao conjunto de dados Estimar
11ª tarefa: tarefa comum aos três cursos	Tarefa global (a decidir)
N° total de tarefas: 27 N° de tarefas por curso: 11 (2 comuns) Poderão surgir mais tarefas para cada tema, dependendo do sucesso da recolha de dados, da pertinência destes para o curso profissional envolvido e interesse dos alunos.	

Anexo 29

Primeira tarefa de “pré-modelação” criada por Patrícia: “*Começar a conhecer a amostra*”

Objetivo geral: Pretende-se com esta tarefa, usar a estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.

Objetivo específico: Distinguir tipos de variáveis; Organizar dados em tabelas simples de modo a tirar conclusões.

Conteúdos estatísticos:

- População e amostra;
- Classificação de variáveis;
- Tabelas de frequências

Materiais:

- Calculadoras científicas;
- Inquéritos;
- Grelhas de registo das variáveis *sexo*, *idade* e *n.º de calçado*.

Curso profissional envolvido:

 Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

Alunos de cursos profissionais de uma escola secundária do Algarve, desenvolveram uma atividade para recolher dados a partir de uma amostra de crianças do pré-escolar. Foram recolhidos vários dados, através de inquéritos entregues aos encarregados de educação e de grelhas de registo de observações, com o objetivo de fazer uma breve caracterização desses alunos, relativamente ao sexo, idade e número de calçado.



- 1) A partir dos dados recolhidos, organize os mesmos da forma que lhe parecer mais adequada e que, posteriormente, lhe permita tirar conclusões.

Para a organização dos dados deverá ter em conta os seguintes aspetos:

- Classificação da variável estatística;
- Construção de uma tabela para cada uma das variáveis.

- 2) Tendo em conta a organização dos dados por si efetuada, verifique se a tabela apresentada e a forma como classificou e organizou os dados é a mais adequada, tendo em conta o número de inquéritos. Se não for, elabore outra tabela.
- 3) Qual o número de crianças com menos de 5 anos de idade?
- 4) Qual a percentagem de rapazes que têm como número de calçado mais do que 27?
- 5) Que conjecturas é que pode adiantar, acerca das características físicas e pessoais desta amostra de alunos, relativamente aos dados obtidos?

Anexo 30

Segunda tarefa de “pré-modelação” criada por Patrícia: “*Já sou grande*”

Objetivo geral:

Pretende-se com esta tarefa, usar a estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.

Objetivo específico:

- Distinguir tipos de variáveis;
- Reconhecer a necessidade de agrupar dados como uma mais-valia para a sua organização em tabelas e elaboração de conjeturas

Conteúdos estatísticos:

- Classificação de variáveis;
- Tabelas de frequências

Materiais:

- Calculadoras científicas,
- Inquéritos
- Grelhas de registo das variáveis *peso* e *altura*.

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância



Pretende-se elaborar uma breve caracterização física dos alunos do pré-escolar que constituem a amostra, tendo-se escolhido as variáveis peso e altura.

- 1) A partir dos dados recolhidos, organize os mesmos da forma que lhe parecer mais adequada e que, posteriormente, lhe permita tirar conclusões.

Para a organização dos dados deverá ter em conta os seguintes aspetos:

- Tipo de variável estatística;
- Construção de uma tabela para cada uma das variáveis.

(Na construção da tabela deve atender ao tipo de variável estatística organizando os dados de modo a minimizar os efeitos da dispersão de dados para futuras conclusões).

- 2) Tendo em conta a organização dos dados por si efetuada, verifique se a forma como classificou e organizou os dados é a mais adequada, ou seja, se lhe permite ter uma visão ampla da distribuição dos dados recolhidos, permitindo-lhe retirar conclusões para a caracterização da amostra em relação a estas duas variáveis. Caso considere necessário, proceda à reformulação da tabela elaborada na questão 1).
- 3) Como classifica as variáveis em estudo. Justifique.
- 4) Que conjecturas pode adiantar, acerca das características físicas (peso e altura) desta amostra de alunos?

Anexo 31

Terceira tarefa de “pré-modelação” criada por Patrícia: *"Vida quotidiana e hábitos diários"*

Objetivo geral:

Utilização da estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.

Objetivo específico:

- Organizar dados qualitativos em tabelas de frequências;
- Representação de dados recolhidos na forma de gráfico e respetiva interpretação.

Conteúdos estatísticos:

- Classificação de variáveis;
- Tabelas de frequências
- Gráficos

Materiais:

- Calculadoras científicas,
- Questionários
- Tabelas de registo das variáveis *Desporto preferido; Hábitos/Prática de desporto; Posse de quarto próprio; Frequência de creche ou ama em anos anteriores e passatempos preferidos*
- Compasso, régua e transferidor.
- Computador.

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

No intuito de conhecer melhor a amostra inquirida, pretende-se elaborar uma breve descrição de alguns aspetos que constituem uma parte da caracterização do grupo escolhido.

Deve, no final desta tarefa, ser capaz de elaborar um pequeno texto (aprox. 10 linhas), onde consiga caracterizar a amostra, no que diz respeito às variáveis:

Desporto preferido;

Hábitos/Prática de desporto;

Posse de quarto próprio;

Frequência de creche ou ama em anos anteriores;

Passatempos preferidos.

Para a elaboração desse texto deve ter em conta os seguintes aspetos:

- 1) Comece por organizar os dados recolhidos em tabelas de frequências simples. Cada uma das variáveis deverá ser trabalhada em tabelas separadas.
- 2) Atendendo à organização de dados que efetuou traduza a informação obtida através de vários tipos de gráficos que permitam uma interpretação visual da mesma informação.
- 3) Verifique se considera adequada a escolha de gráficos para a interpretação de dados pretendida e caso considere pertinente, proceda à reelaboração dos mesmos para as variáveis que considera não estarem representadas da forma mais conveniente.
- 4) Quantas crianças frequentaram a creche em anos anteriores?
- 5) Qual o passatempo preferido destas crianças?
- 6) Partindo da interpretação gráfica obtida, elabore uma pequena composição onde faça uma breve caracterização dos aspetos estudados (aprox. 10 linhas).

Anexo 32

Quarta tarefa de “pré-modelação” criada por Patrícia: “*Alimentação e higiene*”

Objetivo geral:

Utilização da estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.

Objetivo específico:

- Organizar dados quantitativos discretos em tabelas de frequências;
- Representação de dados recolhidos na forma de gráfico e respetiva interpretação.



Conteúdos estatísticos:

- Classificação de variáveis;
- Tabelas de frequências.
- Gráficos.



Materiais:

- Calculadoras científicas,
- Questionários,
- Grelhas de registo das variáveis *Número de refeições por dia; Hábitos de higiene (nº de vezes que lavam mãos, dentes);*

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

Continuando a trabalhar os dados recolhidos nesta amostra de alunos do pré-escolar, debruçamo-nos agora sobre os seus hábitos diários.

À semelhança do que foi feito na tarefa anterior, no final desta tarefa, deverá ser capaz de elaborar um pequeno texto (aprox. 10 linhas), onde consiga caracterizar a amostra, no que diz respeito às variáveis:

- *Número de refeições diárias;*

- *Hábitos de higiene (nº de vezes que lavam mãos, dentes);*

Para a elaboração desse texto deve ter em conta os seguintes aspetos:

- 1) Comece por organizar os dados recolhidos em tabelas de frequências simples. Cada uma das variáveis deverá ser trabalhada em tabelas separadas. O que têm em comum todas estas variáveis?
- 2) Atendendo à organização de dados que efetuou traduza a informação obtida através de gráficos que permitam uma interpretação visual da mesma informação.
- 3) Verifique se considera adequada a escolha de gráficos para a interpretação de dados pretendida e caso considere pertinente, proceda à reelaboração dos mesmos para as variáveis que considera não estarem representadas da forma mais conveniente.
- 4) Qual a percentagem de crianças que lava diariamente as mãos duas ou mais vezes?
- 5) Partindo da interpretação gráfica obtida, elabore uma pequena composição onde faça uma breve caracterização dos aspetos estudados (aprox. 10 linhas).

Anexo 33

Quinta tarefa de “pré-modelação” criada por Patrícia: “A hora da soneca”

Objetivo geral:

Utilização da estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.



Objetivo específico:

- Organizar dados quantitativos contínuos em tabelas de frequências;
- Representação de dados recolhidos na forma de gráfico e respetiva interpretação.

Conteúdos estatísticos:

- Classificação de variáveis;
- Tabelas de frequências.
- Gráficos.

Materiais:

- Calculadoras científicas,
- Questionários
- Tabelas de registo da variável: *número de horas de sono diárias*.

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

Na sequência do trabalho realizado nas tarefas anteriores onde se tem feito a caracterização dos alunos segundo diferentes variáveis, pretende-se agora estudar as características deste grupo relativamente à variável *número de horas de sono diárias*.

Para tal, deve organizar o seu trabalho do seguinte modo:

- 1) Comece por organizar os dados recolhidos em tabelas de frequências.

- 2) Verifique se a organização que efetuou na alínea anterior se adequa às necessidades de interpretação de resultados e caso tal não se verifique proceda à sua reformulação.
- 3) Atendendo à organização de dados elaborada nas alíneas anteriores, traduza a informação obtida através de gráfico(s) que permitam uma interpretação visual da mesma informação.
- 4) Verifique se considera adequada a representação gráfica efetuada para a interpretação de dados pretendida e caso considere pertinente, proceda à reelaboração dos mesmos para as variáveis que considera não estarem representadas da forma mais conveniente.
- 5) Qual o número de crianças que dorme mais do que 10 horas diárias?
- 6) Partindo da interpretação gráfica obtida, elabore uma pequena composição onde faça uma breve caracterização dos aspetos estudados (aprox. 4 linhas).

Anexo 34

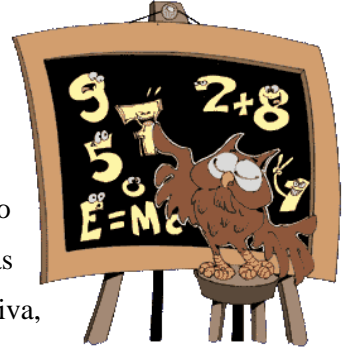
Sexta tarefa de “pré-modelação” criada por Patrícia: “*Média, moda e mediana*”

Objetivo geral:

Utilização da estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.

Objetivo específico:

- Realizar um estudo comparativo no qual seja solicitado o cálculo das medidas de localização (sempre que possível), partindo grelhas de recolhas de dados reais distintos (englobando variável qualitativa, quantitativa discreta e quantitativa contínua).



Conteúdos estatísticos:

- Classificação de variáveis;
- Tabelas de frequências.
- Medidas de localização (média, moda e mediana).

Materiais:

- Calculadoras científicas,
- Questionários
- Tabelas de registo das variáveis: *N.º de vezes que lavam mãos, N.º horas de sono diárias e Passatempos preferidos.*

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

Recordando o trabalho já realizado em tarefas anteriores nas quais já procedeu à organização dos dados em tabelas de frequências para as seguintes variáveis:

- Passatempos preferido (Tarefa n.º 3)
- N.º de vezes que lavam mãos (Tarefa n.º 4)
- N.º horas de sono diárias (Tarefa n.º 5)

- 1) Utilize a informação já organizada para proceder à determinação das medidas de localização (média, moda e mediana) relativamente às referidas variáveis, sempre que for possível.

O que pode concluir?

Elabore um pequeno texto (aprox. 10 linhas) onde faça uma caracterização da amostra escolhida segundo as conclusões que retirou.

- 2) Todas as variáveis acima referidas são suscetíveis de cálculo das mesmas medidas de localização? Caso considere que não, qual(ais) deve(m) ser a(s) condição(ões) necessária(s) para a aplicação de cada um destas medidas?
- 3) Que significado tem o valor da mediana no contexto em causa?
- 4) Qual a percentagem de alunos da amostra recolhida que lavam as mãos um número de vezes acima da média?

Anexo 35

Sétima tarefa de “pré-modelação” criada por Patrícia: “*Brincar com os números*”

Objetivo geral:

Utilização da estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.

Objetivo específico:

- Compreender a influência da introdução de novos dados na amostra na determinação das medidas de localização média e mediana.



Conteúdos estatísticos:

- Tabelas de frequências.
- Medidas de localização (média e mediana).

Materiais:

- Calculadoras científicas,
- Questionários
- Tabelas de registo das variáveis: *N.º de calçado e Altura*

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

Recorrendo à organização de dados em tabelas realizadas em tarefas anteriores para as variáveis:

- Número de calçado (Tarefa n.º 1)
- Altura (Tarefa n.º 2)

- 1) Utilize a informação já organizada para proceder à determinação das medidas de localização (média e mediana) relativamente às referidas variáveis.

O que pode concluir?

Elabore um pequeno texto (aprox. 5 linhas) onde faça uma caracterização da amostra escolhida segundo as conclusões que retirou.

- 2) Suponha que **foram introduzidas na amostra** tantas crianças quantas as que já existiam de modo a formar pares para realizar um jogo, em que cada criança “nova” faz par com cada criança já existente na amostra, passando assim a amostra a ter o dobro das crianças.

As novas crianças introduzidas na amostra, foram selecionadas de outras salas da escola, de forma a cumprir os seguintes requisitos:

- Cada criança “nova” possui mais 3 cm de altura do que o seu par.
- Cada criança “nova” calça um número acima do seu par.

Determine a média e a mediana para cada uma das variáveis em estudo, para a nova amostra. O que pode concluir?

- 3) A educadora desta turma quer mascarar os seus alunos neste Carnaval e propôs uma votação para a máscara que toda a turma deveria usar num desfile. As crianças votaram e decidiram que gostavam de se mascarar de palhaços, vestindo fardas coloridas, narizes vermelhos e grandes sapatos.

Foram encomendados os fatos à medida de cada aluno e para os sapatos decidiu-se que cada aluno calçaria sapatos com o dobro do seu número real de calçado. Qual será a média, moda e mediana dos números dos sapatos encomendados?

Será possível encontrar uma relação entre estes valores e a média, moda e mediana dos valores de calçado real dos alunos? Justifique.

Anexo 36

Oitava tarefa de “pré-modelação” criada por Patrícia: “*As peças de fruta*”

Objetivo geral:

Utilização da estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.

Objetivo específico:

- Compreender a importância do cálculo da mediana e quartis e respetiva interpretação gráfica

Conteúdos estatísticos:

- Mediana
- Quartis
- Diagrama de extremos e quartis

Materiais:

- Computador
- Questionários
- Tabelas de registo da variável: *n.º de peças de frutas que come por dia.*

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

No intuito de conhecer um pouco mais sobre os hábitos alimentares das crianças em estudo, questionaram-se os respetivos encarregados de educação sobre o n.º de peças de fruta que consomem diariamente.

Nesta tarefa deve organizar o seu trabalho de modo a conseguir responder às seguintes questões:

- 1) Comece por determinar a mediana e os quartis da distribuição de dados.

- 2) Proceda à representação do diagrama de extremos e quartis.
- 3) Verifique se a organização que efetuou na alínea anterior se adequa às necessidades de interpretação de resultados e caso tal não se verifique proceda à sua reformulação.
- 4) Atendendo ao que elaborou anteriormente, responda agora à seguinte questão:

O que significa o valor que encontrou para $Q1$, $Q3$ e mediana? Que interpretações poderão daí advir? Elabore uma pequena composição onde faça uma breve caracterização dos aspetos estudados.

Anexo 37

Primeira tarefa de modelação criada por Patrícia: “*Relacionando Variáveis*”

Objetivo geral:

Utilização da Estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.



Objetivo específico:

A partir dos conjuntos de dados reais criar uma grelha entre duas variáveis que permita tirar conclusões acerca:

- Da relação entre as duas variáveis e interpretação em contexto real;
- Interpretar o coeficiente de correlação linear;
- Diagrama de dispersão
- Tipos de regressão;
- Prever outros resultados.

Conteúdos estatísticos:

Distribuições bidimensionais

Materiais:

- Computador
- Questionários
- Grelhas de registo dos dados recolhidos em campo

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

Nesta tarefa pretende-se que comecemos a investigar de que forma se relacionam as variáveis e os dados recolhidos, utilizando distribuições bidimensionais.

Comece por investigar a relação existente entre os seguintes pares de variáveis.

- Altura -. N.º sapato

Para isso, deve:

- Fazer a representação do respetivo diagrama de dispersão;

- Procurar o modelo de regressão mais adequado, com base no respetivo coeficiente de correlação linear;

- 1) Verifique se o trabalho que efetuou na alínea anterior se adequa às necessidades de interpretação de resultados e caso tal não se verifique proceda à sua reformulação.
- 2) Será que podemos estimar quanto mediria uma criança (segundo o modelo encontrado) que calçasse o 30?
- 3) E que número calçaria uma criança com 1,02 de altura?
- 4) Partindo da interpretação gráfica obtida, elabore uma pequena composição onde faça uma breve caracterização dos aspetos estudados, dando ênfase à relação que consegue encontrar entre as variáveis.

Anexo 38

Segunda tarefa de modelação criada por Patrícia: *“Estarei gordinho ou serei baixinho?”*

Objetivo geral:

Utilização da Estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.

Objetivo específico:

A partir de conjuntos de dados reais ser capaz de:

- Estabelecer uma relação entre as duas variáveis e respetiva interpretação em contexto real;
- Interpretar o coeficiente de correlação linear;
- Representar a distribuição através de um diagrama de dispersão (nuvem de pontos)
- Identificar diferentes tipos de regressão
- Prever resultados

Conteúdos estatísticos:

Distribuições bidimensionais

Materiais:

- Computador
- Questionários
- Tabelas de registo dos dados recolhidos em campo

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância



“O IMC (ou índice de massa corpórea) foi criado para uma melhor orientação do público sobre o seu peso em relação a sua altura, resumindo, se a pessoa está gorda ou magra.

O IMC (Índice de Massa Corporal) é uma fórmula matemática com objetivo de sinalizar a magreza excessiva, obesidade ou a obesidade mórbida. O seu cálculo é simples:

$$IMC = \frac{\text{peso (kg)}}{\text{altura}^2 \text{ (m)}}$$

Depois de calculado o referido índice, interpreta-se o valor obtido do seguinte modo:

IMC	Interpretação
abaixo de 18,5	Subnutrido ou abaixo do peso
entre 18,6 e 24,9	Peso ideal (parabéns)
entre 25,0 e 29,9	Levemente acima do peso
entre 30,0 e 34,9	Primeiro grau de obesidade
entre 35,0 e 39,9	Segundo grau de obesidade
acima de 40	Obesidade mórbida

1. Com base nos dados recolhidos da amostra de crianças do pré-escolar estudada, construa uma nuvem de pontos que relacione as variáveis o peso (x) e a altura (y) das crianças.
2. **Apenas por observação** do gráfico obtido, acha que existe uma relação entre as variáveis estudadas? Essa relação é positiva ou negativa? É forte ou fraca? Justifique.
3. Construa o modelo matemático de regressão **linear** e determine o respetivo coeficiente de correlação linear. Confirmam-se as conjecturas elaboradas na questão 2? Justifique.
4. De acordo com o modelo encontrado, responda às seguintes questões:
 - 4.1. Que altura deverá ter uma criança com 28kg? Justifique a sua resposta apresentando os cálculos necessários.
 - 4.2. Qual o peso ideal para uma criança com 1,20m? Justifique a sua resposta apresentando os cálculos necessários.
 - 4.3. Se achar pertinente, construa uma ou duas questões como as referidas em 4.1 e 4.2, que lhe permita testar o modelo matemático encontrado. Caso contrário, explique por que razão não o fez.

5. Construa um pequeno texto, onde expresse a sua opinião sobre esta amostra no que se refere à relação peso – altura das crianças. Deverá na sua composição ter em atenção todas as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, confrontando-as com o preenchimento de uma tabela como a que se segue, utilizando para isso o EXCEL:

Criança n.º	Peso (kg)	Altura (m)	IMC	Interpretação do IMC
1	18,5	1,10	$18,5/(1,10^2)=$ 15,29	Abaixo do Peso
2
...
...

Anexo 39

Terceira tarefa de modelação criada por Patrícia: “*Estarei magrinho ou cansadinho?*”

Objetivo geral:

Utilização da Estatística como ferramenta auxiliar no estudo de situações do mundo real.

Objetivo específico:

A partir de conjuntos de dados reais ser capaz de:

- Estabelecer uma relação entre as duas variáveis e respetiva interpretação em contexto real;
- Interpretar o coeficiente de correlação linear;
- Representar a distribuição através de um diagrama de dispersão (nuvem de pontos)
- Identificar diferentes tipos de regressão
- Prever resultados

Conteúdos estatísticos:

Distribuições bidimensionais

Materiais:

- Computador
- Questionários
- Tabelas de registo dos dados recolhidos em campo

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

Lê com atenção a seguinte notícia, publicada na News Medical (02 de Janeiro de 2008)

Duração do sono da criança influencia o comportamento do peso.¹

(...) Crianças que não dormem o suficiente todas as noites são mais propensas a ter excesso de peso e têm problemas de comportamento (...). O estudo, de autoria do Professor Ed Mitchell, da Universidade de Auckland, na Nova Zelândia, teve foco em 591 crianças de sete anos de idade, cuja duração do sono foi avaliada por actigrafia (um método não-invasivo utilizado para estudar os padrões de sono-vigília) em quatro estágios diferentes das suas jovens vidas: no nascimento, no primeiro ano de idade, aos três anos e meio e aos sete anos.

De acordo com os resultados, o tempo médio gasto na cama foi de 10,1 horas. (...).

Crianças que dormiam menos de nove horas eram mais propensas a ter excesso de peso ou obesos e ter um aumento de 3,34% na gordura corporal do que aqueles que dormiam por mais de nove horas. Curta duração do sono também foi associada com maior instabilidade emocional.

"O sono é importante para a saúde e bem-estar ao longo da vida", disse o professor Mitchell. "Poucos estudos têm objetivamente medido a duração do sono. Neste grande estudo do sono em sete anos de idade, houve variação considerável na duração do sono. A duração do sono foi de 40 minutos a mais no inverno que no verão e foi de 31 minutos a mais durante a semana do que no fim-de-semana. Uma curta duração do sono foi associada com um risco três vezes maior de a criança apresentar excesso de peso ou obesidade. Este efeito é independente da atividade física ou televisão assistida. Atenção ao sono na infância: pode ser uma estratégia importante para reduzir a epidemia de obesidade".

É recomendado que as crianças em idade pré-escolar durmam entre 11-13 horas por noite e crianças em idade escolar entre 10-11 horas de sono por noite.

1. Com base nos dados recolhidos da amostra de crianças do pré-escolar que estamos a estudar, construa uma nuvem de pontos que relacione as variáveis o peso (x) e número de horas de sono (y) das crianças.
2. **Apenas por observação** do gráfico obtido, acha que existe uma relação entre as variáveis estudadas? É forte ou fraca? Justifique.

¹ Disponível em <http://www.news-medical.net/news/2008/01/02/45/Portuguese.aspx>

3. Construa um modelo matemático de regressão, representando-o adequadamente no respetivo gráfico (Utilize uma função polinomial de grau 4). Confirmam-se as conjecturas elaboradas na questão 2? Justifique.
4. De acordo com o modelo encontrado, responda às seguintes questões:
5. Quantas horas de sono deverá dormir uma criança com 21kg de peso?
6. Se achar pertinente, construa uma ou duas questões que lhe permitam testar o modelo matemático encontrado. Caso contrário, explique porque razão não o fez.
7. Construa um pequeno texto, onde expresse a sua opinião sobre esta amostra no que se refere à relação peso – horas de sono. Deverá na sua composição ter em atenção as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, confrontando-as com as conclusões obtidas pelo professor Mitchell, respondendo a questões como:
 - Será que este grupo de crianças dorme um número adequado de horas?
 - Será que o seu peso se encontra afetado por este facto?
 - ...

Anexo 40

Quarta tarefa de modelação criada por Patrícia: *“Será que estas variáveis estão relacionadas?”*

Objetivo:

Pretende-se com esta tarefa, aplicar como ferramenta conceitos estatísticos aplicados a situações do mundo real. A partir dos conjuntos de dados reais criar uma tabela entre duas variáveis que permita relacionar dados.

Conteúdos estatísticos:

Relação entre as duas variáveis e interpretação em contexto real; Interpretar o coeficiente de correlação linear; Diagrama de dispersão; Diferentes tipos de Regressão; Estimar resultados.

Materiais:

- Computador - software EXCEL.
- Inquéritos
- Grelhas de registo dos dados recolhidos em campo

Curso profissional envolvido: Curso Profissional de Técnico de Apoio à Infância

Num agrupamento de escolas algarvio, as alunas do curso profissional de Técnico de Apoio à Infância têm vindo a estudar as distribuições bidimensionais.

Após várias tarefas realizadas sobre uma amostra de dados recolhidos, a professora apercebeu-se que durante a sua realização surgiam comentários como:



Para que as alunas não ficassem sem resposta, a professora propõe:



Usando as potencialidades do EXCEL:

1. Formule duas conjecturas acerca de variáveis que possam estar relacionadas (ainda não estudadas anteriormente).

Conjetura 1

Conjetura 2

2. Registe em EXCEL todos os dados recolhidos, em duas tabelas distintas, uma para cada situação:

Número de identificação da criança		
1		
2		
3		
...		

3. Represente os diagramas de dispersão, com recurso ao EXCEL.
4. Consideremos que existe correlação entre as duas variáveis, mas não necessariamente linear. Represente sobre o diagrama de dispersão, as várias linhas de tendência, e apresente todas as possibilidades que testou (diagramas separados).
5. Identifique qual a função que melhor traduz cada uma das situações.

Indique a equação da função obtida e determine o coeficiente de correlação linear.

Situação	Função escolhida	Coeficiente de correlação linear (r)
Situação 1		
Situação 2		

6. Por observação direta do diagrama e tendo em conta os coeficientes de correlação linear encontrados, como considera a possível correlação? Existe ou não? Será positiva ou negativa? Forte ou fraca?

Situação1_____

Situação2_____

7. Teste os modelos encontrados, fazendo estimativas.
8. As suas conjecturas verificaram-se? Justifique a sua opinião.

APÊNDICES

Apêndice 1

Carta de autorização à escola

Exma. Sra. Diretora do Agrupamento de Escolas

Eu, Nélida Martins Filipe, professora profissionalizada contratada do grupo de recrutamento 500, venho solicitar autorização à V. Excelência, para realizar nesta Escola, a recolha de dados para uma investigação na área da educação – especialidade Didática da Matemática.

Encontro-me, neste momento, a frequentar o curso de Doutoramento em Educação na especialidade de Didática da Matemática no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Neste âmbito, estou a realizar a minha dissertação subordinada ao tema **“Ensinar Matemática com modelação estatística aos cursos profissionais: desafios ao conhecimento profissional dos professores num contexto de trabalho colaborativo.”**

Esta investigação visa dar novos contributos sobre o conhecimento profissional que os professores de Matemática de cursos profissionais mobilizam na gestão curricular do programa de Matemática com vista à realização de tarefas de modelação no âmbito da estatística, bem como a evolução desse conhecimento ao longo do desenvolvimento dessa gestão curricular em contexto de trabalho colaborativo entre pares.

Pretende-se com este estudo contribuir para a investigação em Educação Matemática em Portugal dando deste modo a conhecer o trabalho que será desenvolvido com este grupo de trabalho colaborativo, não só com a publicação das tarefas de modelação resultantes, como também a publicação de artigos para revistas de Educação Matemática e intervenções em congressos.

A concretização do estudo em causa implica a recolha de dados sob a forma de entrevistas aos professores, reuniões de trabalho colaborativo com os professores envolvidos no estudo, com gravações em vídeo e áudio e registo em vídeo de observação de aulas dos professores participantes onde serão implementadas as tarefas de modelação.

A investigação decorrerá no ano letivo, 2011/2012, nas aulas de Matemática do 10º ano de cursos profissionais e em reuniões de trabalho colaborativo com docentes de Matemática que lecionem a essas turmas.

Informo ainda que todos os participantes e respetivos encarregados de educação serão informados sobre os objetivos do estudo e será solicitada autorização para efetuar gravações (vídeo) nas turmas envolvidas. Será assegurado o anonimato a todos os participantes envolvidos no estudo, com os quais assumirei o compromisso de não utilizar os dados recolhidos para outro fim que não seja o do âmbito desta investigação.

20 de junho de 2011

Pede deferimento,

(Nélida Martins Filipe)

Apêndice 2

Carta de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. Sr. Encarregado de educação

20 de janeiro de 2012

Eu, Nélida Martins Filipe, sou professora de matemática na escola secundária encontro-me, neste momento, a frequentar o curso de Doutoramento em Educação na especialidade de Didática da Matemática no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Neste âmbito, estou a realizar a minha dissertação subordinada ao tema **“Ensinar Matemática com modelação estatística aos cursos profissionais: desafios ao conhecimento profissional dos professores num contexto de trabalho colaborativo.”**

A concretização do estudo em causa implica a recolha de dados com gravações em vídeo de observação de aulas dos professores participantes onde serão implementadas as tarefas de modelação. Para o efeito e dado que as gravações serão realizadas durante as aulas, solicito a sua autorização para gravar as aulas onde estará presente o seu educando, apenas nos contextos acima descritos. Destaca-se que os alunos não são objeto de estudo e todas as imagens captadas terão como foco o professor, evitando ao máximo a gravação direta de imagens de alunos.

Saliento que os dados recolhidos serão usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a privacidade e anonimato dos participantes. Manifesto, ainda, a minha inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento adicional que considere necessário.

Na expectativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

A investigadora

(Nélida Filipe)

Eu,....., Encarregado de Educação do aluno, nº....., da turma....., não autorizo/autorizo (riscar o que não interessa) que a Professora Nélida Filipe grave em vídeo as aulas onde estará presente o meu educando, apenas no âmbito da investigação que me foi dada a conhecer.

Data:/...../2012

Apêndice 3

Guião de sessão de trabalho colaborativo nº1

Professores: Nélida; Sara; Patrícia e Filipa

Data: 20 de outubro de 2011

Sala: Gabinete de matemática

Hora: 13:30 às 14:45

Aspetos a tratar	<p>Ponto um – Propósito e apresentação do objetivo, relevância e metodologia do estudo;</p> <p>Ponto dois – Negociação com as professoras de um plano de trabalho com vista a clarificar:</p> <ul style="list-style-type: none">✓ As exigências que a realização do projeto implicará;✓ Envolvimento, papéis e responsabilidades de cada uma de nós;✓ Possibilidade de renegociação da atividade conjunta de modo que vá ao encontro das motivações e necessidades de cada elemento do grupo de trabalho.
-------------------------	---

Apêndice 4

Guião de sessão de trabalho colaborativo nº2

Data: 2 de novembro de 2011

Horário: 14:45 às 16:15

Sala: Gabinete de Matemática

Tema: Programa de Matemática para o ensino secundário profissional

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Analisar o programa de Matemática para o ensino profissional, em especial a Estatística, e identificar qual o papel e a importância que este dedica à modelação matemática - como é encarada a modelação matemática (objetivo/capacidade a desenvolver/tarefa/...? com que frequência aparecem referências à modelação matemática? em que conteúdo se recomenda que seja usada? de que modo? com que recursos?...)

Objetivos

- Analisar o programa de Matemática para o ensino profissional no que diz respeito:
 - ✓ À visão global do programa;
 - ✓ Competências a desenvolver;
 - ✓ Orientações metodológicas/avaliação;
 - ✓ Ao elenco modular;
- Analisar o módulo A3-Estatística no que diz respeito:
 - ✓ Apresentação do módulo;
 - ✓ Competências visadas;
 - ✓ Objetivos de aprendizagem;
 - ✓ Âmbito dos conteúdos;
 - ✓ Situações de aprendizagem/Avaliação;
- Refletir conjuntamente sobre as orientações metodológicas sugeridas pelo programa oficial no que diz respeito às aplicações da Matemática e modelação matemática no módulo de Estatística.

Proposta de trabalho e exploração:

(15 minutos)

- Iniciar um debate com as questões presentes no guião da 1ª entrevista relativamente ao programa de Matemática para o ensino secundário profissional (para que todas as professoras tenham uma ideia das concepções e pontos de vista de cada uma, antes se iniciar à reflexão conjunta sobre o programa):
 - ✓ Que interpretação fazem do programa dos cursos profissionais?
 - ✓ Que opinião têm sobre as orientações curriculares expressas no programa?
 - ✓ Quais destaca e que importância lhes dá?
 - relativamente à adequação dos módulos que são lecionados aos vários cursos?
 - relativamente às orientações metodológicas?
 - à avaliação?
 - ✓ Que tipo de tarefas acha que devem ser valorizadas no programa?

(30 minutos)

- Projeção do programa geral de Matemática para o ensino secundário profissional com o objetivo de realizarmos uma análise aprofundada e debate de ideias acerca do seu objetivo, visão geral do programa, competências a desenvolver e essencialmente refletir sobre a importância das orientações curriculares presentes no programa, de modo a ficar clarificado para todas as professoras e assentar pontos convergentes de opinião confrontando as concepções, pontos de vistas e interpretações das professoras sobre o programa.

Questões orientadoras: Relativamente ao programa em geral, o que diz este acerca da modelação matemática e a implementação de tarefas de modelação matemática e em que pontos do programa aparece essa referência?

Com que objetivos o refere?

Qual a importância que lhe atribui e o porquê da implementação?

Que competências prevê que desenvolva? Razões...

O que dizem as orientações metodológicas acerca da modelação matemática e que sugestões referem para a sua implementação (recursos, ...)?

(30 minutos)

- Projeção do módulo A3-Estatística e promover um debate de modo a analisarmos conjuntamente todos os pontos do programa para este módulo e refletirmos acerca das suas orientações curriculares e tipo de tarefas, baseando-nos nas ideias e respostas de cada professora na entrevista e inicialmente nesta reunião.

Questões orientadoras: Relativamente ao programa do módulo A3-Estatística, o que diz este acerca da modelação matemática e a implementação de tarefas de modelação matemática e em que pontos do programa aparece essa referência e de que modo o faz?

Quais os objetivos gerais deste módulo?

Que competências prevê que desenvolva? Razões...

Quais os objetivos de aprendizagem presentes neste módulo e de que modo com a implementação de tarefas de modelação matemática se poderão atingir?

De que forma a modelação matemática se adequa a este módulo e como poderá fazer emergir os conteúdos estatísticos a lecionar neste módulo?

(15 minutos)

- Tendo em conta o debate anterior, refletir sobre a adequação e importação das aplicações da Matemática e modelação Matemática. **E QUAIS SÃO AFINAL AS ORIENTAÇÕES? E O QUE DIZ AFINAL SOBRE MODELAÇÃO E OU APLICAÇÕES?**

Sintetizar as orientações metodológicas sobre a modelação da matemática e ou aplicações

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, projetor, caderno de notas de campo.

Recursos teóricos: Programa oficial de Matemática para o ensino secundário profissional (enviado previamente por email para todas as professoras)

Apêndice 5

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 3

Data: 16 de novembro de 2011

Horário: 14:45 às 16:15

Sala: D4

Tema: Caraterizar modelação matemática e tarefa de modelação matemática

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Identificar e analisar tarefas de modelação matemática e de aplicações da matemática, com o objetivo de definir informalmente modelação matemática e apontar caraterísticas das tarefas de modelação matemática.

Objetivos

- Compreender e conhecer as conceções iniciais de cada professora sobre o que entendem por modelação matemática e tarefa de modelação matemática;
- Distinguir entre tarefa de modelação e tarefa de aplicações da matemática;
- Definir (informalmente) modelação matemática;
- Caraterizar tarefa de modelação matemática;
- Identificar (informalmente) as várias fases de modelação matemática;
- Apresentar o ciclo de modelação de Kerr e Maki e conformar uma das tarefas de modelação matemática ao esquema de modelação.

Proposta de trabalho e exploração:

1ª Parte : (15 minutos)

- Iniciar um debate com as questões presentes no guião da 1ª entrevista relativamente à modelação matemática (para que todas as professoras tenham uma ideia das conceções e

pontos de vista de cada uma, antes se iniciar à reflexão conjunta sobre modelação matemática e tarefa de modelação matemática):

- ✓ O que entende por modelação matemática?
- ✓ Qual a pertinência da modelação matemática e a que objetivos do ensino corresponde?
- ✓ Que papel lhes atribui na aprendizagem dos alunos?

2ª Parte: (30 minutos)

- Distribuição em formato papel de tarefas de modelação matemática e tarefas de aplicações da matemática com o objetivo de distinguirmos tarefa de modelação matemática de tarefa de aplicações da matemática (10 minutos).

(20 minutos)

Questões orientadoras: Qual (ais) da(s) tarefa(s) é (são) tarefa(s) de modelação matemática? Apresentem razões para a vossa escolha?

Identificação das tarefas de modelação: tarefa 3; tarefa 4; tarefa 6

Identificação das tarefas de aplicações da matemática: tarefa 1; tarefa 5

- ✓ **Porque considera que as tarefas anteriores são de modelação matemática? E porque razão as outras não o são? O que as distingue?**

Apresentar, em *power point*, uma tabela para ajudar a caraterizar as tarefas de modelação e para que as professoras entendam que as tarefas de modelação podem ter várias entradas. Caraterizar quanto aos seguintes aspetos: o modelo é dado ou não? Os dados são dados ou não? Qual o grau de abertura da tarefa (tipo de questões, especificidade das questões)? Qual o grau de realismo da tarefa?

✓ **O que entende afinal por modelação matemática?**

Tarefa	O modelo matemático é dado/sugerido?	Os dados são fornecidos?	Grau de abertura da tarefa (tipo de questões, especificidade das questões)	Realismo da tarefa
1				
3				
4				
5				
6				

3ª Parte: (45 minutos)

- Resolver a tarefa nº 3 (10 minutos)

Questão orientadora: Ao resolverem esta tarefa, conseguem identificar as várias fases da modelação matemática? (10 minutos)

- Através de um power point, projeção e explicação breve sobre o ciclo de modelação de Kerr e Maki (entregar em formato papel o esquema referente ao ciclo de modelação de Kerr e Maki) e conformar com a tarefa de modelação nº 3 (10 minutos)

(30 minutos) **Questões orientadoras finais:** Tendo em conta o esquema apresentado anteriormente:

- ✓ Como acha que pode integrar, na sua prática letiva diária, tarefas de modelação matemática na sala de aula?
- ✓ Como vê o uso da tecnologia em Matemática quando implementa tarefas de modelação matemática?
- ✓ Quanto às tarefas de modelação nas aulas de Matemática, que dificuldades se levantam a si na:
 - elaboração
 - recolha
 - implementação
 - avaliação

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, projetor, power point, caderno de notas de campo, calculadoras gráficas.

Recursos teóricos: Tarefas de modelação e de aplicações da Matemática, ciclo de modelação de Kerr e Maki.

Apêndice 6

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 4

Data: 24 de novembro de 2011

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: D4

Tema: Definir modelação matemática

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Analisar e discutir artigos sobre modelação matemática e modelação matemática em sala de aula, visando a reflexão conjunta sobre as várias definições presentes e seleccionar conjuntamente uma definição.

Objetivos

- Analisar artigos sobre modelação matemática;
- Apresentar, em debate, as ideias gerais de cada autor sobre o que se entende por modelação matemática;
- Analisar as tarefas de modelação apresentadas na sessão anterior e compreender a razão de serem tarefas de modelação;
- Definir modelação matemática com base em sustentação teórica;
- Seleccionar uma corrente teórica sobre o que se entende por modelação matemática.

Proposta de trabalho e exploração:

(Os artigos serão enviados para as professoras com uma semana de antecedência, para que seja feita uma leitura mais aprofundada por todas com o objetivo de uma reflexão mais profunda e maior rentabilização da sessão de trabalho colaborativo.

1ª Parte : (45 minutos)

Questão orientadora: Quais as ideias gerais que cada autor apresenta sobre o que entende por modelação matemática e suas características? Quais as principais diferenças?

2ª Parte: (45 minutos)

Reflexão conjunta sobre as várias definições e apresentar uma definição conjunta de modelação matemática sustentada em fundamentação teórica.

Questões orientadoras:

Tendo em conta as tarefas de modelação apresentadas na sessão anterior a sua classificação enquadra-se no que cada autor entende por modelação matemática? De que forma?

Afinal o que entendem por modelação matemática? Tendo por base os vários autores estudados, com qual definição se identificam mais? Porquê?

Professoras	Artigo	O que é modelação matemática ?	Fases da modelação	Exemplos de modelação	Integração da modelação no currículo	Potencialidades/Dificuldades
Sara	Niss, M.(1992)					
	Swetz, F. (1992),					
Patrícia	Niss, M.(1992)					
	Swetz, F. (1992),					
Filipa	Niss, M.(1992)					
	Swetz, F. (1992),					
Nélida	Niss, M. (1992)					
	Swetz, F. (1992)					

Escolha conjunta do autor a seguir e apresentar a definição baseada na reflexão realizada.

Professoras	De que forma as tarefas de modelação identificadas se relacionam com as ideias de cada autor	O que é modelação matemática?	Vertente teórica com a qual se identificam e razões.
Sara			
Patrícia			
Filipa			

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, projetor, caderno de notas de campo.

Recursos teóricos: Artigos sobre modelação matemática e tarefas de modelação da sessão 3.

Niss, M. (1992), O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. Artigo publicado na revista nº 23 Educação e Matemática: APM.

Swetz, F. (1992), Quando e como podemos usar modelação? Artigo publicado na revista nº 23 Educação e Matemática: APM.

Apêndice 7

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 5

Data: 7 de dezembro de 2011

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: D4

Tema: Ciclos de modelação matemática

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Analisar vários ciclos de modelação matemática e interpretação dos mesmos pelas professoras.

Objetivos

- Analisar documentos sobre ciclos de modelação matemática;
- Interpretar, em conjunto, as ideias gerais de cada autor sobre cada ciclo de modelação;
- Conformar a tarefa apresentada na sessão 3 com cada um dos ciclos;
- Refletir sobre a adequabilidade de cada ciclo de modelação à tarefa apresentada.
- Selecionar um ciclo de modelação para base de sustentação à criação, planificação e implementação das futuras tarefas de modelação matemática.

Proposta de trabalho e exploração:

(Os ciclos serão enviados para as professoras com duas semanas de antecedência, para que seja feita uma leitura mais aprofundada por todas com o objetivo de uma reflexão mais profunda e maior rentabilização da sessão de trabalho colaborativo)

1ª Parte : (45 minutos)

Questão orientadora: Que interpretação fazem de cada ciclo de modelação? Quais as fases de modelação presente em cada ciclo e de que forma se relacionam? Quais as diferenças/semelhanças que destacam entre os vários ciclos apresentados?

Elaboração de uma tabela síntese de modo a recolher a interpretação de cada professora sobre cada ciclo de modelação (projeção da tabela):

Profs	Autor	Interpretação de cada ciclo (colocar tópicos de cada professora)	Quais as várias fases do ciclo de modelação? Relações entre as fases e interpretação	Diferenças/se melhanças
Sara	Kerr e Maki			
	Lesh			
	Borromeo Ferri			
Patrícia	Kerr e Maki			
	Lesh			
	Borromeo Ferri			
Filipa	Kerr e Maki			
	Lesh			
	Borromeo Ferri			

Reflexão conjunta sobre a interpretação de cada ciclo e conclusões

2ª Parte: (45 minutos)

Colaborativamente conformar a tarefa 3 com cada ciclo de modelação.

Questões orientadoras: De que modo se poderá conformar a tarefa 3 a cada ciclo de modelação? Quais as dificuldades que surgem? Qual o ciclo que melhor se adapta?

Ciclos	Conformação da tarefa a cada ciclo (em conjunto)	Interpretação da conformação da tarefa a cada ciclo e dificuldades
Kerr e Maki		
Lesh		
Borromeo Ferri		

Escolha conjunta do autor a seguir e apresentar a definição baseada na reflexão realizada.

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, projetor, caderno de notas de campo.

Recursos teóricos: Ciclos de modelação matemática, tarefa 3 apresentada na sessão 3.

Apêndice 8

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 6

Data: 15 de dezembro de 2011

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: Gabinete de Matemática

Tema: Perfis de desempenho dos cursos profissionais

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Analisar os perfis de desempenho dos três cursos profissionais e debate sobre possíveis situações do mundo real que possam vir a ser modelados em sala de aula

Objetivos

- Analisar documentos sobre os perfis de desempenho dos três cursos profissionais;
- Debate de ideias iniciais que surjam sobre possíveis situações do mundo real que possam ser modeladas em sala de aula;
- Assumir um compromisso de trabalho e de pesquisa sobre situações do mundo real, durante a interrupção letiva do Natal, no que diz respeito a cada curso profissional.

Proposta de trabalho e exploração:

(Os perfis de desempenho serão enviados para as professoras com uma semana de antecedência, para que seja feita uma leitura mais aprofundada por todas com o objetivo de uma reflexão mais profunda e maior rentabilização da sessão de trabalho colaborativo)

1ª Parte : (15 minutos+60 minutos)

Questão orientadora: Quais as saídas profissionais referentes a cada um dos cursos?
Considerando cada um dos cursos, que possíveis situações do mundo real poderão ser modeladas em sala de aula, tendo em conta o que sabem sobre modelação matemática, tarefa de modelação matemática, fases de modelação e ciclos de modelação?

Elaboração de uma tabela síntese de modo a recolher a informação

Curso técnico profissional de:	Saídas profissionais	Possíveis situações do mundo real
Gestão desportiva		Filipa Patrícia Sara
Cozinha/Pastelaria		Filipa Patrícia Sara
Apoio à infância		Filipa Patrícia Sara
Síntese conjunta de ideias possíveis de pesquisa:		

2ª Parte: (15 minutos)

Estabelecer um compromisso de que iremos pesquisar sobre as primeiras ideias “lançadas” para cada um dos cursos profissionais, tendo em conta o conceito de modelação matemática e tarefa de modelação, fases e ciclos de modelação.

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, caderno de notas de campo.

Recursos teóricos: Perfis de desempenho dos cursos profissionais.

Apêndice 9

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 7

Data: 11 de janeiro de 2011

Horário: 14:30 às 16:00

Sala: D9

Tema: Conexões com as várias áreas profissionais que possam ser modeladas em sala de aula, visando o uso da Estatística como ferramenta auxiliar.

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Analisar as várias propostas de situações do mundo real inerentes a cada curso profissional, apresentadas pelas professoras.

Objetivos

- Apresentar as propostas
- Discutir a viabilidade das propostas quanto:
 - Aos recursos a utilizar e disponíveis na escola
 - À recolha de dados
 - À pertinência e interesse da possível tarefa para os alunos e área profissional
 - Tempo de duração da possível tarefa
 - Conteúdos estatísticos envolvidos.

Proposta de trabalho e exploração:

(A pesquisa foi realizada professoras durante a interrupção letiva de modo a rentabilizar este próximo mês de trabalho; cada professora ficou com uma área profissional distinta)

1ª Parte : (30 minutos, 10 minutos para cada professora)

Questão orientadora: Quais as propostas de situações do mundo real para cada curso profissional?

Elaboração de uma tabela síntese de modo a recolher a informação

Curso técnico profissional de:	Propostas de situações do mundo real
Gestão desportiva	Sara
Cozinha/Pastelaria	Filipa
Apoio à infância	Patrícia

2ª Parte: (60 minutos)

Questão orientadora: Qual a viabilidade de cada proposta quanto: aos recursos a utilizar e disponíveis na escola? À recolha de dados? À pertinência e interesse da possível tarefa para os alunos e área profissional? Tempo de duração da possível tarefa? Conteúdos estatísticos envolvidos?

Elaboração de uma tabela síntese de modo a recolher a informação

Curso técnico profissional de:	Propostas de situações do mundo real	Recursos	Recolha de dados	Pertinência e interesse	Tempo de duração	Conteúdos estatísticos
Gestão desportiva						
Cozinha/Pastelaria						
Apoio à infância						

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador.

Apêndice 10

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 8

Data: 20 de janeiro de 2011

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: D2

Tema: Propostas de conexões trazidas do mundo real e relacionadas com os cursos profissionais.

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Analisar as várias propostas de situações do mundo real inerentes a cada curso profissional, apresentadas pelas professoras e já discutidas com as turmas.

Objetivos

- Discutir as propostas quanto à viabilidade relativamente:
 - Aos recursos a utilizar e disponíveis na escola
 - À recolha de dados (turmas e anos envolvidos, forma de recolher os dados)
 - À pertinência e interesse da possível tarefa para os alunos e área profissional
 - Tempo de duração da possível tarefa
 - Conteúdos estatísticos envolvidos
 - Ajuda de professores de outras áreas e níveis de ensino

Proposta de trabalho e exploração:

90 minutos

Questão orientadora: Quais as propostas de recolha de dados para as situações do mundo real já discutidas para cada curso profissional? Qual a viabilidade de cada proposta quanto: aos recursos a utilizar e disponíveis na escola? À recolha de dados? À pertinência e interesse da possível tarefa para os alunos e área profissional? Tempo de duração da possível tarefa? Conteúdos estatísticos envolvidos?

Elaboração de uma tabela síntese de modo a recolher a informação

Curso técnico profissional de:	Propostas de situações do mundo real	Recursos	Recolha de dados	Pertinência e interesse	Tempo de duração	Conteúdos estatísticos	Outros professores envolvidos e função
Gestão desportiva							
Cozinha /Pastelaria							
Apoio à infância							

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador.

Apêndice 11

Guião de sessão de trabalho colaborativo nº 9

Data: 2 fevereiro de 2011

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: D4

Tema: Planificação das tarefas de modelação estatística.

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Compreender o conhecimento profissional (conhecimento da matemática, conhecimento dos alunos e aprendizagens, conhecimento do currículo, conhecimento instrucional) das professoras subjacente à planificação das tarefas de modelação matemática.

Objetivos

- Elaborar uma tabela onde conste a planificação das tarefas para cada curso tendo em conta os conteúdos estatísticos a abordar;
- Planificar tarefas de modelação a partir de propostas já apresentadas nas duas sessões anteriores, com base nos conteúdos estatísticos
- Analisar as evidências que cada professora revela planificar as tarefas relativamente ao conhecimento profissional que mobiliza.

Apêndice 12

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 10 e 11

Data: 7 e 28 de fevereiro de 2012

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: D4

Tema: Criação e planificação de tarefas de modelação estatística.

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Compreender o conhecimento para ensinar Estatística das professoras subjacente à criação das primeiras tarefas de pré e de modelação estatística.

Objetivos

- Criar e planificar tarefas de modelação a partir de propostas já apresentadas nas duas sessões anteriores
- Analisar as evidências que cada professora revela ao criar e planificar as tarefas relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística que mobiliza.

Proposta de trabalho e exploração:

Tendo em conta as propostas apresentadas e acordadas por todas nas sessões anteriores iniciaremos a criação e planificação das primeiras tarefas, tendo em conta os seguintes aspetos

Criação da tarefa a apresentar aos alunos

Título:

Objetivos:

Conteúdos estatísticos:

Conexões:

Materiais (questionários, tabelas de registo de recolha de dados, computador ou calculadoras gráficas):

Curso profissional envolvido:

Corpo da tarefa a apresentar aos alunos (com referência aos aspetos anteriores e grelha de dados e questões)

Planificação da tarefa

Curso técnico profissional de:	Título da tarefa de modelação	Sequência/fases da tarefa com referência ao tempo de duração de cada fase	Recursos consultados e necessários	Forma de organizar os alunos	Materiais	Objetivos	Estabelecimento de conexões	Conteúdos estatísticos	Previsão de dificuldades dos alunos e soluções alternativas	Avaliação da tarefa

Apêndice 13

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 12

Data: 13 de março de 2011

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: D2

Tema: As tarefas criadas

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Analisar as várias tarefas de modelação criadas pelas professoras.

Objetivos

- Discutir as tarefas quanto: a conformação com o ciclo de modelação de Borromeo Ferri, estrutura e planificação da tarefa.

Proposta de trabalho e exploração:

Identificação da tarefa:

Professora:

90 minutos

Questões orientadoras: Tendo em conta o ciclo de modelação de Borromeo Ferri, como conformam a tarefa ao ciclo? Quais as fases de modelação que poderão emergir com esta tarefa? Que reajustes poderão ser realizados? As questões apresentadas são adequadas?

Relativamente à planificação: A estrutura da aula e tarefa é a mais adequada? Porquê? Porque razão vão organizar os alunos desse modo? Com que objetivo? Os materiais e recursos a produzir e necessários são os melhores e suficientes? Porquê? Quais as dificuldades que preveem que possam surgir? Que reajustes poderemos fazer à planificação?

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, tarefas criadas pelas professoras, grelhas de planificação das tarefas.

Apêndice 14

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 13

Data: 20 de março de 2012

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: Consultório da matemática

Tema: Produção de materiais para a recolha de dados reais

Objetivo principal/propósito da sessão:

Compreender de que modo as professoras planificam as suas aulas e produzem materiais para a recolha de dados

Objetivos

- Organizar a atividade Gincana para recolha de dados (da responsabilidade do curso técnico de gestão desportiva)
- Concluir a elaboração de um questionário, elaborado por todos os cursos profissionais envolvidos, para recolha de dados no pré-escolar

Proposta de trabalho e exploração:

Identificação da atividade de recolha de dados: Gincana

Local: X

Professora: Sara

Curso: Gestão desportiva

Questões orientadoras: Relativamente à planificação da atividade *Gincana* (a realizar na escola X dia 21 de Março 12): A estrutura da aula para implementação da atividade é a mais adequada? Porquê? Porque razão vão organizar os alunos desse modo? Com que objetivo? Os materiais e recursos a produzir e necessários são os melhores e suficientes? Porquê? Quais as dificuldades que preveem que possam surgir?

Quanto ao questionário: que questões resultaram das vossas turmas? As questões vão de encontro ao tipo e número de variáveis que pretendem? Estão adequadas?

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, tarefas criadas pelas professoras, grelhas de planificação das tarefas.

Apêndice 15

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 14

Data: 17 de abril de 2012

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: D2

Tema: As tarefas criadas

Objetivo principal/propósito da sessão:

- Analisar as várias tarefas de modelação criadas pelas professoras.

Objetivos

- Discutir as tarefas quanto: a conformação com o ciclo de modelação de Borromeo Ferri, estrutura e planificação da tarefa.

Proposta de trabalho e exploração:

Identificação da tarefa:

Professora:

90 minutos

Questões orientadoras: Tendo em conta o ciclo de modelação de Borromeo Ferri, como conformam a tarefa ao ciclo? Quais as fases de modelação que poderão emergir com esta tarefa? Que reajustes poderão ser realizados? As questões apresentadas são adequadas?

Relativamente à planificação: A estrutura da aula e tarefa é a mais adequada? Porquê? Porque razão vão organizar os alunos desse modo? Com que objetivo? Os materiais e recursos a produzir e necessários são os melhores e suficientes? Porquê? Quais as dificuldades que preveem que possam surgir? Que reajustes poderemos fazer à planificação?

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, tarefas criadas pelas professoras, grelhas de planificação das tarefas

Apêndice 16

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 15

Reflexão sobre episódios de aula

Código:

Professora: Patrícia Turma: Curso profissional: Apoio à Infância Número de alunos presentes: 14 Data da aula: 30 de Abril Aula nº 103/104 Horário: 14:45 às 16:15 Sala: A2		Data da sessão: 8 de maio de 2012 Professoras: Patrícia, Filipa, Sara, Nélida Sala: D2 Recursos: clip de vídeo de observação de aula, projetor, computador, guião com questões para debate	
Tarefa de “pré-modelação” matemática		Nome: “Começar a conhecer a amostra”	
Objetivo geral: reflexão conjunta acerca do visionamento de episódios da primeira aula de modelação da Patrícia e notas de campo da investigadora (a partir do guião de observação de aula) 1º Pedir à Patrícia para dizer como correu a aula. Que dificuldades sentiu? Que dificuldades sentiu por parte dos alunos? O que a surpreendeu?			
Tempo	Notas sobre as várias fases da aula e ocorrências	Questões orientadoras e ficheiros de vídeo dos episódios a considerar, tendo em conta as anotações	

Apêndice 17

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 16

Reflexão sobre episódios de aula

Código:

Professora: Filipa Turma: Curso profissional: Cozinha/Pastelaria Número de alunos presentes:10 Data: 4 de maio de 2012 Aula nº 107/108 Horário: 8:25 às 9:55 Sala: A10	Data da sessão: 10 de maio de 2012 Professoras: Patrícia, Filipa, Sara, Nélida Sala: gabinete de matemática Recursos: clip de vídeo de observação de aula, projetor, computador, guião com questões para debate	
Tarefa de “pré-modelação” matemática	Nome: “Quantas vezes por dia comem as crianças da nossa escola?”	
Objetivo geral: reflexão conjunta acerca do visionamento de episódios da primeira aula de modelação da Patrícia e notas de campo da investigadora (a partir do guião de observação de aula) 1º Pedir à Filipa para dizer como correu a aula. Que dificuldades sentiu? Que dificuldades sentiu por parte dos alunos? O que a surpreendeu? A tarefa foi dada como ponto de partida ou consolidação de conteúdos?		
Tempo	Notas sobre as várias fases da aula e ocorrências	Observações/aspetos relevantes ou a destacar

Apêndice 18

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 17

Reflexão sobre episódios de aula

Código:

Professora: Sara Turma: 10ºG Curso profissional: gestão desportiva Número de alunos presentes: 19 Data: 10 de maio de 2012 Aula nº Horário: 14:45 às 16:15 Sala: F2		Data da sessão: 21 de Maio de 2012 Hora: das 13:30 às 15:00 Professoras: Patrícia, Filipa, Sara, Nélida Sala: gabinete de matemática Recursos: clip de vídeo de observação de aula, projetor, computador, guião com questões para debate
Tarefa de “pré-modelação” matemática		Nome: “Início do estudo das caraterísticas de um grupo de alunos do pré-escolar”
Objetivo geral: reflexão conjunta acerca do visionamento de episódios da primeira aula de modelação da Patrícia e notas de campo da investigadora (a partir do guião de observação de aula) 1º Pedir à Filipa para dizer como correu a aula. Que dificuldades sentiu? Que dificuldades sentiu por parte dos alunos? O que a surpreendeu? A tarefa foi dada como ponto de partida ou consolidação de conteúdos?		
Tempo	Notas sobre as várias fases da aula e ocorrências	Observações/aspetos relevantes ou a destacar

Apêndice 19

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 18

Data: 31 maio de 2012

Horário: 13:30 às 15:00

Sala: Gabinete de matemática

Tema: reflexão sobre o tipo de tarefas implementadas nas várias turmas e as já criadas para as variáveis bidimensionais no que diz respeito à modelação matemática.

Objetivo principal/propósito da sessão:

Compreender o entendimento de cada professora sobre o tipo de tarefa que já implementaram e ainda vão implementar, relativamente ao conceito de modelação matemática.

Objetivos

- Criar e planificar tarefas de modelação para variáveis bidimensionais.
- Analisar as evidências que cada professora revela ao criar e planificar as tarefas relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística que mobiliza.
- Analisar as tarefas já implementadas e compreender o objetivo das mesmas e sua adequação
- Reflexão conjunta sobre as tarefas já implementadas e sua integração no currículo relativamente à sua pertinência quanto à modelação matemática

Proposta de trabalho e exploração:

Questões orientadoras para reflexão: (30 minutos)

1ª as tarefas que criamos até ao momento, são mesmo tarefas de modelação ou são tarefas de preparação à modelação estatística? Chegamos ao modelo matemático ou ao modelo real? Afinal o que é mesmo uma tarefa de modelação?

2ª Quais as potencialidades da tecnologia na modelação estatística?

3ª Quais as diferenças ao nível da modelação que encontram nas tarefas criadas até agora e nas que vão criar ou criaram sobre as variáveis bidimensionais?

(1hora)

Análise da estrutura das tarefas de modelação para as variáveis bidimensionais, planificação da tarefa relativamente às questões. Tecnologia a usar. Discussão do número de tarefas a implementar para este conteúdo, variáveis envolvidas para cada curso e origem de cada tarefa.

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador.

Apêndice 20

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 19

Data: 11 de julho de 2012

Horário: 11:00 às 14:00

Sala: Gabinete de matemática

Tema: reflexão sobre as tarefas de modelação para as variáveis bidimensionais implementadas nas várias turmas do ensino profissional

Objetivo principal/propósito da sessão:

Compreender a reflexão que as professoras fazem sobre a planificação das aulas de modelação e gestão e condução das aulas de modelação.

Objetivos

- Analisar as evidências que cada professora revela ao refletir acerca das tarefas de modelação relativamente ao conhecimento para ensinar Estatística que mobiliza.
- Analisar as tarefas já implementadas e compreender o objetivo das mesmas e sua adequação
- Reflexão conjunta sobre as tarefas já implementadas e sua integração no currículo relativamente à sua pertinência quanto à modelação matemática e propostas de reajustes.

Proposta de trabalho e exploração:

Questões orientadoras para reflexão: (90 minutos)

Tendo em conta os episódios de aula e relatos das próprias professoras, será promovido um debate reflexivo sobre os seguintes aspetos:

- a) O que tiveram em conta quando prepararam as tarefas de modelação para as distribuições bidimensionais? Que reflexão fazem sobre essa preparação?
- b) As metodologias foram as mais adequadas? Que alterações propõem?
- c) As atividades para a recolha de dados mostraram-se adequadas? Que alterações propõem?
- d) Com que objetivo criaram estas tarefas e que com que objetivo as implementaram com uma determinada sequência? Essa planificação resultou? Que alterações sugerem nessa planificação?
- e) Que reajustes propõem às tarefas implementadas? Com que objetivo o fazem?

- f) **Que avaliação global fazem das várias tarefas de modelação para as distribuições bidimensionais?**

Propostas de alteração e reajustes nas várias tarefas de modelação implementação e sugestões de adaptações.

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, visionamento de clips de episódios de aula e as várias tarefas de modelação criadas para as distribuições bidimensionais.

Apêndice 21

Guião da sessão de trabalho colaborativo nº 20

Data: 11 de julho de 2012

Horário:

Sala: Gabinete de matemática

Tema: reflexão conjunta sobre o trabalho desenvolvido

Objetivo principal/propósito da sessão:

Compreender os pontos de vista das professoras sobre o trabalho desenvolvido.

Proposta de trabalho e exploração:

Questões orientadoras para reflexão:

1) Preparação das aulas de modelação estatística para os cursos profissionais

- O que planificaram conjuntamente e individualmente? Como e porquê?
- O que tiveram em conta na seleção das tarefas? O que discutiram em conjunto?
- Relativamente às tarefas criadas o que foi feito individualmente ou em conjunto?
- Quais as dificuldades que sentiram na seleção e preparação das tarefas? De que modo o trabalho colaborativo contribuiu para ultrapassar essas dificuldades?

2) As aulas de modelação do ensino profissional?

- Descrevam-me um episódio de aula de uma colega que mais as tivessem marcado e influenciado e porquê.
- Os episódios de aula e relatos das colegas influenciou de alguma forma a maneira como geriram e conduziram as vossas aulas de modelação?

3) Programa de Matemática Ensino Secundário Profissional?

- Sentiram evolução na atenuação das dificuldades ao fazerem a gestão curricular deste programa ao longo deste trabalho em contexto colaborativo? Aponte razões.
- Que reflexão fazem neste momento do conhecimento profissional que possuem para fazer a gestão curricular deste programa, tendo em conta que trabalharam colaborativamente?

4) Modelação matemática

- De que forma o trabalho desenvolvido pela equipa contribuiu para clarificar conceitos como o de modelação e tarefa de modelação?
- Teriam criado da mesma forma as tarefas de modelação se o tivessem feito individualmente?

5) Trabalho colaborativo

- Que contributos, atribuem ao trabalho colaborativo no que diz respeito à evolução do seu conhecimento profissional no âmbito da Estatística?
- Que importância atribuem à reflexão sobre as suas práticas letivas em contexto de trabalho colaborativo?
- Que contributos é que surgiram, ao nível do trabalho colaborativo, ao criarem conjuntamente, tarefas de modelação estatística adequadas a cada curso profissional?
- Que reflexão fazem sobre o trabalho colaborativo na preparação, criação e implementação das tarefas de modelação?
- O que mais gostaram? E o menos? O que mudariam?
- Voltariam no futuro a integrar uma equipa de trabalho com este tipo de objetivo? Porquê?
- O que mais ganharam a nível profissional e pessoal com esta experiência?

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador.

Apêndice 22

Calendarização e planificação das reuniões de trabalho colaborativo

Reuniões de trabalho colaborativo	Outubro de 2011	Novembro	Dezembro	Janeiro Fevereiro Março	Abril	Maio	Junho	Final de Junho 2012
<p>Aspetos a trabalhar</p>	<p>Propósito e apresentação do objetivo, relevância e metodologia do estudo; Negociação com as professoras de um plano de trabalho com vista a clarificar: as exigências que a realização do projeto implicará; Envolvimento, papéis e responsabilidades de cada uma de nós; Possibilidade de renegociação da atividade conjunta de modo que vá ao encontro das motivações e necessidades de cada elemento do grupo de trabalho. (apêndice1-guião 1)</p>	<p>Analisar o programa de Matemática para o ensino profissional, em especial a Estatística, e identificar qual o papel e a importância que este dedica à modelação matemática - como é encarada a modelação matemática (objetivo/capacidade a desenvolver/tarefa/...? com que frequência aparecem referências à modelação matemática? em que conteúdo se recomenda que seja usada? de que modo? com que recursos?...?) (apêndice 2-guião 2).</p> <p>Identificar e analisar tarefas de modelação matemática e de aplicações da matemática, com o objetivo de definir informalmente modelação matemática e apontar características das tarefas de modelação matemática. (apêndice 3-guião 3). Analisar e discutir artigos sobre modelação matemática e modelação matemática em sala de aula, visando a reflexão conjunta sobre as várias definições presentes e selecionar conjuntamente uma definição. (apêndice 4-guião 4) Analisar vários ciclos de modelação matemática e interpretação dos mesmos pelas professoras. (apêndice 5-guião 5)</p> <p>Análise dos perfis profissionais de cada curso profissional (anexo 8-10) e debate de ideias sobre possíveis conexões profissionais no que diz respeito a tipo de recolha de dados, recursos possíveis e disponíveis na escola, pertinência das primeiras ideias e tópicos matemáticos que possam ser usados e surgir. (apêndice 6-guião 6)</p>		<p>Propostas de tarefas de modelação, baseadas nas conexões acordadas nas sessões anteriores, por parte das professoras, tendo em conta os cursos profissionais e a utilização da estatística como ferramenta auxiliar. Reflexão conjunta sobre a elaboração da planificação das propostas de tarefas apresentadas. (apêndice 7 -guião 7; apêndice 8 – guião 8)</p> <p>Elaborar uma grelha onde conste a planificação das tarefas para cada curso tendo em conta os conteúdos estatísticos a abordar; Planificar tarefas de modelação a partir de propostas já apresentadas nas duas sessões anteriores, com base nos conteúdos estatísticos; Analisar as evidências que cada professora revela ao planificar as tarefas relativamente ao conhecimento estatístico que ensina. (apêndice – guião 9)</p> <p>Criação e Planificação das tarefas de modelação a propor aos alunos, tendo em conta: formas de recolha de dados; conteúdos</p>	<p>As reuniões serão realizadas logo após a observação das aulas com o intuito de fazermos uma reflexão conjunta sobre a gestão da mesma, reajustes na tarefa, planificação e prática letiva;</p> <p>Apresentação dos vídeos das aulas, para que os professores se observem a si próprios e possam realizar uma reflexão mais profunda sobre a sua prática letiva.</p>		<p>Reflexão conjunta sobre o ensino da Matemática com modelação estatística a cursos profissionais e levar a um entendimento sobre o que foi este desafio e que interpretação final fazem acerca do que aprenderam e de que modo contribuiu para a alteração da prática letiva destes professores e construção e evolução no seu conhecimento estatístico para ensinar.</p>	

			estatísticos; objetivos; competências a desenvolver; recursos; duração; fases da aula; papel do professor e dos alunos; avaliação; produções escritas dos alunos. (apêndice 10- guião 10 e 11)		
--	--	--	--	--	--

Apêndice 23

Guião da primeira entrevista semiestruturada às professoras

1) Percurso pessoal e conhecimento de si

- Idade
- Formação académica
- Anos de serviço/níveis lecionados (básico e secundário)
- Cargos desempenhados
- Razões que o levaram a ser professor de Matemática.
- Se tivesse possibilidade de mudar de profissão, o que faria e porquê?
- O que é para si um bom professor? E um bom aluno?
- Experiências significativas como profissional
- Quais os principais traços que o caracterizam a si como professor?
- Do trabalho que desenvolve como professor, que aspetos lhe dão mais ou menos prazer?
- Já lecionou Matemática a cursos profissionais? Quantos anos?
- Quais as razões que o levam a participar neste projeto?
- O que espera pessoalmente desta experiência?

2) Preparação das aulas de Matemática para os cursos profissionais

Lembra-se da última vez que planificou uma aula? Descreva-me, por favor, o que fez e o que costuma contemplar quando planifica.

- Relativamente aos cursos profissionais, o que faz normalmente para preparar as aulas?
- Na preparação das aulas, como a sequencia (fases da aula, duração de cada fase, ...)?
- Com que objetivos o faz?
- Que materiais produz para as aulas?
- Que conteúdo dá à planificação (estrutura e fases da aula, objetivos a alcançar, tópicos matemáticos, método de trabalho, antecipações das produções dos alunos,...)?
- Que tipo de tarefas seleciona e o que tem em conta na seleção das tarefas?
- Quais os recursos utilizados na seleção das tarefas?

- Que grau de desenvolvimento dá à planificação em coletivo e individualmente (previsão de dificuldades, de soluções alternativas, estabelecimento de conexões...)?
- Quais as dificuldades que sente na seleção e planificação das tarefas?
- Se já tinha trabalhado com outros alunos, quais são as grandes diferenças na planificação que faz para os cursos profissionais?

3) A aula

- Descreva-me, por favor, uma aula recente.
- Que tarefas propõe habitualmente aos alunos dos cursos profissionais e porquê?
- Como é que conduz as aulas quando implementa tarefas?
- Ambiente privilegiado
 - Formas de trabalho dos alunos
 - Papel do professor
 - Papel do aluno
 - Recursos utilizados
- Como lida com eventuais imprevistos? E que decisões, geralmente, toma para que se altere o rumo da aula? Descreva-me uma aula em que isso tenha acontecido.
- Que ajustes faz da planificação?
- Costuma fazer uma reflexão sobre as suas aulas e prática letiva? Quando reflete sobre as aulas que dá, o que mais a preocupa? E o que mais a deixa satisfeita?
- O que é para si uma boa aula de Matemática?

4) Programa de Matemática Ensino Secundário Profissional?

- Que interpretação faz do programa dos cursos profissionais? Que opinião tem sobre as orientações curriculares expressas no programa? Quais destaca e que importância lhes dá?
 - Relativamente à adequação dos módulos que são lecionados aos vários cursos?
 - Relativamente às orientações metodológicas?
 - À avaliação?
- Que tipo de tarefas acha que devem ser valorizadas no programa?
- Que dificuldades sente ao fazer a gestão curricular deste programa?

- Do seu ponto de vista, de que modo o programa para os cursos profissionais poderá ou não contribuir para o desenvolvimento de competências vocacionadas para o exercício de uma futura profissão?
- Do seu ponto de vista, possui conhecimento profissional suficiente para fazer a gestão curricular deste programa e de o lecionar como gostaria?

5) Modelação matemática

- Já alguma vez fez uma tarefa de modelação matemática com os seus alunos na aula? Dê um exemplo, por favor.
- Porque considera que a tarefa anterior é de modelação matemática?
- Existem outros tipos distintos de tarefas de modelação matemática? Dê exemplo
- O que entende afinal por modelação matemática?
- Costuma realizar com os alunos tarefas de modelação matemática? Se sim, com que periodicidade?
- Qual a pertinência da modelação matemática e a que objetivos do ensino corresponde?
- Que papel lhes atribui na aprendizagem dos alunos?
- Do conhecimento que possui do currículo, acha que este tipo de tarefa se adequa aos cursos profissionais?
- Como integra ou acha que pode integrar, na sua prática letiva diária, tarefas de modelação matemática na sala de aula?
- Como vê o uso da tecnologia em Matemática quando implementa tarefas de modelação matemática?
- Quanto às tarefas de modelação nas aulas de Matemática, que dificuldades se levantam a si na:
 - elaboração
 - recolha
 - implementação
 - avaliação
- Quais os conteúdos e módulos do programa que melhor se adaptam à implementação de tarefas de modelação matemática?
- Como lhe parece que os alunos reagem às tarefas de modelação? Aderem bem ou não?
- As planificações anuais elaboradas na sua escola têm previsto a implementação de tarefas de modelação matemática? Porquê? O seu grupo de Matemática adere a este tipo de tarefa ou não?

6) Trabalho colaborativo

- O que entende por trabalho colaborativo?
- Que importância atribui ao trabalho colaborativo na:
 - Elaboração da planificação e, em particular:
 - Elaboração e criação de tarefas;
 - Na escolha de recursos didáticos;
 - Na reflexão sobre o trabalho desenvolvido no âmbito da gestão curricular do programa para os cursos profissionais?
- Que contributos, atribui ao trabalho colaborativo no que diz respeito à evolução do seu conhecimento profissional?
- Que importância atribui à reflexão sobre as suas práticas letivas em contexto de trabalho colaborativo?
- Que contributos é que prevê, ao nível do trabalho colaborativo, que surjam ao criarem conjuntamente, tarefas de modelação estatística adequadas a cada curso profissional?

Apêndice 24

Guião da última entrevista individual semiestruturada

1) O conhecimento da Matemática

- Que conceitos estatísticos sentiu que mais se clarificaram ao longo deste ano? Aponte razões: o processo de criação e discussão das tarefas, a implementação das tarefas em sala de aula ou outras razões?
- De que forma transmitiu esses conceitos que pretendia ensinar? Baseou-se em rotinas ou procedimentos ou tomou outro tipo de opções?
- Para que os alunos se apropriem e compreendam dos conceitos, o professor geralmente: recorre a explicações orais, a esquemas e imagens dos mesmos com exemplos no quadro, usa materiais e recorre à tecnologia ou ainda, implementa em sala de aula tarefas para exploração e descoberta mais ou menos estruturadas; etc. Na sua prática diária, qual o seu grau de identificação com estes diferentes processos?
- Como evolui essa prática ao longo deste ano?

2) Conhecimento dos alunos e suas aprendizagens

- De que forma conseguiu perceber as aprendizagens dos seus alunos ao longo deste trabalho? Através de relatórios? Registos nas folhas da tarefa? Apresentação oral dos resultados em grupo turma? Através de questionamento aos vários grupos? Observação durante a realização das tarefas? De todas estas evidências ou de outras que se recorde, qual ou quais, entende que podem ter trazido contribuições para compreender e melhorar o ensino?
- Sentiu que houve evolução relativamente às expectativas que tinha relativamente aos seus alunos, desde o início do ano, quanto à produção matemática, papel dos alunos e envolvimento e motivação nas tarefas? Aponte razões.
- Que balanço faz do investimento na folha de cálculo relativamente às aprendizagens dos alunos?

3) Conhecimento do currículo de Matemática do ensino secundário profissional

- Que conhecimentos e conteúdos estatísticos considera mais importantes para o ensino profissional? Porquê?
- Existe algum conteúdo estatístico que atribuiu maior importância este ano relativamente aos anos anteriores? Porquê?
- Que interpretação faz agora do programa dos cursos profissionais? Que opinião tem sobre as orientações curriculares expressas no programa relativamente à modelação matemática?
- As tarefas por si criadas vão de encontro ao que o programa pretende?

- O que pensa acerca da adequabilidade do módulo de estatística a estes cursos e à modelação matemática? Houve evolução ao que entendia anteriormente?
- O programa de Matemática para o ensino profissional, enfatiza o uso do computador. Como vê o uso do EXCEL no ensino e aprendizagem da estatística? Quais as potencialidades e dificuldades?
- Que reflexão faz neste momento do conhecimento profissional que possui para fazer a gestão curricular deste programa?

4) Conhecimento instrucional e práticas letivas

Preparação das aulas de modelação estatística para os cursos profissionais

- Que conteúdo dá à planificação que fez (estrutura e fases da aula, objetivos a alcançar, tópicos matemáticos, método de trabalho, antecipações das produções dos alunos,...)?
- O que planificou conjuntamente e individualmente? Como e porquê?
- Após a discussão na equipa, qual o trabalho (planeamento) que fez até chegar à sala de aula? Acha que as ideias que se discutiam para as tarefas na sessão presencial eram suficientes, concretizadas posteriormente a distância, ou sente que se deveria ter ido mais longe nas sessões presenciais da equipa?
- O que teve em conta na seleção das tarefas? Porquê? O que discutiu em conjunto?
- Que tipo de tarefas criou? Com que objetivo? Como o fez? Individualmente ou em conjunto?
- Notou alguma evolução no tipo de tarefas e na forma como criou e preparou as tarefas ao longo da planificação do módulo de estatística? Quais?
- Quais os recursos mais utilizados na seleção das tarefas? Acha que foram suficientes?
- Quais as maiores dificuldades sentidas na seleção e preparação das tarefas?
- Que balanço global faz das tarefas?

Gestão e condução das aulas de modelação no ensino profissional

- Descreva-me um episódio de aula de uma colega que mais a tivesse marcado e influenciado e porquê.
- Que reflexão faz acerca da condução destas aulas?
- Que reflexão faz sobre:

- Formas de trabalho dos alunos, relativamente a: Qual a importância que atribui às regras e normas de funcionamento do trabalho com os alunos (participar e tomar a

palavra no grande grupo, discutir em pequeno grupo, ...) em sala de aula? Como as faz passar? Qual o papel que assumiu e qual o papel que incentivou os alunos a ter? Porquê?

- Recursos utilizados

- Tendo em conta o papel por si assumido nas aulas de modelação, que dificuldades sentiu na condução das aulas quando surgiram imprevistos? Como lidou com eles? Dê exemplo de um imprevisto em sala de aula e do reajuste feito por si. Fez ajustes da planificação ou da tarefa? Com que objetivo?
- Nestas aulas o que mais a preocupou e o que mais a deixou satisfeita?
- O que é para si uma aula de modelação?

Reflexão sobre as aulas de modelação

- Qual é o conteúdo da sua reflexão sobre as aulas de modelação?
- Que aspetos dessa reflexão é que destaca?
- Que importância atribui à reflexão pós-aula que foi realizada no final de cada aula? E de que modo essa reflexão individual e imediata influenciou o reajuste da tarefa implementada e plano de aula, assim como a planificação da aula seguinte?
- Que importância atribui à reflexão realizada em sessões de trabalho colaborativo, a partir de episódios de aula e relatos das outras colegas, e quais as repercussões na sua prática letiva?
- Que contributos aponta para a evolução do seu conhecimento para ensinar Estatística, relativamente à reflexão que foi feita conjuntamente?

4) Modelação matemática

- Todas as tarefas por si criadas foram de modelação matemática?
- Identifique nas tarefas por si criadas vários tipos distintos de tarefas de modelação matemática? Exemplifique?
- Conseguiu identificar todas as fases de modelação nas tarefas? Exemplos.
- Com que objetivo criou estas tarefas e com que objetivo as implementou com uma determinada sequência? Essa planificação resultou? Que alterações sugere nessa planificação?
- Que importância atribui à comunicação matemática oral nas aulas de modelação? Com que regularidade promoveu a comunicação oral e porquê?
- O que entende afinal por modelação matemática?
- O que entende por modelo matemático?
- O que entende por tarefa de modelação matemática?

- Que papel lhe atribui na aprendizagem dos alunos? O que aprenderam eles?
- Que importância atribui ao uso da tecnologia em Matemática quando implementou tarefas de modelação matemática? Porque razão usou o EXCEL e não outro meio tecnológico?
- Quanto às tarefas de modelação nas aulas de Matemática, que dificuldades se levantaram a si na:
 - elaboração
 - recolha de dados
 - implementação
 - avaliação
 - adesão dos alunos
- Que avaliação global faz das tarefas de modelação?

5) Trabalho colaborativo

- Que contributos, atribui ao trabalho colaborativo no que diz respeito à evolução do seu conhecimento profissional?
- Que importância atribui à reflexão sobre as suas práticas letivas em contexto de trabalho colaborativo?
- Que contributos é que surgiram, ao nível do trabalho colaborativo, ao criarem conjuntamente, tarefas de modelação estatística adequadas a cada curso profissional? O que representou a experiência? Trouxe, ou não, mais valias? Se sim, quais? O que facilitou que surgissem? Reflexos no modo futuro de ver e de estar na profissão? Dificuldades/problemas experienciados ao longo da participação no projeto. O que facilitou/dificultou o desenvolvimento do projeto?
- Quais as potencialidades e dificuldades que reconhece no trabalho colaborativo?
- O que mais gostou? E o menos? O que mudaria?
- Sentiu alguma vez que o papel ou voz da investigadora se sobrepôs à sua? Acha que a investigadora teve em conta o seu trabalho diário, suas necessidades e ansiedades?

Futuro

- Se iniciasse hoje o trabalho de equipa, que alterações proponha relativamente aos métodos, discussões, criação e planificação das tarefas e reflexão sobre as aulas?
- Se iniciasse hoje o trabalho de equipa que alterações proporia nas suas aulas, nas tarefas que criou, na tecnologia que usou e na forma como conduziu e geriu as aulas?
- O que gostaria de fazer no futuro acerca da implementação de modelação matemática em sala de aula?

- Voltaria no futuro a integrar uma equipa de trabalho com este tipo de objetivo? Porquê?

Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador.

Apêndice 25

Guião da entrevista de reflexão pré-aula

Código:

Professora:	
Data:	Hora:
Local:	
Aula nº	Identificação da tarefa de modelação:

- Qual a origem tarefa?
- Qual foi a motivação para escolher esta tarefa?
- Tendo em conta o curso profissional, qual a adequabilidade desta tarefa de modelação?
- A situação é mesmo real?
- A situação é conhecida pelos alunos?
- Como foi organizada a recolha de dados pelos alunos? Como os recolheram?
- Quais as variáveis estatísticas que vão ser estudadas?
- Que conteúdos estatísticos vão emergir?
- A tarefa está muito ou pouco estruturada?
- Qual é o objetivo da tarefa? Como ponto de partida para levar a novo conhecimento ou é uma tarefa de consolidação de conteúdos?
- Ao criar esta tarefa teve em conta todas as fases de modelação presentes no ciclo de modelação de Borromeo Ferri?
- Resolveu a tarefa? Se sim, quais as fases do ciclo de modelação que identificou e como conformou ao ciclo de modelação anteriormente referido?
- Como planificou esta aula? O que teve em conta e como a estruturou?
- Qual a sua expectativa face à implementação desta tarefa de modelação?
- Que dificuldades prevê? Que reações prevê dos seus alunos?

Que materiais produziu para esta aula e que recursos usou ou vai usar nesta aula?

Apêndice 26

Guião da entrevista de reflexão pós-aula

Código:

Professora:	
Data:	Hora:
Local:	
Aula nº	Identificação da tarefa de modelação:

1. Descrição da aula (Como decorreu a atividade?)

- Como acha que correu a aula?
- Surgiu algo que a surpreendeu? Se sim, o quê e porquê?
- A exploração da tarefa decorreu como tinha previsto?

Tendo em conta as fases de modelação, como decorreu:

- (1ª fase) Os alunos compreenderam a situação?
- (2ª fase) Conseguiram chegar ao modelo real? Como?
- (3ª fase) Como passaram do modelo real para a construção do modelo matemático (matematização)?
- (4ª fase) A partir do modelo matemático conseguiram chegar aos resultados (trabalharam matematicamente)? De que forma?
- (5ª e 6ª fase) Conseguiram interpretar os resultados e validaram o modelo? Houve reajustes?
- Como aprecia o envolvimento dos alunos na tarefa ao nível do trabalho matemático na tarefa?
- Como aprecia o envolvimento dos alunos ao nível da motivação e empenhamento na tarefa?

2. Reflexão sobre a atividade realizada:

- Que avaliação global faz da aula?
- Se voltasse a dar esta aula, faria um planeamento idêntico ou faria um planeamento diferente? Porquê?

Apêndice 27

Guião para observação de aulas

Código:

Professora: Turma: Curso profissional: Número de alunos presentes:	Data: Aula nº Horário: Sala:
Tarefa de modelação matemática	Nome:

Gestão e condução da aula

Aspetos a ter em conta na observação:

Professora: relação com a turma, modo como se dirige à turma, forma de estar, decisões que toma e justificações. Como lida com imprevistos e possíveis reajustes da planificação e da própria tarefa.

Estrutura e organização da aula: Introdução, desenvolvimento, fim, gestão do tempo, outros aspetos.

Ambiente da aula: atitude da professora, atitude dos alunos e comportamentos, gestão dos comportamentos e regras.

Tarefa de modelação: materiais usados e recursos necessários, objetivo, grau de estruturação, conexões, conteúdos estatísticos, atividade matemática desenvolvida.

- Os alunos foram envolvidos na recolha dos dados e com que objetivos?
- A tarefa de modelação partiu de uma situação real significativa para estes alunos e conhecida deles? Os alunos identificaram a situação real apresentada? Compreenderam a tarefa?
- Os alunos conseguem mobilizar o seu conhecimento extra matemático na estruturação e simplificação da tarefa e conseguiram construir o modelo real? Que modelos reais construíram?
- Os alunos conseguem estabelecer relações entre as várias variáveis e construíram o modelo matemático? A que modelos matemáticos chegaram?
- Os alunos estão a trabalhar matematicamente as suas competências matemáticas e a conjecturar fórmulas, gráficos, tabelas, etc...? O que estão a apresentar?
- Ao trabalharem com estes modelos estão a conseguir chegar a resultados matemáticos e a testar os modelos? Conseguem interpretar os resultados no contexto da situação real?
- A que conclusões chegaram? Estão a validar os modelos, tendo em conta a realidade. Fizeram reajustes dos modelos matemáticos? Conseguem comunicar as suas conclusões e discutilas?
- Quais as maiores dificuldades observadas?
- A tarefa é adequada ao curso e a estes alunos? A situação real apresentada revelou-se adequada? Que problemas e/ou potencialidades emergiram?
- A tarefa revela-se motivadora para estes alunos?
- Os recursos e materiais que estão a ser usados revelam-se adequados?

Discurso matemático: papel da professora na atividade matemática, papel dos alunos na atividade matemática, produções dos alunos.

Tempo	Notas sobre as várias fases da aula e ocorrências	Observações/aspetos relevantes ou a destacar
-------	---	--

Código do ficheiro vídeo:

Apêndice 28

Calendarização e planificação das reuniões de trabalho colaborativo

Reuniões de trabalho colaborativo	Outubro de 2011	Novembro	Dezembro	Janeiro Fevereiro Março	Abril	Maio	Junho	Final de Junho 2012
Aspetos a trabalhar	<p>Propósito e apresentação do objetivo, relevância e metodologia do estudo; Negociação com as professoras de um plano de trabalho com vista a clarificar: as exigências que a realização do projeto implicará; Envolvimento, papéis e responsabilidades de cada uma de nós; Possibilidade de renegociação da atividade conjunta de modo que vá ao encontro das motivações e necessidades de cada elemento do grupo de trabalho. (apêndice1-guião 1)</p>	<p>Analisar o programa de Matemática para o ensino profissional, em especial a Estatística, e identificar qual o papel e a importância que este dedica à modelação matemática - como é encarada a modelação matemática (objetivo/capacidade a desenvolver/tarefa/...? com que frequência aparecem referências à modelação matemática? em que conteúdo se recomenda que seja usada? de que modo? com que recursos?...)</p> <p>(apêndice2-guião 2).</p>		<p>Propostas de tarefas de modelação, baseadas nas conexões acordadas nas sessões anteriores, por parte das professoras, tendo em conta os cursos profissionais e a utilização da estatística como ferramenta auxiliar.</p> <p>Reflexão conjunta sobre a elaboração da planificação das propostas de tarefas apresentadas. (apêndice7 -guião 7; apêndice8 – guião 8)</p>	<p>As reuniões serão realizadas logo após a observação das aulas com o intuito de fazermos uma reflexão conjunta sobre a gestão da mesma, reajustes na tarefa, planificação e prática letiva;</p>			<p>Reflexão conjunta sobre o ensino da Matemática com modelação estatística a cursos profissionais e levar a um entendimento sobre o que foi este desafio e que interpretação final fazem acerca do que aprenderam e de que modo contribuiu para a alteração da prática letiva destes professores e construção e evolução no seu conhecimento estatístico para ensinar.</p>
		<p>Identificar e analisar tarefas de modelação matemática e de aplicações da matemática, com o objetivo de definir informalmente modelação matemática e apontar características das tarefas de modelação matemática. (apêndice3-guião 3).</p> <p>Analisar e discutir artigos sobre modelação matemática e modelação matemática em sala de aula, visando a reflexão conjunta sobre as várias definições presentes e selecionar conjuntamente uma definição. (apêndice4-guião 4)</p> <p>Analisar vários ciclos de modelação matemática e interpretação dos mesmos pelas professoras. (apêndice5-guião 5)</p> <p>Análise dos perfis profissionais de cada curso profissional (anexo 8-10) e debate de ideias sobre possíveis conexões profissionais no que diz respeito a tipo de recolha de dados, recursos possíveis e disponíveis na escola, pertinência das primeiras ideias e tópicos matemáticos que possam ser usados e surgir. (apêndice6-guião 6)</p>	<p>Elaborar uma grelha onde conste a planificação das tarefas para cada curso tendo em conta os conteúdos estatísticos a abordar; Planificar tarefas de modelação a partir de propostas já apresentadas nas duas sessões anteriores, com base nos conteúdos estatísticos; Analisar as evidências que cada professora revela ao planificar as tarefas relativamente ao conhecimento estatístico que ensina (apêndice9 – guião 9)</p> <p>Criação e Planificação das tarefas de modelação a propor aos alunos, tendo em conta: formas de recolha de dados; conteúdos</p>	<p>Apresentação dos vídeos das aulas, para que os professores se observem a si próprios e possam realizar uma reflexão mais profunda sobre a sua prática letiva.</p>				

			estatísticos; objetivos; competências a desenvolver; recursos; duração; fases da aula; papel do professor e dos alunos; avaliação; produções escritas dos alunos. (apêndice 10- guia 10 e 11)		
--	--	--	---	--	--

Apêndice 29

Calendarização e tópicos de discussão das sessões relativas à primeira fase

Sessão n°	Data, local e duração	Tópicos a discutir	Recursos
1	Data: 20 de outubro de 2011 Sala: Gabinete de matemática Hora: 13:00 às 14:30	Ponto um – Propósito e apresentação do objetivo, relevância e metodologia do estudo; Ponto dois – Negociação com as professoras de um plano de trabalho com vista a clarificar: As exigências que a realização do projeto implicará; Envolvimento, papéis e responsabilidades de cada uma de nós; Possibilidade de renegociação da atividade conjunta de modo que vá ao encontro das motivações e necessidades de cada elemento do grupo de trabalho.	
2	Data: 2 de novembro de 2011 Sala: D4 Hora: 13:00 às 14:30	Ponto um – Análise geral do programa de Matemática para o ensino secundário profissional; Ponto dois – Análise do programa do módulo A3-Estatística no que diz respeito a: ✓ Objetivos; ✓ Conteúdos ✓ Temas transversais ✓ Orientações/sugestões metodológicas; ✓ Avaliação. Ponto três – Reflexão conjunta sobre as orientações metodológicas sugeridas pelo programa oficial, no que diz respeito às aplicações da Matemática e modelação matemática.	Guião da sessão 2 (anexo 6) <u>Recursos para a sessão:</u> Camara de vídeo, computador, projetor, caderno de notas de campo. <u>Recursos teóricos:</u> Programa oficial de Matemática para o ensino secundário profissional (enviado previamente por email para todas as professoras)
3	Data: 16 de novembro de 2011 Sala: D4 Hora: 13:00 às 14:30	Ponto um - Compreender e conhecer as conceções iniciais de cada professora sobre o que entendem por modelação matemática e tarefa de modelação matemática;	Guião da sessão 3 (anexo 7) <u>Recursos para a sessão:</u>

		<p>Ponto dois -Distinguir entre tarefa de modelação e tarefa de aplicações da matemática;</p> <p>Ponto três - Definir (informalmente) modelação matemática;</p> <p>Ponto quatro - Caraterizar tarefa de modelação matemática;</p> <p>Ponto cinco – Resolver uma tarefa de modelação matemática e identificar (informalmente) as várias fases de modelação matemática;</p> <p>Ponto seis - Apresentar o ciclo de modelação de Kerr e Maki e conformar uma das tarefas de modelação matemática ao esquema de modelação.</p>	<p>Camara de vídeo, computador, projetor, power point, caderno de notas de campo, calculadoras gráficas.</p> <p><u>Recursos teóricos:</u></p> <p>Tarefas de modelação e de aplicações da Matemática, ciclo de modelação de Kerr e Maki.</p>
4	<p>Data: 29 de novembro de 2011</p> <p>Sala: Gabinete de Matemática</p> <p>Hora: 13:30 às 14:45</p>	<p>Ponto um - Analisar artigos sobre modelação matemática;</p> <p>Ponto dois - Apresentar, em debate, as ideias gerais de cada autor sobre o que se entende por modelação matemática;</p> <p>Ponto três - Analisar as tarefas de modelação apresentadas na sessão anterior e compreender a razão de serem tarefas de modelação;</p> <p>Ponto quatro - Definir modelação matemática com base em sustentação teórica;</p> <p>Ponto cinco - Selecionar uma corrente teórica sobre o que se entende por modelação matemática.</p>	<p>Guião da sessão 4 (anexo 8)</p> <p><u>Recursos para a sessão:</u></p> <p>Camara de vídeo, computador, projetor, caderno de notas de campo.</p> <p><u>Recursos teóricos:</u></p> <p>Artigos sobre modelação matemática e tarefas de modelação da sessão 3.</p>
5	<p>Data: 6 de dezembro de 2011</p> <p>Sala: Gabinete de Matemática</p> <p>Hora: 13:30 às 15:00</p>	<p>Ponto um - Analisar documentos sobre ciclos de modelação matemática;</p> <p>Ponto dois - Interpretar, em conjunto, as ideias gerais de cada autor sobre cada ciclo de modelação;</p> <p>Ponto três - Conformar a tarefa apresentada na sessão 3 com cada um dos ciclos;</p> <p>Ponto cinco - Refletir sobre a adequabilidade de cada ciclo de modelação à tarefa apresentada.</p>	<p>Guião da sessão 5 (anexo 9)</p> <p><u>Recursos para a sessão:</u></p> <p>Camara de vídeo, computador, projetor, caderno de notas de campo.</p>

		<p>Ponto seis - Selecionar um ciclo de modelação para base de sustentação à criação, planificação e implementação das futuras tarefas de modelação matemática.</p>	<p><u>Recursos teóricos:</u> Ciclos de modelação matemática, tarefa 3 apresentada na sessão 3.</p>
--	--	---	---

Apêndice 30

Tarefa apresentada na terceira sessão de trabalho colaborativo

Numa experiência laboratorial, uma substância foi retirada de um forno às 10h sendo, posteriormente, feito o registo da sua temperatura em diversos momentos ao longo de uma hora. Os valores obtidos encontram-se na tabela seguinte, onde t representa o tempo (em minutos) decorrido após a substância ser retirada do forno. T (em $^{\circ}\text{C}$) representa a temperatura.

<i>Tempo t, em minutos</i>	0	1	4	6	9	13	27	34	49	60
<i>Temperatura C, em graus centígrados</i>	86	51	30	26	23	21	18,5	18	17,4	17,2

1. Através de várias experiências e com a ajuda da calculadora, encontre um modelo matemático do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ que se ajuste às observações efectuadas.

2. De acordo com o modelo encontrado preveja a temperatura a que se encontra a substância, meia após ter sido retirada do forno.

3. Indique, com aproximação ao segundo, ao fim de quanto tempo, após ser retirada do forno, a substância atingiu a temperatura de 40°C .

Apêndice 31

Calendarização e tópicos de discussão das sessões relativas à segunda fase

Sessão nº	Data, local e duração	Tópicos a discutir	Recursos
6	Data: 15 de dezembro de 2011 Sala: Gabinete de Matemática Hora: 13:30 às 14:45	Ponto um - Analisar documentos sobre os perfis de desempenho dos três cursos profissionais; Ponto dois - Debate de ideias iniciais que surjam sobre possíveis situações do mundo real que possam ser modeladas em sala de aula; Ponto três - Assumir um compromisso de trabalho e de pesquisa sobre situações do mundo real, durante a interrupção letiva do Natal, no que diz respeito a cada curso profissional.	Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, caderno de notas de campo. Recursos teóricos: Perfis de desempenho dos cursos profissionais.
7	Data: 11 de janeiro de 2012 Sala: D9 Hora: 14:30 às 16:00	Ponto um - Apresentar as propostas Ponto dois - Discutir a viabilidade das propostas quanto: - aos recursos a utilizar e disponíveis na escola - à recolha de dados - à pertinência e interesse da possível tarefa para os alunos e área profissional - tempo de duração da possível tarefa - conteúdos estatísticos envolvidos.	Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador.
8	Data: 20 de janeiro de 2012 Sala: D4 Hora: 13:30 às 15:00	Ponto um - Analisar as várias propostas de situações do mundo real inerentes a cada curso profissional, apresentadas pelas professoras e já discutidas com as turmas. Ponto dois - Discutir as propostas quanto à viabilidade relativamente: - aos recursos a utilizar e disponíveis na escola - à recolha de dados (turmas e anos envolvidos, forma de recolher os dados) - à pertinência e interesse da possível tarefa para os alunos e área profissional - tempo de duração da possível tarefa - conteúdos estatísticos envolvidos - ajuda de professores de outras áreas e níveis de ensino	Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador.

9	Data: 2 de fevereiro de 2012 Sala: D4 Hora:13:30 às 15:00	Ponto um -Elaborar uma grelha onde conste a planificação das tarefas para cada curso tendo em conta os conteúdos estatísticos a abordar; Ponto dois - Planificar tarefas de modelação a partir de propostas já apresentadas nas duas sessões anteriores, com base nos conteúdos estatísticos	<u>Recursos para a sessão:</u> Camara de vídeo, computador, grelha de registo das propostas apresentadas nas sessões 7 e 8.
10	Data: 7 de fevereiro de 2012 Sala: D4 Hora:13:30 às 15:00	Ponto um - Criar e planificar tarefas de modelação a partir de propostas já apresentadas nas duas sessões anteriores	<u>Recursos para a sessão:</u> Camara de vídeo, computador, grelha de registo das propostas apresentadas nas sessões 7 e 8.
11	Data: 23 de fevereiro de 2012 Sala: D4 Hora:13:30 às 15:00	Ponto um - Criar e planificar tarefas de modelação a partir de propostas já apresentadas nas duas sessões anteriores	<u>Recursos para a sessão:</u> Camara de vídeo, computador, grelha de registo das propostas apresentadas nas sessões 7 e 8.
12	Data: 13 de março de 2011 Horário: 13:30 às 15:00 Sala: D2	Ponto único - Discutir as tarefas quanto: a conformação com o ciclo de modelação de Borromeo Ferri, estrutura e planificação da tarefa.	<u>Recursos para a sessão:</u> Camara de vídeo, computador, tarefas criadas pelas professoras, grelhas de planificação das tarefas.
13	Data: 21 de março de 2012 Sala: Consultório da Matemática Hora:13:30 às 15:00	Ponto um - Organizar a atividade Gincana para recolha de dados (da responsabilidade do curso técnico de gestão desportiva) Ponto dois - Concluir a elaboração de um inquérito, elaborado por todos os cursos profissionais envolvidos, para recolha de dados no pré escolar	<u>Recursos para a sessão:</u> Camara de vídeo, computador, tarefas criadas pelas professoras, grelhas de planificação das tarefas.
14	Data: 17 de abril de 2012	Ponto um – Analisar as várias tarefas de modelação criadas	<u>Recursos para a sessão:</u>

	Sala: gabinete da Matemática Hora:13:30 às 15:00	Ponto dois – discutir o plano de aula	Camara de vídeo, computador, tarefas criadas pelas professoras, grelhas de planificação das tarefas.
--	---	--	--

Apêndice 32

Calendarização e tópicos de discussão das sessões relativas à terceira fase

Sessão n°	Data, local e duração	Tópicos a discutir	Recursos
14	Data: 17 de abril de 2012 Sala: gabinete da Matemática Hora: 13:30 às 15:00	Ponto um – Analisar as várias tarefas criadas Ponto dois – discutir o plano de aula	Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, tarefas criadas pelas professoras, grelhas de planificação das tarefas.
15	Data: 8 de maio de 2012 Sala: D2 Hora: 13:30 às 14:45	Ponto um – Visionamento de episódios de uma aula da Patrícia; Ponto dois - Reflexão conjunta sobre a gestão e condução da aula. .	Recursos para a sessão: clip de vídeo de observação de aula, projetor, computador, guião com questões para debate.
16	Data: 16 de maio de 2012 Sala: Gabinete de Matemática Hora: 14:30 às 16:00	Ponto um – Visionamento de episódios de uma aula da Filipa; Ponto dois - Reflexão conjunta sobre a gestão e condução da aula. .	Recursos para a sessão: clip de vídeo de observação de aula, projetor, computador, guião com questões para debate.
17	Data: 21 de maio de 2012 Sala: Gabinete de Matemática Hora: 13:30 às 15:00	Ponto um – Visionamento de episódios de uma aula da Sara; Ponto dois - Reflexão conjunta sobre a gestão e condução da aula. .	Recursos para a sessão: clip de vídeo de observação de aula, projetor, computador, guião com questões para debate.
18	Data: 31 de maio de 2012 Sala: Gabinete de Matemática Hora: 13:30 às 15:00	Ponto um - Criar e planificar tarefas de modelação para variáveis bidimensionais. Ponto dois - Analisar as evidências que cada professora revela ao criar e planificar as tarefas relativamente ao conhecimento estatístico para ensinar que mobiliza e evidencia. Ponto três - Analisar as tarefas já implementadas e compreender o objetivo das mesmas e sua adequação	Recursos para a sessão: Camara de vídeo, computador, guião.

		<p>Ponto quatro - Reflexão conjunta sobre as tarefas já implementadas e sua integração no currículo relativamente à sua pertinência quanto à modelação matemática</p>	
--	--	--	--